



INTREPRINDEREA PENTRU INTRETINEREA
SI REPARAREA UTILAJELOR DE CALCUL
SI DE ELECTRONICA PROFESIONALA

I. I. R. U. C.

ELECTROTEHNICA





ELECTROTEHNICA

Elaborat : ing. Doncescu Dumitru

CAPITOLUL 1

INTRODUCERE

Fenomenele electrice și magnetice se cunoșteau din antichitate. Aprofundarea cunoștințelor legate de aceste fenomene s-a făcut mult mai târziu. Abia la sfârșitul secolului al optsprezecelea (la 1785), Ch. A. Coulomb, folosind balanța de torsiune, a determinat interacțiunile mecanice dintre mici corpuri electrizate.

Un avânt în dezvoltarea studiului și cercetării electromagnetismului s-a făcut simțit la 1800, când fizicianul A. Volta a construit prima pilă electrică.

Cu ajutorul pilei electrice s-a obținut curentul electric de conducție. Astfel, s-a permis studiul fenomenelor de electroliză și celelalte efecte ale curentului electric.

Fenomenul inducției electromagnetice descoperit de M. Faraday în 1831 a constituit baza aplicațiilor tehnice de producere, transport și utilizare a energiei electromagnetice.

Mai târziu, în 1873, J. C. Maxwell aprofundează și elaborează teoria câmpului electromagnetic.

Verificată prin experiență de H. Hertz în 1888, teoria câmpului electromagnetic avea să fie ulterior transpusă în aplicații practice și să se finalizeze în transmiterea de informații prin intermediul undelor electromagnetice.

Un rol important în progresul studierii și cercetării fenomenelor electromagnetice l-au avut și oamenii de știință români: N. Vasilescu Karpen, C. Budeanu, St. Procopiu, P. Andronescu și R. Răduleț.

Constantin Budeanu a colaborat activ la lucrările CEI (Comisia Electrotehnică Internațională) încă dinainte de al doilea război mondial, iar în 1964, academicianul Remus Răduleț a fost ales președinte al Comisiei Electrotehnice Internaționale.

1.1. Noțiuni de calcul vectorial

În prezentarea fenomenelor electrice și magnetice din acest manual, se vor folosi mărimi și operații de calcul vectorial care se cer a fi clarificate de la început.

Mărime scalară sau scalar este o proprietate fizică ce este caracterizată printr-un singur număr. De exemplu: masa, timpul, energia, puterea, sarcina electrică, curentul electric.

Vectorul este o mărime caracterizată printr-o valoare numerică, o direcție și un sens în lungul acestei direcții.

De exemplu: forța, viteza, accelerația, drumul, intensitatea câmpului electric, inducția magnetică.

Reprezentarea grafică se face cu ajutorul unui segment de dreaptă de lungime proporțională cu valoarea numerică, avînd o direcție și o săgeată pe direcție care semnifică sensul vectorului.

Vectorul se notează cu ajutorul unei litere prevăzută deasupra cu o bară (Exemplu: viteza \vec{V}).

Dacă vectorul se proiectează pe cele trei axe de coordonate rectangulare ox , oy și oz , se obțin componentele vectorului pe cele trei axe. Dacă vectorul este \vec{A} , atunci cele trei componente sînt: A_x , A_y și A_z .

Componentele vectorului sînt mărimi scalare. (Fig. 1.1)

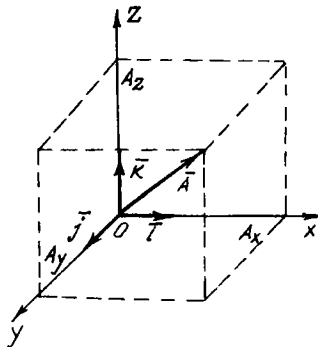


Fig. 1.1. Vectorul \vec{A} , proiecțiile și vectorii unitari \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} .

Celor trei axe, li se pot asocia vectori unitari sau versori ortogonali după cum urmează:

- axei ox , versorul \bar{i} ;
- axei oy , versorul \bar{j} ;
- axei oz , versorul \bar{k} .

Cu ajutorul vectorilor unitari, vectorul \bar{A} se poate prezenta și sub forma:

$$\bar{A} = A_x \bar{i} + A_y \bar{j} + A_z \bar{k} \quad (1.1)$$

Modulul unui vector este valoarea lui numerică.

Se notează fără bară:

$$|\bar{A}| = A \quad (1.2)$$

iar pentru versori : $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$

!

Cîmp de scalari. Cîmp de vectori. Dacă într-un domeniu fiecare punct este caracterizat printr-o mărime scalară, domeniul constituie un cîmp de scalari. În schimb, dacă fiecare punct dintr-un domeniu este caracterizat printr-un vector, domeniul constituie un cîmp de vectori.

Produsul scalar a doi vectori. Se numește produs scalar a doi vectori \bar{A} și \bar{B} , expresia:

$$\bar{A}\bar{B} = AB \cos \alpha \quad (1.3)$$

în care A și B sînt modulele vectorilor \bar{A} și \bar{B} , adică:

$$A = |\bar{A}| \text{ iar } B = |\bar{B}|$$

Unghiul α este unghiul format de cei doi vectori \bar{A} și \bar{B} (fig. 1.2).

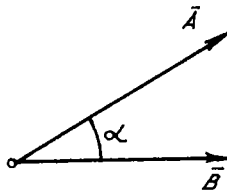


Fig. 1.2. Vectorii \vec{A} și \vec{B} formează unghiul α .

Se observă că produsul scalar a doi vectori este o mărime scalară. ($AB \cos \alpha$ este un scalar).

Produsul scalar este comutativ, adică:

$$\vec{A}\vec{B} = \vec{B}\vec{A} \quad (1.4)$$

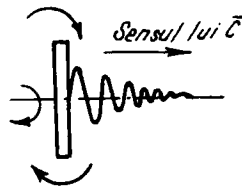
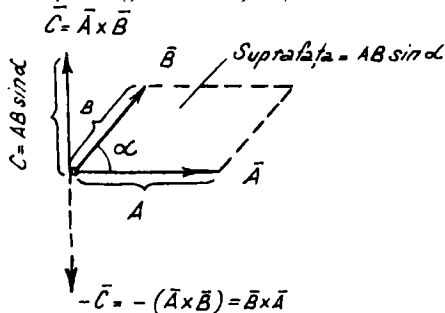
Produsul vectorial a doi vectori. Se notează $\vec{A} \times \vec{B}$ și este prin definiție tot un vector, \vec{C} , de modul $AB \sin \alpha$ (Fig. 1.3), adică:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

în care:

$$|\vec{C}| = AB \sin \alpha. \quad (1.5)$$

Direcția vectorului \vec{C} este normală pe planul format de vectorii \vec{A} și \vec{B} iar sensul vectorului \vec{C} pe această direcție se determină după regula burghiului drept (Fig. 1.3 a și b).



b

Fig. 1.3 a) Produsul vectorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. b) Regula burghiului drept.

· In ce constă regula burghiului drept ? Se consideră originea comună a vectorilor \vec{A} și \vec{B} ca fiind fixă. Se rotește, în planul vectorilor, vârful primului vector \vec{A} în spre vectorul \vec{B} , pe drumul cel mai scurt. Acestui sens de rotire al vectorului \vec{A} către \vec{B} , îi corespunde după regula burghiului drept un sens pentru vectorul \vec{C} , normal pe planul în care se face rotirea.

Produsul vectorial nu este comutativ, adică:

$$\vec{A} \times \vec{B} = - (\vec{B} \times \vec{A}) \quad (1.6)$$

Produsul scalar și vectorial pentru versorii \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} determină următoarele rezultate:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1.1. \cos 0^\circ = 1 ; \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 ; \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 ;$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 1.1. \cos 90^\circ = 0 ; \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 ; \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 ;$$

iar produsul vectorial

$$\vec{i} \times \vec{i} = 1.1 \sin 0^\circ = 0 ; \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0 ; \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0 ;$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} ; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} ; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} .$$

1.2. Simbolurile mărimilor fizice

Mărimi geometrice

l = lungime

s - spațiu

r = rază

A - suprafață

λ = lungime de undă

V = volum

Timp - Viteză

t - timp

ω - viteză unghiulară

T - perioadă

f - frecvență

τ - constantă de timp

ω - pulsație ($2\pi f$)

n - turație

v - viteză

a - accelerație

Forță - Masă

F - forță	G - greutate
p - presiune	m - masă.

Energie. Putere. Căldură

W - energie	Θ - temperatura în $^{\circ}\text{C}$
P - putere	T - temperatura absolută în $^{\circ}\text{K}$
Q - cantitate de căldură	η - randament

Mărimi electrice

C - capacitate	\mathcal{E} - permitivitatea absolută
\vec{D} (D) - inducția electrică	\mathcal{E}_0 - permitivitatea vidului
\vec{E} (E) intensitatea câmpului electric	\mathcal{E}_r - permitivitatea relativă
E - tensiune electromotoare (t.e.m.)	ρ - rezistivitatea electrică
G - conductanță electrică	V - potențial electric
I - intensitatea curentului electric	Ψ - flux electric
q - sarcina electrică punctuală	
R - rezistență electrică	
U - tensiune electrică (cădere de tensiune)	

Mărimi magnetice

\vec{B} (B) - inducția magnetică	χ_m - susceptibilitate magnetică
\vec{H} (H) - intensitatea câmpului magnetic	μ - permeabilitate absolută
L - inductivitate	μ_0 - permeabilitatea vidului
M - inductivitate mutuală	μ_r - permeabilitate relativă
R_m - reluctanță magnetică	Φ - flux magnetic
	U_m - tensiune magnetică
	U_{mm} - tensiune magnetomotoare

CAPITOLUL 2

ELECTROSTATICA

2.1. Fenomene electrice. Sarcina electrică. Cîmp electric.

Intensitatea cîmpului electric în vid

Din timpuri îndepărtate s-a observat că mici corpuri sînt atrase de alte corpuri frecate în prealabil cu o bucată de postav. Rezultatul acestor experiențe făcute de-a lungul timpului și în diverse locuri de pe pămînt s-au repetat.

Spre exemplu, cu ajutorul unei vergele de sticlă frecată întîi cu o bucată de mătase, se poate atrage un mic corp pe care-l vom numi corp de probă și pe care îl vom descrie în continuare. Spunem că acest fenomen care apare în condițiile experienței noastre este un fenomen electric; vergeaua de sticlă și mătasea s-au electrizat și acestea se află într-o nouă stare, stare de electrizare.

În jurul acestor corpuri, s-a creat un cîmp electric.

S-a constatat că sînt și alte moduri în care se creează cîmp electric;

- acțiuni mecanice exercitate asupra unor corpuri;
- încălzirea anumitor corpuri;
- contact cu anumite corpuri deja electrizate;
- iradierea cu raze Roentgen sau raze ultraviolete;
- apropierea de un corp electrizat;
- variația în timp a unui cîmp magnetic (cîmpul magnetic va fi definit ulterior).

Explorarea cîmpului electric se face cu ajutorul corpului de probă realizat dintr-o bobită de soc, învelită cu o foiță metalică foarte subțire.

Corpul de probă îndeplinește următoarele condiții:

- prin contact cu vergeaua de sticlă sau bucata de mătase obține o stare de electrizare;

- pentru a nu modifica starea de electrizare a câmpului supus explorării, starea de electrizare a sa trebuie să fie slabă;
- starea sa de electrizare să fie invariabilă;
- firul de suspendare să fie foarte subțire, greutate neglijabilă și izolant.

Metalizarea corpului de probă se face pentru ca asupra lui să acționeze numai forțe (să nu apară cuplu).

Prin explorarea câmpului, se constată prezența forței de natură electrică \vec{F}_e exercitată de câmp asupra corpului de probă în fiecare punct al domeniului (Fig. 2.1.).

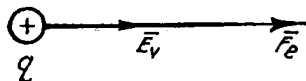


Fig. 2.1. Forța de natură electrică \vec{F}_e .

Forța este egală cu produsul dintre o mărime scalară ce caracterizează starea de electrizare a micului corp de probă și care se numește sarcină electrică (notată cu q) și o mărime vectorială ce caracterizează în punctul respectiv (local) câmpul electric în vid și care se numește intensitatea câmpului electric în vid (notă cu \vec{E}_v).

Relația se scrie:
$$\vec{F}_e = q \vec{E}_v \quad (2.1)$$

Interesantă a fost constatarea potrivit căreia într-un punct dat, la stări de electrizare transmise corpului de probă de la vergeaua de sticlă respectiv de la bucata de mătase, forța electrică a avut sensuri diferite pe aceeași direcție. Concluzia trasă în urma experienței a fost că sarcina electrică poate avea semne opuse. S-a convenit: corpul de probă are sarcină pozitivă când i se transmite starea de electrizare de la vergeaua de sticlă și are sar-

cină negativă atunci când prin contact starea de electrizare o primește de la bucata de mătase.

S-a mai convenit sensul intensității câmpului electric: sensul de la sarcina pozitivă către sarcina negativă. Linia continuă tangentă în fiecare punct la direcția locală a vectorului intensitatea câmpului electric, se numește linie de câmp electric (Fig. 2. 2).

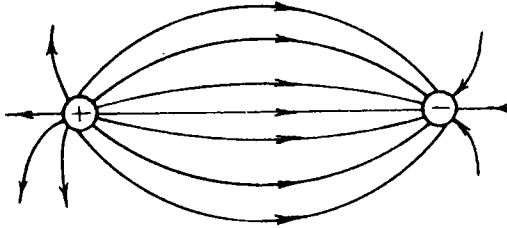


Fig. 2. 2. Liniile de câmp electric.

Referitor la noțiunea de vid, trebuie înțeles, că reprezintă o stare limită către care se tinde când densitatea de masă a corpurilor tinde către zero.

Din formula (2.1) se deduce că forța din câmp electric este omoparalelă cu intensitatea câmpului electric când sarcina electrică asupra căreia acționează este pozitivă (Fig. 2. 3) și antiparalelă în cazul că această sarcină este negativă (Fig. 2. 4).

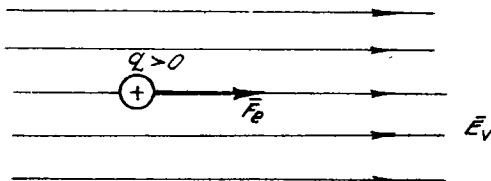


Fig. 2. 3. Sensul forței în cazul $q > 0$.

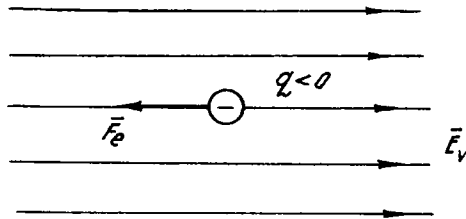


Fig. 2.4. Sensul forței în cazul $q < 0$.

2.1.1. Conductori, semiconductori, izolanți

Experimental se constată că orice corp pus în contact cu un corp electrizat este respins de acesta. Timpul de respingere diferă de la corp la corp și variază de la microsecunde pînă la ore sau zile.

Corpul la care acest timp este de ordinul microsecundelor ($1 \mu s = 10^{-6} s$) poartă denumirea de conductor.

Cînd acest timp este de ordinul secundelor, atunci corpul este semi-conductor. În fine, corpul care posedă un timp de respingere de ordinul orelor sau zilelor se numește izolant.

2.1.2. Formula lui Coulomb

În 1785, Charles A. Coulomb folosind balanța electrică de torsiune a determinat o expresie pentru forțele care se exercită între două corpuri de probă practic punctiforme, încărcate cu sarcini electrice q_1 și q_2 , plasate în vid la distanța R .

Vectorial expresia se scrie în cazul respingerii dintre sarcini ($q_1 > 0$; $q_2 > 0$ sau $q_1 < 0$; $q_2 < 0$) astfel (Fig. 2.5):

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{R^2} \vec{u}_R \quad (2.2)$$

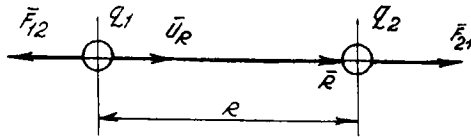


Fig.2.5. Forțele electrice de respingere.

Cînd sarcinile electrice sînt de semn contrar ($q_1 > 0$; $q_2 < 0$ sau $q_1 < 0$; $q_2 > 0$) forța este de atracție și are expresia (Fig.2.6):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2} \vec{u}_R \quad (2.2a)$$

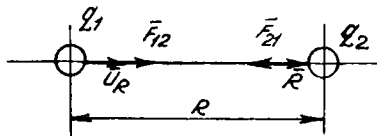


Fig.2.6. Forțele electrice de atracție

în care: $\vec{u}_R = \frac{\vec{R}}{R}$ reprezintă versorul unitar al vectorului \vec{R} ;

$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{\text{Farad}}{\text{metru}}$ (Sistemul Internațional SI) reprezintă permitivitatea vidului.

Scalar, relațiile de mai sus se exprimă pentru vid astfel:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 R^2} \quad (2.2b)$$

2.1.3. Cîmpul electric al unei sarcini electrice punctuale

Din formula lui Coulomb, s-a determinat forța de natură electrică exercitată de sarcina punctuală q_1 asupra sarcinii punctuale q_2 (presupunem, $q_1 > 0$ și $q_2 > 0$) (Fig.2.7).

$$F_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2} \bar{u}_R$$



Fig. 2. 7.

Dar sarcina q_2 , plasată în câmpul electric \bar{E}_{v1} produs de sarcina q_1 , este supusă forței de natură electrică: $\bar{F}_e = q_2 \bar{E}_{v1}$

Aceste forțe sînt egale dar sînt altfel exprimate.

Deci
$$\bar{F}_{21} = \bar{F}_e$$

sau
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2} \bar{u}_R = q_2 \bar{E}_{v1} .$$

Din această relație, rezultă expresia câmpului electric în vid la distanța R de sarcina electrică q_1 :

$$\bar{E}_{v1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R^2} \bar{u}_R$$

sau în cazul general,

$$\bar{E}_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \bar{u}_R . \quad (2.3)$$

În cazul sarcinii electrice punctuale, rezultă că intensitatea câmpului electric este radială și scade invers proporțional cu patratul distanței. În cazul sarcinii pozitive ($q > 0$), sensul câmpului electric este spre exterior (Fig. 2. 8) iar cînd sarcina este negativă ($q < 0$), sensul câmpului electric este invers (Fig. 2. 9).

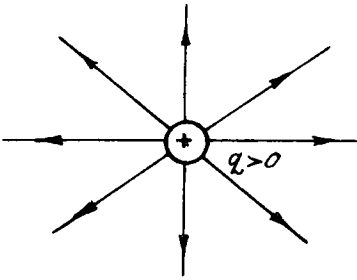


Fig. 2. 8. Sensul câmpului electric spre exterior ($q > 0$)

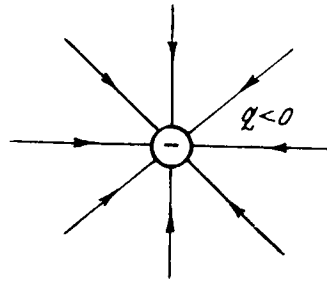


Fig. 2. 9. Sensul câmpului electric spre interior ($q < 0$)

2. 1. 4. Unități de măsură

Unitățile de măsură indicate vor corespunde Sistemului Internațional SI, adoptat legal în țara noastră.

În acest sistem, unitatea de măsură pentru sarcină electrică se numește coulomb și se notează C . Din relația 2.2b) se determină că între două sarcini electrice încărcate cu sarcina electrică de 1 coulomb fiecare, plasate la distanța de 1 metru în vid, se exercită forța de $9 \cdot 10^9$ newtoni (N).

Unitatea de măsură a intensității câmpului electric se numește volt pe metru (V/m). Din (2. 1), rezultă că în vid într-un punct din câmpul electric, intensitatea acestui câmp are valoarea de un volt pe metru când asupra sarcinii electrice de un coulomb plasată în acest punct, se exercită forța egală cu un newton.

Din considerente practice, pentru sarcina electrică, se folosesc sub multipli coulombului. Aceștia sînt: milicoulombul ($1 \text{ mC} = 10^{-3} C$) și microcoulombul ($1 \mu C = 10^{-6} C$).

2. 2. Tensiunea și potențialul electric

Un corp aflat în stare de electrizare cu sarcina electrică q' , lăsat liber într-un câmp electric creat de o sarcină punctuală q , se va deplasa radial în lungul unei linii de câmp sub acțiunea forței de natură electrică \vec{F}_e (Fig. 2. 10).

Din cunoștințele anterioare referitoare la lucrul mecanic, se știe că acesta se poate determina atunci când se cunoaște forța și drumul pe care se deplasează corpul sub influența acestei forțe.

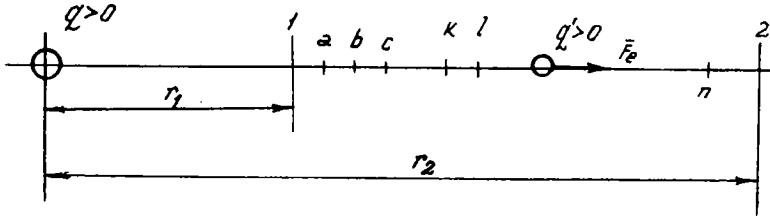


Fig.2.10. Forța electrică \bar{F}_e deplasează sarcina electrică q' .

Presupunem că sub acțiunea forței de natură electrică \bar{F}_e , sarcina electrică q' s-a deplasat din 1 în 2.

În punctul 1, modulul forței electrice este:

$$F_{e1} = \frac{q q'}{4\pi \epsilon_0 r_1^2}$$

iar în 2

$$F_{e2} = \frac{q q'}{4\pi \epsilon_0 r_2^2}$$

Să calculăm lucrul mecanic efectuat de forța electrică atunci când sarcina se deplasează din 1 în 2.

Pentru că forța nu rămîne constantă, scade cu patratul distanței, vom calcula lucrul mecanic pe mici porțiuni. De-a lungul fiecărei porțiuni, se consideră că forța este constantă. În final, se obține lucrul mecanic dintre 1 și 2, pe care-l notăm L_{12} , ca suma lucrurilor mecanice elementare de pe fiecare porțiune în parte.

Considerăm porțiunea de drum dintre k și l.

Modulele forțelor electrice la capete vor fi în punctul k

$$F_{ek} = \frac{q q'}{4\pi \epsilon_0 r_k^2} \text{ iar în punctul l va fi } F_{el} = \frac{q q'}{4\pi \epsilon_0 r_l^2}$$

Pentru că punctele k și l sînt foarte apropiate, putem considera că

$$F_{ek} = F_{el}$$

și că

$$r_k^2 = r_k r_l .$$

Deci:

$$F_{ek} = \frac{q q'}{4 \pi \epsilon_0 r_k r_l} = F_{el} .$$

Dar lucrul mecanic elementar efectuat între k și l este

$$\Delta L = F_{ek} (r_l - r_k) .$$

Se obține :

$$\Delta L = \frac{q q'}{4 \pi \epsilon_0 r_k r_l} (r_l - r_k) = \frac{q q'}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_l} \right) .$$

Lucrul mecanic total pe drumul 1.2 este

$$L_{12} = \sum_1^2 \Delta L = \sum_1^2 \frac{q q'}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_l} \right) = \frac{q q'}{4 \pi \epsilon_0} \sum_1^2 \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_l} \right)$$

sau

$$L_{12} = \frac{q q'}{4 \pi \epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_a} \right) + \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) + \dots + \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_l} \right) + \dots + \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_2} \right) \right] .$$

Se observă că se reduc anumiți termeni și obținem:

$$L_{12} = \frac{q q'}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.4)$$

în care r_1 respectiv r_2 sînt distanțele punctelor 1 și 2 față de sarcina q.

Această relație se poate pune sub forma

$$\frac{L_{12}}{q'} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.4a)$$

care reprezintă lucrul mecanic specific, numit tensiune electrică, dintre punctele 1 și 2 și notată cu U_{12} , adică:

$$U_{12} = \frac{L_{12}}{q'} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) . \quad (2.5)$$

Tensiunea U_{12} este dată de diferența a doi termeni: V_1 și V_2

în care

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} \text{ și } V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} .$$

Termenul de forma lui V_1 sau V_2 se notează cu V , în cazul general, și se numește potențial electrostatic.

Se demonstrează că tensiunea electrică U_{12} nu depinde de forma drumului dintre 1 și 2.

Tensiunea electrică U_{12} , exprimată în funcție de cele două potențiale, capătă forma:

$$U_{12} = V_1 - V_2 \quad (2.6)$$

În cazul în care punctul 2 se confundă cu punctul 1, drumul este închis.

Se demonstrează că, de-a lungul unui drum închis, tensiunea electrică este egală cu zero. Notînd drumul închis cu litera grecească Γ (gama), se scrie

$$U_{\Gamma} = 0 . \quad (2.6 \text{ bis})$$

Această relație reprezintă teorema potențialului electrostatic.

Dacă punctul 2 se depărtează la infinit, tensiunea electrică U_{12} este egală cu potențialul V_1 întrucît V_2 devine egal cu zero;

$$U_{1\infty} = \frac{L_{1\infty}}{q} = V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} \quad (2.7)$$

Din această expresie se poate defini noțiunea de potențial electrostatic V .

Potențialul electrostatic V , dintr-un punct oarecare din câmpul electric, reprezintă raportul dintre lucrul mecanic efectuat de forțele electrice ale câmpului pentru deplasarea sarcinii electrice din acest punct la infinit și sarcina electrică respectivă.

Tensiunea electrică U_{12} , egală cu diferența potențialelor V_1 și V_2 , se numește și diferență de potențial.

În cazul câmpului electric uniform și omogen, intensitatea câmpului electric este aceeași în toate punctele câmpului iar tensiunea dintre 1 și 2 va fi:

$$U_{12} = \frac{L_{12}}{q} = \sum_1^2 E_v \Delta l = E_v l_{12} \quad (2.8)$$

Câmpul uniform și omogen se reprezintă grafic prin linii drepte, paralele și la aceeași distanță. Drumul pe care se calculează lucrul mecanic este reprezentat de segmentul de dreaptă l_{12} (Fig. 2.11).

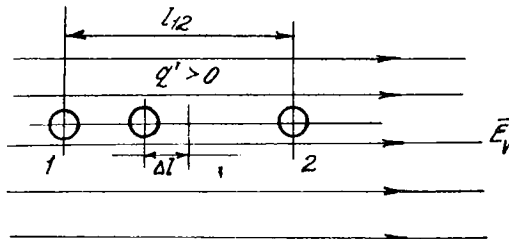


Fig. 2.11. Câmp electric uniform și omogen.

Dacă se consideră sarcina electrică egală cu unitatea, se poate defini tensiunea electrică astfel:

Tensiunea electrică dintre două puncte, situate într-un câmp electrostatic (invariabil în timp), este prin definiție egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele electrice pentru deplasarea unității de sarcină electrică pozitivă între cele două puncte.

2.2.1. Unități de măsură

În sistemul de unități S I unitatea de măsură a tensiunii electrice (diferenței de potențial) și a potențialului electrostatic se numește volt (V).

Precizare. Pînă acum și în continuare, se notează cu simboluri majuscule mărimile constante în timp și cu minuscule, cele variabile în timp.
Exemplu:

Tensiunea electrică constantă în timp se notează cu U și variabilă cu u .

2.2.2. Aplicații

1. Să se determine ecuația mișcării $s = f(t)$ și ecuația vitezei $v = f(t)$, pentru particula cu sarcină electrică q , într-un câmp electric uniform și omogen de intensitate \vec{E} . Se consideră viteza inițială a particulei $V_0 = 0$ și spațiul inițial $s_0 = 0$ (Fig. 2.12).

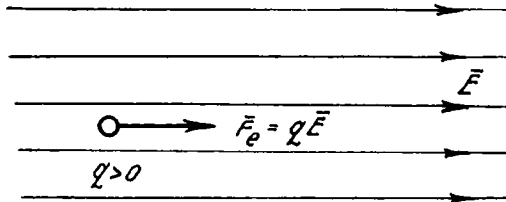


Fig. 2.12.

Rezolvare.

Cîmpul electric omogen se reprezintă grafic prin linii de câmp, ale intensității cîmpului electric \vec{E} , paralele și echidistante.

Pentru determinarea ecuațiilor $s = f(t)$ și $v = f(t)$, se scrie legea dinamicii cunoscută din mecanică:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

În acest caz, forța \vec{F} este forța de natură electrică:

$$\vec{F}_e = q\vec{E}.$$

Această forță acționează asupra corpului.

Prin urmare se poate scrie

$$\vec{F}_e = \vec{F}$$

sau

$$q \vec{E} = m \vec{a}$$

prin care datele noi introduse sînt:

m - masa particulei;

\vec{a} - accelerația imprimată corpului de forța \vec{F}_e .

Tot din această relație, rezultă că mișcarea particulei se face în direcția și sensul cîmpului electric. Este o mișcare rectilinie

Se poate scrie în modul $q E = ma$.

Rezultă accelerația $a = \frac{q E}{m}$.

Cum a este constantă, mișcarea particulei în cîmp este uniform accelerată.

Ecuția vitezei este de forma:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + at = \frac{q E}{m} t.$$

Ecuția de mișcare este

$$s(t) = s_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{a t^2}{2} = \frac{q E}{2 m} t^2$$

cu condițiile inițiale date prin problemă:

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 = 0 ;$$

$$s(0) = s_0 = 0 .$$

În Fig. 2.13, este reprezentarea grafică.

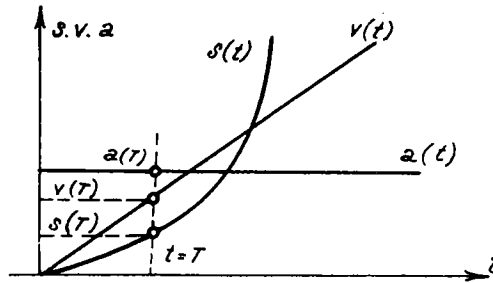


Fig. 2.13.

Din grafic se poate determina la orice moment $t = T$ accelerația, viteza sau spațiul parcurs de particulă.

2. Se consideră o diodă electronică cu vid (Fig. 2.14) avînd tensiunea anodică $U_A = 200$ V, distanța dintre catod și anod $d = 10$ cm. Admițînd că electronii au viteză nulă la emisia de pe catod, se cere timpul T în care un electron străbate spațiul catod - anod și viteza $v(T)$ cu care sosește pe anod.

Rezolvare. Cu rezultatele din prima problemă avem

$$d = s(T) = \frac{q E}{2 m} T^2 \text{ sau}$$

$$T = \sqrt{\frac{2 m d}{q E}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 0,1}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2000}} \text{ (s)} = 24,8 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 24,8 \text{ ns}$$

în care:

- masa electronului $m = m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$;
- sarcina electronului $q = q_e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;

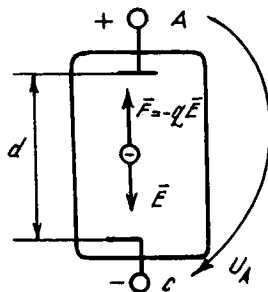


Fig. 2.14.

$$\text{- intensitatea cîmpului } E = \frac{U}{d} = \frac{200}{10 \cdot 10^{-2}} = 2000 \text{ V/m}$$

$$\text{și viteza } v(T) = \frac{q E}{m} T = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2000}{9,1 \cdot 10^{-31}} 24,8 \cdot 10^{-9} = 0,84 \cdot 10^7 \text{ m/s.}$$

S-a neglijat modificarea masei în funcție de viteză deoarece:

$$m = \frac{m_0}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{m_0}{1 - \left(\frac{0,84 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8}\right)^2} \cong m_0$$

în care:

$$c = \text{viteza luminii} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s};$$

$$m = \text{masa corpului pentru viteza } v;$$

$$m_0 = \text{masa corpului pentru viteza } v_0;$$

$$v_0 = v(T) = 0,84 \cdot 10^7 \text{ m/s.}$$

2.3. Cîmpul electrostatic în vid al unor repartiții de sarcini.

Superpoziția

S-a demonstrat anterior, că intensitatea cîmpului electric în vid produs de un corp punctual, încărcat cu sarcina electrică q , la distanța R , este egală cu:

$$E_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \vec{u}_R \quad (\text{vezi 2.3}).$$

Dacă în vid sînt n sarcini, atunci intensitatea cîmpului electric în vid, rezultat într-un punct oarecare P , este dată de suma geometrică (vectorială) a intensităților pe care fiecare corp încărcat le-ar produce separat în punctul considerat (Fig. 2.15):

$$\vec{E}_v = \vec{E}_{v1} + \vec{E}_{v2} + \dots + \vec{E}_{vn}. \quad (2.9)$$

Enunțul de mai sus reprezintă teorema superpoziției.

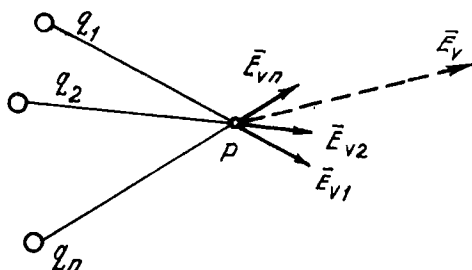


Fig. 2.15. Câmpul electric rezultat \vec{E}_v .

Această teoremă se aplică și în cazul altor repartizări de sarcină electrică.

În natură, sarcina electrică poate fi repartizată pe fire, suprafețe sau sub formă de sarcini de volum. Caracterizarea locală se face în fiecare caz în parte cu ajutorul unei densități de linie, suprafață sau volum. Pentru o repartizare uniformă se definește:

Densitatea sarcinii de linie ρ_l :

$$\rho_l = \frac{q}{l} \left(\frac{\text{Coulomb}}{\text{m}} \right) \quad (2.10)$$

iar sarcina electrică totală de pe porțiunea de lungime l este

$$q = \rho_l l \text{ (C)}. \quad (2.10a)$$

Densitatea sarcinii de suprafață ρ_s :

$$\rho_s = \frac{q}{A} \left(\frac{\text{Coulomb}}{\text{m}^2} \right) \quad (2.11)$$

iar sarcina electrică totală de pe suprafața A este

$$q = \rho_s A \text{ (C)}. \quad (2.11a)$$

Densitatea sarcinii de volum ρ_v :

$$\rho_v = \frac{q}{V} \left(\frac{\text{Coulomb}}{\text{m}^3} \right) \quad (2.12)$$

iar sarcina electrică totală din volumul V este

$$q = \rho_v V \text{ (C) .} \quad (2.12a)$$

În cazul că există toate tipurile de sarcină electrică: punctiformă, de linie, de suprafață și de volum, atunci expresia cîmpului electric va fi obținut prin superpoziția cîmpurilor generate de fiecare sarcină electrică în parte.

2.3.1. Aplicație

În punctele $A(a, 0)$ și $B(0, a)$ se află două corpuri punctuale cu sarcinile electrice q și respectiv $-2q$. Să se determine intensitatea și potențialul cîmpului electric în origine $O(0, 0)$ (Fig. 2.16) .

Date numerice: $a = 10 \text{ cm}$; $q = 1 \mu\text{C}$.

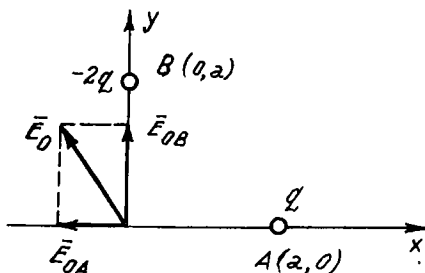


Fig. 2.16.

Rezolvare. În originea O , intensitatea cîmpului electric rezultat este suma vectorială a cîmpurilor produse de fiecare sarcină în parte.

$$E_O = \sqrt{E_{CA}^2 + E_{OB}^2} = \sqrt{\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\right)^2 + \left(-\frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\right)^2}$$

sau

$$E_O = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \sqrt{5} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}}{(10^{-1})^2} \sqrt{5} = 90 \sqrt{5} = 200 \frac{V}{m}$$

Prin **superpoziția** potențialelor (se consideră potențialul de la infinit, egal cu zero) se obține:

$$V_O = V_A(a) + V_B(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

sau

$$V_O = -\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}}{0,1} = -900 V.$$

2.4. Cîmpul electrostatic în conductoare

Pentru a determina cîmpul electrostatic în conductoare este necesar să considerăm modelul structurii sale microscopice. Acest model constă din:

- o rețea ionică rigidă încărcată pozitiv;

- un fluid electronic încărcat negativ, distribuit în condiții de omogenitate în așa fel încît sarcinile electrice de semn contrar să se compenseze, determinînd o densitate de volum a sarcinii rezultante nulă. În Fig. 2.17 este reprezentată rețeaua ionică sub forma unui grilaj iar fluidul electronic prin puncte uniform repartizate în condiții de omogenitate.

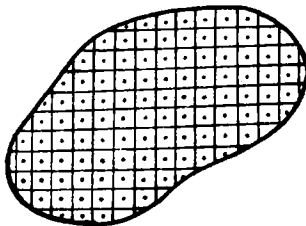


Fig. 2.17. Conductor omogen, neaccelerat.

Imprimîndu-se conductorului o mișcare accelerată într-un anumit sens, urmare inerției, electronii sub acțiunea forțelor de inerție se vor deplasa în sens opus, apărînd o regiune în care sarcinile electrice negative sînt în exces față de sarcinile pozitive. În regiunea opusă va apare un exces de sarcini pozitive.

Urmare grupării sarcinilor în cele două regiuni, se va naște un cîmp electric orientat dinspre regiunea încărcată pozitiv spre regiunea încărcată negativ (Fig. 2.18). Electronii vor fi supuși acțiunii unor forțe electrice și unor forțe neelectrice (Fig. 2.19).

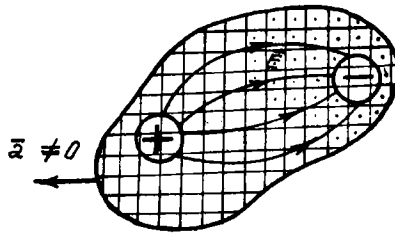


Fig. 2.18. Conductor accelerat.

Cînd cele două forțe devin egale, electronul se oprește:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_{neel} = 0 . \quad (2.13)$$

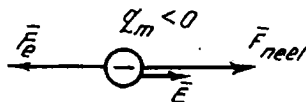


Fig. 2.19. Forțele care se exercită asupra unui electron într-un conductor accelerat.

Această relație reprezintă condiția de echilibru electrostatic.

Folosind relația (2.1.), condiția de echilibru electrostatic se mai scrie:

$$q_e \vec{E} + \vec{F}_{neel} = 0 \quad (2.13a)$$

sau

$$\vec{E} + \frac{\vec{F}_{neel}}{q_e} = 0 \quad (2.13b)$$

în care: q_e - sarcina electronului.

În cazul în care conductorul este neaccelerat $\frac{\vec{F}_{neel}}{q_e} = 0$ și condiția de echilibru electrostatic devine

$$\vec{E} = 0, \quad (2.14)$$

adică:

în regim electrostatic, intensitatea câmpului electric este nulă în interiorul conductoarelor (omogene din punct de vedere fizic și chimic) neaccelerate.

Consecințe privind constatarea că în conductoare câmpul electric $\vec{E}=0$.

1. În regim electrostatic, toate punctele unui conductor au același potențial. Considerăm două puncte oarecare A și B ale unui conductor (Fig.2.20).

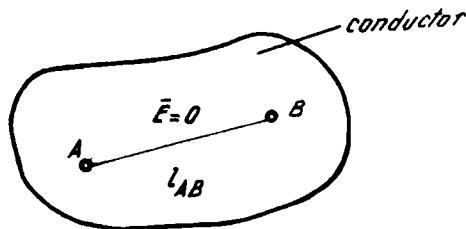


Fig.2.20. Două puncte A și B ale unui conductor în regim electrostatic.

Aplicînd formula (2.8), se obține:

$$U_{AB} = \vec{E} \vec{l}_{AB} = V_A - V_B \quad (2.15)$$

Ținând seama de faptul că, în regim electrostatic, câmpul electric este nul în interiorul conductoarelor (căci în caz contrar, sub acțiunea forțelor electrice $F_e = q_e E$ ar exista o mișcare ordonată a electronilor ceea ce nu este în acord cu regimul electrostatic), se poate scrie:

$$V_A - V_B = 0 \quad (2.15a)$$

sau

$$V_A = V_B \quad (2.15b)$$

Cum alegerea punctelor A și B a fost arbitrară, rezultă că toate punctele conductorului au în regim electrostatic același potențial.

2. În regim electrostatic, în interiorul unei cavități situate într-un conductor, câmpul electric este nul. Pentru demonstrație admitem existența unei linii de câmp electric în interiorul cavității (Fig. 2.21).

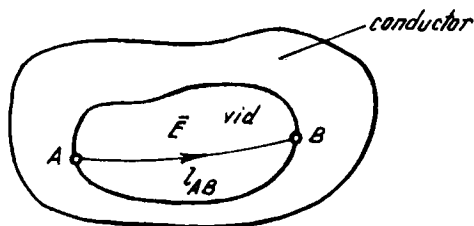


Fig. 2.21.

Cum punctele A și B, situate la extremitățile liniei de câmp (sînt puncte ale conductorului), au același potențial:

$$V_A = V_B \text{ respectiv } V_A - V_B = 0,$$

din formula (2.15) se deduce că

$$E l_{AB} = 0. \quad (2.16)$$

Dar cum l_{AB} este diferit de zero, rezultă că în cavitățile conductoarelor nu există câmp electric ($\vec{E} = 0$). Acesta se numește efectul de ecran al conductoarelor și se folosește în mod frecvent în practică.

2.5. Câmpul electric în substanță

Din punct de vedere al proprietăților electrice, așa cum s-a arătat anterior, materialele se împart în trei categorii: izolante (dielectrici), semi-conductoare și conductoare.

În conductoare există particule încărcate cu sarcină electrică care se pot deplasa liber în interiorul corpului, sarcini libere.

În dielectrici, particulele încărcate cu sarcină electrică nu se pot deplasa, ele fiind reținute de forțele intramoleculare (forțe din interiorul moleculelor).

Aceste particule se mai numesc sarcini legate. Sub influența câmpului electric, ele pot doar să-și modifice poziția relativă, adică, să sufere o mică deplasare; particulele încărcate pozitiv se vor deplasa în sensul câmpului iar particulele încărcate negativ se vor deplasa în sens contrar câmpului. Această schimbare a poziției reciproce a particulelor microscopice, încărcate pozitiv și negativ, sub influența unui câmp electric, se numește polarizarea dielectricului.

Din punctul de vedere al fenomenului de polarizare se disting două categorii de dielectrici: dielectrici nepolari și dielectrici polari.

2.5.1. Dielectrici nepolari conțin molecule neutre din punct de vedere electric, formate din particule pozitive și negative, astfel așezate încît, în stare nepolarizată, fiecare moleculă produce un câmp electric nul în exteriorul său. Să considerăm cazul cel mai simplu al atomului de hidrogen format dintr-un nucleu încărcat pozitiv în jurul căruia se rotește un electron încărcat negativ (Fig. 2.22 a).

Orbita electronului este simetrică față de nucleu, astfel că din punctul de vedere al producerii câmpului electric, efectul electronului este același ca și cînd sarcina lui ar fi concentrată în punctul în care se află nucleul.

Dacă se aplică un câmp electric exterior, nucleul va fi deplasat în sensul câmpului, iar orbita electronului se modifică astfel încît centrul său de

acțiune" se schimbă și nu mai coincide cu punctul în care se află nucleul (Fig. 2.22 b). Molecula va produce un câmp electric în jurul său care va fi identic cu câmpul produs de nucleu și de o sarcină fictivă echivalentă electrodinamică pe noua sa orbită (această sarcină fictivă este figurată punctat). Molecula

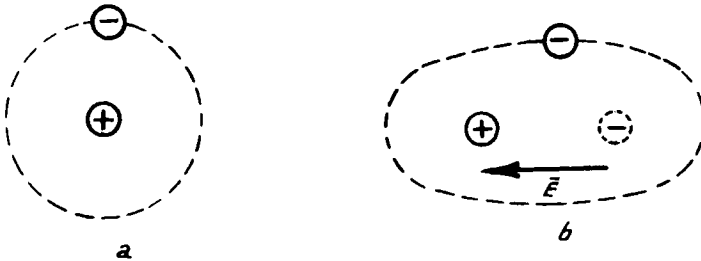


Fig. 2.22. Polarizarea dielectricilor nepolari.
a) molecula înainte de aplicarea câmpului electric
b) molecula după aplicarea câmpului electric.

este, deci, echivalentă cu un ansamblu de două sarcini electrice situate la distanță mică una de alta. Acest ansamblu se numește dipol electric.

În general, un dipol electric este format din două sarcini $+q$ și $-q$, egale și de semne contrare, situate în două puncte aflate la o distanță l una de alta (Fig. 2.23).

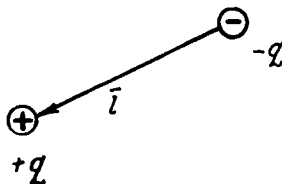


Fig. 2.23. Dipol electric

Se numește moment electric \vec{p} , al unui dipol electric, mărimea $\vec{p} = q\vec{l}$, unde vectorul \vec{l} este dirijat de la sarcina negativă la sarcina pozitivă și are mărimea egală cu distanța dintre aceste sarcini. Se poate arăta că suma tuturor momentelor dipolilor electrice dintr-un corp este egală cu momentul electric al celui corp.

Experimental se constată că momentul mecanic pe care-l notăm cu \vec{M} și care acționează asupra unui corp de probă dielectric, avînd momentul electric \vec{p} , plasat în cîmp de intensitate \vec{E} , are următoarea expresie:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (2.17)$$

Aici, momentul electric \vec{p} este o mărime de stare a unui mic corp de probă dielectric care caracterizează starea lui globală de polarizare.

Calculul cuplului care acționează asupra unui dipol electric va conduce la un rezultat identic.

Forța exercitată asupra sarcinii $+q$ este (Fig. 2.24):

$$\vec{F}_{e1} = +q \vec{E}$$

Iar forța exercitată asupra sarcinii $-q$ este:

$$\vec{F}_{e2} = -q \vec{E}'$$

Dacă $\vec{E} = \vec{E}'$ (cîmp uniform) cuplul este:

$$\vec{M} = \frac{\vec{l}}{2} \times \vec{F}_{e1} - \frac{\vec{l}}{2} \times \vec{F}_{e2} = \vec{l} \times q \vec{E} = (q \vec{l}) \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

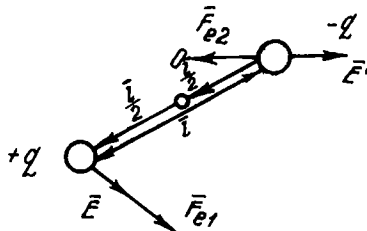


Fig. 2.24. Notății folosite în expresia cuplului care acționează asupra unui dipol electric.

Rezultă deci pentru \vec{M} aceeași expresie ca și în cazul unui mic corp polarizat electric. În concluzie, orice corp polarizat electric este echivalent cu un dipol electric sau cu o sumă de dipoli.

Revenind la problema polarizării dielectricilor nepolari, se poate arăta, teoretic, că deplasarea nucleului respectiv deformarea orbitei electronului sînt proporționale cu intensitatea cîmpului electric. Aceasta înseamnă că distanța \vec{l} dintre sarcinile fictive ale dipolului și momentul \vec{p} al acestuia sînt proporționale cu \vec{E} .

2.5.2. Dielectricii polari conțin molecule care nu sînt neutre din punctul de vedere al cîmpului electric produs, adică ele se comportă ca dipoli electrici chiar în lipsa unui cîmp electric exterior. Efectul lor global este însă nul deoarece moleculele sînt orientate întîmplător și astfel ele se neutralizează reciproc (Fig. 2.25 a).

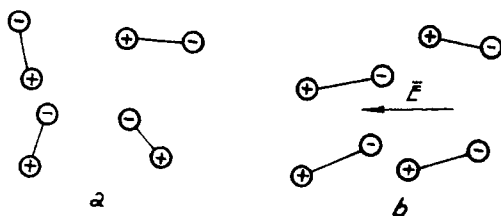


Fig. 2.25. Polarizarea dielectricilor polari:
a) dipoli în absența cîmpului electric;
b) dipoli după aplicarea cîmpului electric.

Dacă se aplică un cîmp electric, moleculele tind să se orienteze după direcția cîmpului (Fig. 2.25 b) astfel încît efectul lor global este echivalent cu acela al unor dipoli paraleli cu intensitatea cîmpului electric.

Cuplul electric exercitat asupra moleculelor este echilibrat de forțele de agitație termică ce tind să redea moleculelor pozițiile lor haotice anterioare: cu cît este mai intens cîmpul exterior, cu atît moleculele vor avea o orientare mai apropiată de direcția cîmpului, deci efectul lor global va fi

mai mare. Se poate arăta că polarizația este proporțională cu intensitatea câmpului.

Experimental, se constată că în anumite condiții, asupra corpurilor izolante neîncărcate cu sarcină electrică dar introduse într-un câmp electric, se exercită forțe și în plus apar și momente care tind să rotească corpul.

Aceste forțe și momente au alte proprietăți decât cele pe care le-am stabilit în condițiile de experimentare ale micului corp de probă și deci nu au legătură cu sarcina electrică. Astfel, se constată că asupra dielectricilor neîncărcați cu sarcină electrică acționează forțe care depind de orientarea corpului nu numai de așezarea lui în câmp. În consecință, proprietățile electrice ale dielectricilor nu sînt caracterizate pe deplin numai de sarcina electrică; este necesar să se utilizeze și o altă mărime pentru a descrie comportarea lor; această mărime este un vector și se numește moment electric.

Intr-o altă exprimare, se spune despre dielectricii la care momentul electric este diferit de zero că sînt polarizați. Fenomenul în urma căruia apar forțe și momente de altă natură decât forța datorită sarcinii electrice se numește polarizarea dielectricilor.

Polarizarea dielectricilor poate fi de două feluri: polarizare permanentă și polarizare temporară. Polarizarea permanentă este independentă de intensitatea câmpului electric pe cînd polarizarea temporară depinde de intensitatea câmpului electric în regiunea unde se află corpul; polarizarea temporară dispare cînd corpul este scos de sub acțiunea câmpului electric.

Practic toți dielectricii - solizi, lichizi sau gazoși - prezintă o polarizare temporară mai mult sau mai puțin accentuată. În schimb, numai la puțini dielectrici apare o polarizare permanentă. Uneori, polarizarea permanentă este condiționată de anumite acțiuni exterioare de natură neelectrică, de exemplu de deformări mecanice sau de încălzire. Polarizarea permanentă prin deformarea mecanică se numește polarizare piezoelectrică și apare la unele corpuri cristaline cum sînt cristalul de cuarț și sarea seignette.

Polarizarea prin încălzire se numește polarizare piroelectrică. O polarizare permanentă puternică se realizează la corpurile numite electreți, constituite din anumite materiale (rășini diferite, plexiglas etc.) care se supun în stare topită unui câmp electric intens, păstrîndu-și după solidificare starea de polarizare un timp îndelungat.

2.6. Intensitatea câmpului electric în interiorul corpurilor polarizate. Inducția electrică

Prin urmare, din cele prezentate, se înțelege că indiferent dacă moleculele dielectricului sînt neutre sau nu din punct de vedere electric, atunci cînd sînt introduse într-un câmp electric, acestea capătă prin inducție un moment electric.

Acest moment electric este proporțional cu câmpul electric și se situează pe direcția liniilor de câmp.

Să considerăm un câmp electric omogen și uniform de intensitate \vec{E}_v . Vom introduce dielectricul în acest câmp.

Efectul va fi polarizarea dielectricului - adică separarea sarcinilor pozitive de cel al centrului sarcinilor negative în cazul dielectricilor nepolari; la dielectricii polari va apare numai un efect de orientare al dipolilor electrici existenți în dielectric. Privit în ansamblu, dielectricul va rămîne neutru din punct de vedere electric. Totuși ia naștere un efect interesant: o suprafață a dielectricului se va încărca cu sarcină de un semn (Ex: pozitivă) iar suprafața opusă se va încărca cu sarcină de sens contrar (negativă) (Fig. 2.26).

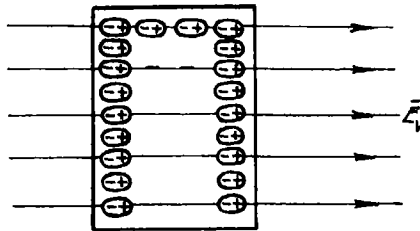


Fig. 2.26. Dielectric în câmp electric omogen și uniform \vec{E}_v .

În interiorul dielectricului, sarcinile electrice de polarizație se neutralizează reciproc și pe ansamblu, dielectricul este electric neutru (nu apar sarcini suplimentare). Deci, sarcina de suprafață indusă pozitivă, trebuie să fie egală în mărime absolută cu sarcina negativă indusă pe suprafața opusă.

Aceste sarcini superficiale vor genera un câmp electric în interiorul dielectricului \vec{E}' , care se va opune câmpului exterior \vec{E}_v (Fig. 2.27).

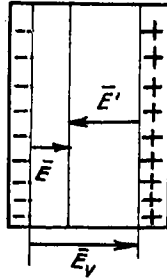


Fig. 2.27. Câmpul electric \vec{E}' în interiorul dielectricului.

Câmpul rezultat în dielectric \vec{E} este suma vectorială dintre câmpul exterior \vec{E}_v și câmpul electric creat de dielectric, \vec{E}' . Acest câmp rezultat are aceeași direcție cu \vec{E}_v dar este mai puțin intens.

Dacă un dielectric este așezat într-un câmp electric, sarcina indusă pe suprafețe va tinde să micșoreze intensitatea câmpului inițial.

Prin urmare, pentru caracterizarea câmpului electric într-un dielectric, nu mai este suficientă o singură mărime electrică ca în cazul câmpului electric în vid unde se folosea \vec{E}_v .

În acest caz se introduc noi mărimi după cum urmează:

Permitivitatea relativă a dielectricului, ca raport dintre intensitatea câmpului electric în vid \vec{E}_v și intensitatea câmpului rezultat în dielectric \vec{E} , notată cu ϵ_r :

$$\epsilon_r = \frac{\vec{E}_v}{\vec{E}} \quad (2.18)$$

Permitivitatea absolută a dielectricului ϵ :

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \text{ în care } \epsilon_0 = \text{permitivitatea vidului}$$

Inducția electrică în corp \vec{D} :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (2.19)$$

Pentru vid, $\epsilon_r = 1$, se obține:

$$\vec{D}_v = \epsilon_0 \vec{E}_v \quad (2.19 a)$$

2.6.1. Polarizarea electrică temporară caracterizează starea de polarizare a dielectricului. Este o mărime vectorială proporțională cu intensitatea câmpului electric generat de sarcinile superficiale de polarizație (Fig. 2.28) și are următoarea expresie vectorială:

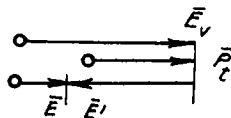


Fig. 2.28. Compunerea vectorilor:

$$\vec{E}_v, \vec{E}, \vec{E}' \text{ și } \vec{P}_t.$$

$$\vec{P}_t = - \epsilon_0 \vec{E}'$$

Dar
$$\vec{E}_v + \vec{E}' = \vec{E}$$

sau
$$- \vec{E}' = \vec{E}_v - \vec{E} ,$$

De unde:

$$\vec{P}_t = \epsilon_0 (\vec{E}_v - \vec{E}) .$$

Dar conform relației (2.18)
$$\vec{E}_v = \epsilon_r \vec{E}$$

Se obține:

$$\bar{P}_t = \epsilon_0 \epsilon_r \bar{E} - \epsilon_0 \bar{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \bar{E} = \epsilon_0 \chi_e \bar{E} \quad (2.20)$$

în care mărimea:

$$\chi_e = \epsilon_r - 1 \text{ se numește } \underline{\text{susceptivitate electrică.}}$$

Dacă dielectricul prezintă polarizație temporară \bar{P}_t și polarizație permanentă pe care o notăm cu \bar{P}_p , atunci polarizația dielectricului \bar{P} va fi:

$$\bar{P} = \bar{P}_p + \bar{P}_t.$$

Experimental se constată că între inducția \bar{D} , câmpul electric din interiorul dielectricului \bar{E} și polarizația \bar{P} există relația:

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \quad (2.21)$$

Din această expresie rezultă: determinarea stării de polarizare a unui dielectric se poate face complet numai cu ajutorul a două mărimi vectoriale: intensitatea câmpului electric \bar{E} și inducția electrică \bar{D} . Inducția electrică \bar{D} se mai numește și deplasare electrică.

Unitatea de măsură a inducției electrice \bar{D} , aceeași ca pentru polarizația \bar{P} , este coulomb pe metru pătrat (C/m^2).

2.7. Fluxul electric

Fluxul electric printr-o suprafață plană situată într-un câmp electric omogen (Fig. 2.29) este o mărime scalară, egală cu produsul dintre inducția electrică D și aria suprafeței A (liniile de câmp se consideră perpendiculare pe suprafață):

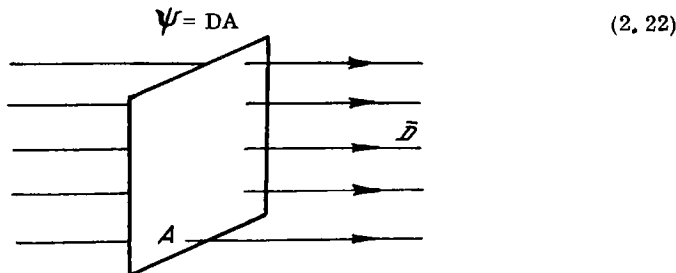


Fig. 2.29. Fluxul electric prin o suprafață plană.

Dacă suprafața este o sferă de rază R , iar în centrul sferei este plasată o sarcină punctuală q (Fig. 2.30), se observă că în fiecare punct al suprafeței intensitatea câmpului electric este

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

iar inducția electrică $D = \epsilon_0 E = \frac{q}{4\pi R^2}$,

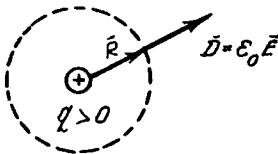
Se obține fluxul electric

$$\Psi = D \cdot A_{\text{Sferă}} = \frac{q}{4\pi R^2} \cdot 4\pi R^2 = q$$

sau $\Psi = q$, (2.23)

Se poate demonstra că această egalitate este valabilă în cazul oricărei suprafețe închise.

Relația (2.23) reprezintă legea fluxului electric și are următorul enunț: fluxul electric prin orice suprafață închisă este egal cu sarcina electrică din interiorul suprafeței, indiferent de forma suprafeței sau de repartizarea sarcinii în interiorul suprafeței.



2.30. Fluxul unei sarcini electrice punctuale.

2.8. Condensatoare electrice

Considerăm două conductoare 1 și 2 încărcate cu sarcinile electrice q_1 și q_2 care îndeplinesc următoarele condiții (Fig. 2.31): sînt izolate printr-un dielectric fără polarizație permanentă;

- sînt foarte depărtate de alte conductoare astfel încît toate liniile de cîmp care pleacă de pe unul din conductoare sosesc pe celălalt.

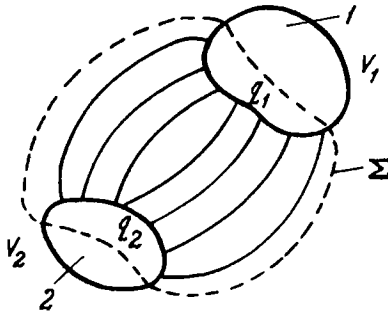


Fig. 2.31. Conductoarele 1 și 2 sînt încărcate cu q_1 și q_2

Considerăm o suprafață închisă Σ de o astfel de formă, încît în exteriorul conductoarelor să fie paralelă cu liniile de cîmp, să cuprindă pe toate și să treacă prin cele două conductoare.

Fluxul electric ψ_Σ prin suprafața închisă Σ este nul deoarece în interiorul conductoarelor nu avem cîmp electric, iar în exteriorul lor, liniile de cîmp sînt paralele cu suprafața.

Din legea fluxului electric se obține:

$$0 = q_\Sigma$$

sau: $0 = q_1 + q_2$, deoarece în interiorul suprafeței închise există sarcinile electrice q_1 și q_2 .

Rezultă :

$$+ q_1 = - q_2.$$

Sarcinile electrice de pe cele două armături ale unui condensator electric sînt egale și de semn contrar.

Se notează $|q_1| = |q_2| = q$.

2.8.1. Teorema capacității electrice.

Raportul pozitiv dintre sarcina electrică pozitivă și tensiunea dintre armături:

$$C = \frac{q}{U} \quad (2.24)$$

se numește capacitatea condensatorului. Este independentă de sarcină, de tensiune (pentru dielectric liniar) și depinde numai de geometria armăturilor și de permitivitatea dielectricului.

Unitatea de măsură pentru capacitatea electrică în SI este faradul (F):

$$1 \text{ farad} = \frac{1 \text{ coulomb}}{1 \text{ volt}} \quad \text{sau} \quad 1 \text{ F} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}}$$

2.8.2. Capacitatea condensatorului plan.

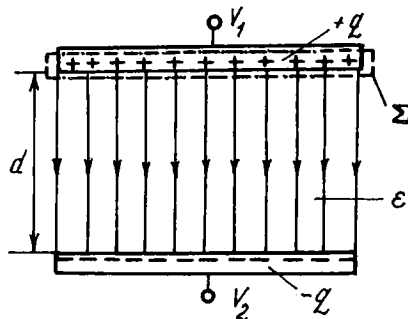


Fig. 2.32. Condensatorul plan.

Condensatorul plan este, format din două plăci conductoare, paralele, având un dielectric de permitivitate ϵ între plăci (Fig. 2.32).

Plăcile se află la distanța d .

Pentru calculul capacității se folosește formula (2.24).

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{q}{U_{12}}$$

în care q reprezintă sarcina electrică din interiorul suprafeței închise Σ . Din legea fluxului electric se obține:

$$DA = \mathcal{E} EA = q$$

Tensiunea electrică între cele două plăci, pentru câmp uniform și omogen, este: $U_{12} = E d$.

$$\text{Se obține: } C = \frac{\mathcal{E} EA}{Ed} \text{ respectiv } C = \frac{\mathcal{E} A}{d} . \quad (2.25)$$

La calculul capacității condensatorului plan s-a presupus că între armături, câmpul este uniform și omogen adică în oricare punct intensitatea câmpului electric este constantă și orientată în lungul liniilor de câmp.

Din expresia capacității condensatorului plan se determină unitatea de măsură pentru permitivitatea \mathcal{E} : farad pe metru (F/m).

În practică, dielectricul dintre cele două plăci este constituit din mai multe straturi diferite de permitivități; $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3 \dots \mathcal{E}_n$ (Fig. 2.33).

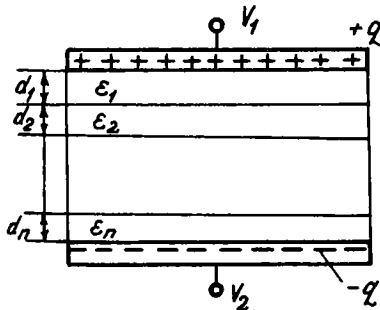


Fig. 2.33. Condensator plan cu n straturi.

Calculul capacității condensatorului cu mai multe straturi de dielectric se realizează tot cu ajutorul relației:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{q}{U_{12}} .$$

Se obține:

$$C = \frac{A}{\sum_{k=1}^n \frac{d_k}{\mathcal{E}_k}} \quad (2.26)$$

2.8.3. Capacități echivalente Condensatoare legate în serie și condensatoare legate în paralel

Se consideră condensatoare legate între ele în cele mai diferite moduri avînd două borne de acces: A și B (Fig. 2.34).

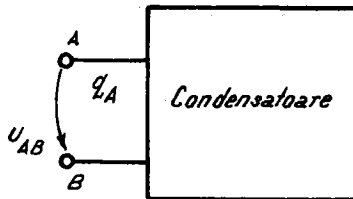


Fig. 2.34. Condensatoare cu două borne de acces.

Dacă între A și B se aplică tensiunea U_{AB} , atunci pe armăturile condensatoarelor legate la capătul A, se va afla sarcina electrică q_A .

Se definește capacitatea echivalentă între A și B, raportul:

$$C_{eAB} = \frac{q_A}{U_{AB}} \quad (2.27)$$

Se va folosi această definiție la determinarea capacității echivalente a unui grup de condensatoare legate în serie și apoi în paralel.

Legarea în serie a condensatoarelor. Se consideră n condensatoare legate în serie fără sarcină electrică inițială și avînd aplicată tensiunea U_{AB} la bornele A și B (Fig. 2.35).

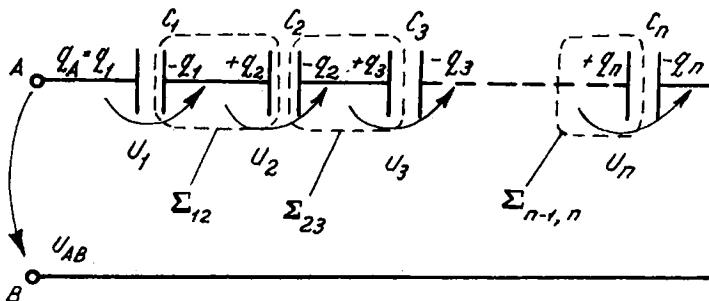


Fig. 2.35. Condensatoare legate în serie.

În raport cu bornele A și B, interesează capacitatea echivalentă C_{eAB} .

Pentru că sarcina electrică inițială s-a considerat nulă, rezultă că în interiorul suprafeței Σ_{12} , se poate scrie:

$$-q_1 + q_2 = 0$$

La fel se scrie și pentru suprafața închisă Σ_{23} :

$$-q_2 + q_3 = 0$$

Pentru $\Sigma_{n-1,n}$:

$$-q_{n-1} + q_n = 0$$

Rezultă:

$$q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q_n = q_A = q$$

La legarea în serie, sarcinile de pe armăturile condensatoarelor sînt egale.

Aplicînd teorema potențialului electrostatic (2.6 bis) se scrie:

$$U = U_{AB} = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

La legarea în serie, tensiunea aplicată este egală cu suma tensiunilor de la bornele condensatoarelor.

Capacitatea echivalentă va fi:

$$C_{eAB} = \frac{q_A}{U_{AB}} = \frac{q}{U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n}$$

sau:

$$C_{eAB} = \frac{q}{\frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} + \dots + \frac{q}{C_n}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}}$$

Rezultă:

$$\frac{1}{C_{eAB}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (2.28)$$

Valoarea inversă a capacității echivalente este egală cu suma valorilor inverse ale capacităților condensatoarelor legate în serie.

Legarea în paralel a condensatoarelor. Considerăm condensatoarele

C_1, C_2, \dots, C_n legate în paralel fără sarcină electrică inițială (Fig. 2.36).

La bornele AB este aplicată tensiunea $U_{AB} = U$.

Care va fi capacitatea echivalentă C_{eAB} ?

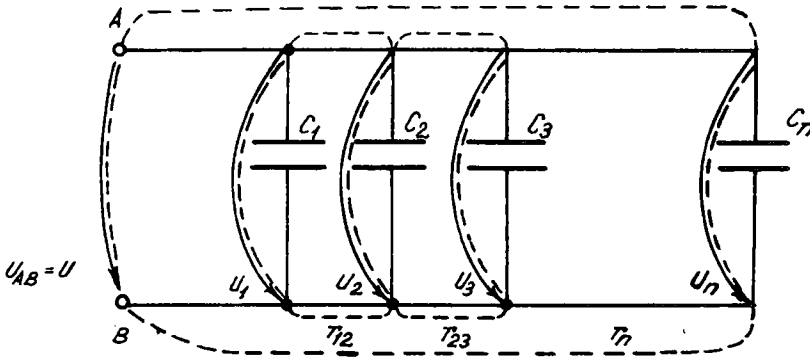


Fig. 2.36. Condensatoare legate în paralel.

Aplicînd teorema potențialului electrostatic pe conturul Γ_{12} , se obține:

$$U_1 - U_2 = 0$$

idem pentru conturul Γ_{23} :

$$U_2 - U_3 = 0$$

iar pentru conturul Γ_n :

$$U_n - U_{AB} = 0$$

Rezultă: $U_1 = U_2 = U_3 = \dots = U_n = U_{AB} = U$.

Sarcina electrică q_A se repartizează pe armăturile condensatoarelor:

$$C_1, C_2, C_3, \dots, C_n.$$

Se obține:

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = q_A = q$$

Capacitatea echivalentă între bornele A și B va fi:

$$C_{eAB} = \frac{q_A}{U_{AB}} = \frac{q_1 + q_2 + \dots + q_n}{U} = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2 + \dots + C_n U_n}{U}$$

Se obține în final simplificând cu U;

$$C_{eAB} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n \quad (2.29)$$

CAPITOLUL 3

ELECTROCINETICA

3.1. Starea electrocINETICĂ. Intensitatea curentului de conducție.

Mișcarea sarcinilor electrice (purttătorilor de sarcină) generează fenomene care pot avea aplicații practice utile.

ElectrocINETICA - după cum arată denumirea - reprezintă partea din Electrotehnică ce se ocupă cu studiul mișcării acestor purttători de sarcină, cauza care pune în mișcare acești purttători și efectele mișcării lor.

În electrostatică, sarcinile electrice nu se deplasau, nu s-a constatat schimb de energie cu exteriorul; singurul efect stabilit a fost apariția unui câmp electric.

Starea electrocINETICĂ se poate pune în evidență pe baza unei experiențe. În acest sens, două corpuri conductoare A și B încărcate cu sarcini electrice și aflate la potențiale V_A respectiv V_B sînt legate printr-un fir conductor, legătură denumită galvanică (Fig. 3.1).

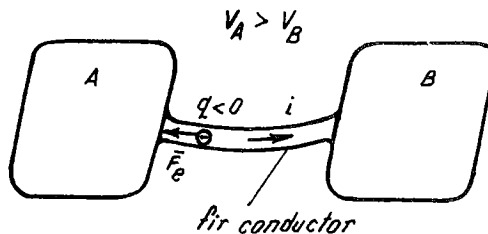


Fig. 3.1. Legarea a două conductoare A și B printr-un fir conductor.

Se constată că firul de legătură se încălzește, fenomen ce apare ca urmare a deplasării purttătorilor de sarcină electrică. Starea în care se află firul conductor se numește stare electrocINETICĂ.

Deplasarea purttătorilor de sarcină electrică încetează atunci cînd cele două potențiale au devenit egale $V_A = V_B$, conductoarele A și B ajungînd într-o stare electrostatică diferită de starea electrostatică inițială.

Sarcinile electrice care se deplasează în unitatea de timp prin firul conductor reprezintă intensitatea curentului electric sau prescurtat curent electric (mărime electrică fundamentală). Se notează cu i , I , I . Curentul electric există atît timp cît $V_A \neq V_B$. Cînd potenţialele celor două corpuri s-au egalizat, curentul electric devine zero. Microscopic, curentul electric se explică prin trecerea electronilor de la corpul cu potenţial mai scăzut V_B la corpul cu potenţial mai ridicat V_A sub acţiunea forţelor de natură electrică \vec{F}_e determinate de existenţa cîmpului electric. Odată cu egalizarea potenţialelor, cîmpul electric în conductoare devine nul, situaţie în care nu mai există curent electric.

Sensul curentului electric în metale-corpurile A şi B sînt considerate metalice - se adoptă în sens invers mişcării electronilor.

Adoptarea acestui sens în cazul metalelor considerate conductoare de specia întâi s-a făcut pentru a exista o concordanţă cu sensul curentului în electroliţi - consideraţi conductoare de specia a doua. În cazul electroliţilor (aflîndu-se în mişcare purtători de sarcină pozitivă - ioni pozitivi - şi purtători de sarcină negativă - ioni negativi -) s-a adoptat sensul curentului de la potenţialul mai ridicat la potenţialul mai scăzut adică sensul ionilor pozitivi; deci sens contrar purtătorilor de sarcină negativi.

În continuare, se va defini unitatea de măsură pentru această mărime electrică - intensitatea curentului electric. În Sistemul Internaţional SI s-a adoptat ca unitate de măsură amperul care este dată de raportul:

$$1 \text{ amper} = \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ secundă}} ; \quad 1 \text{ A} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ s}} ;$$

şi reprezintă sarcina electrică de un coulomb care traversează într-o secundă secţiunea din conductor considerată.

Se mai folosesc multiplii şi submultiplii: kiloamperul (kA) miliamperul (mA) microamperul (μA).

Dacă intensitatea curentului electric nu variază în timp, se consideră că mărimea este staţionară şi se numeşte curent continuu. Cînd mărimea variază în timp se spune că este nestaţionară şi curentul este variabil.

În aplicațiile practice curentul variabil des întâlnit este curentul alternativ sinusoidal. Studiul acestor curenți se va prezenta ulterior.

Curentul electric nu are ca efect numai încălzirea conductoarelor parcurse. Experimental s-au constatat și alte efecte; efectul chimic determinat cu ajutorul unui aparat denumit Voltmetru, efectul luminos observat în becurile cu incandescență sau efectul mecanic din motoarele electrice. Toate aceste efecte au astăzi largi aplicații în practică.

3.2. Densitatea curentului electric de conducție

Curentul electric definit anterior nu caracterizează suficient starea electrocinetică a corpurilor. Pentru aplicațiile practice și determinarea unor relații matematice între mărimile electrice se introduce o mărime derivată, densitatea curentului electric de conducție. Se definește ca reprezentând curentul care se distribuie pe unitatea de suprafață a secțiunii conductorului.

În cazul unui conductor filiform parcurs de curent electric de conducție, repartizat uniform pe secțiunea A , densitatea de curent de conducție notată cu J se reprezintă ca o mărime vectorială \vec{J} conform cu Fig. 3.2.

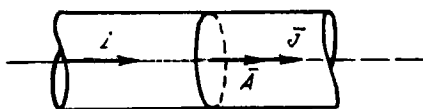


Fig. 3.2. Densitatea de curent de conducție \vec{J} .

Se poate scrie relația:

$$i = \vec{J} \cdot \vec{A} \quad (3.1)$$

În care \vec{A} reprezintă vectorul de mărime egal cu suprafața A și orientare conform figurii. \vec{J} este vectorul densitate de curent de conducție.

Produsul scalar al acestor vectori omoparaleli se scrie:

$$i = J A \cos 0^\circ = J A \quad (3.1a)$$

Rezultă că densitatea de curent de conducție $J = \frac{i}{A}$ (3.1b) este raportul dintre curentul care străbate o secțiune dată și suprafața acestei secțiuni.

În Sistemul Internațional SI unitatea de măsură pentru densitatea de curent este A/m^2 . Din motive practice se folosește o altă unitate de măsură, A/mm^2 .

$$\text{Avem: } \frac{1 \text{ A}}{mm^2} = 1 \frac{A}{10^{-6} m^2} = 10^6 \frac{A}{m^2}$$

În conductoarele de cupru utilizate în construcția de mașini și aparate electrice, densitatea de curent permisă, pentru a avea o încălzire admisibilă a conductoarelor și izolației, este de 3 - 4 A/mm^2 dar pentru secțiuni mici sau conductoare neizolate, densitatea de curent capătă valori mai ridicate.

În tabelul 3.1. sînt redată valorile densității admisibile de curent pentru diferite conductoare standardizate, izolate sau neizolate, ale cuprului.

Tabelul 3.1

S (mm^2)	Conductor cupru izolat J (A/mm^2)	Conductor cupru neizolat	
		Încăperi închise J (A/mm^2)	În aer J (A/mm^2)
4	9	14,2	14,5
6	7,7	12,2	12,6
10	6,8	10,3	10,8
16	5,7	8,1	9,4
25	4,9	6,6	8,2
35	4,3	6,0	7,7
50	3,8	5,3	6,7
70	3,5	4,8	6,1
95	3,1	4,3	5,4

3.3. Natura fizică a curentului electric de conducție

Curentul electric de conducție reprezintă deplasarea ordonată a microparticulelor libere încărcate cu sarcină electrică - purtătorii de sarcină electrică.

În cazul metalelor, aceste microparticule sînt electronii de conducție, în cazul electroliților sînt ionii încărcăți cu sarcină pozitivă sau negativă. În lipsa mișcării ordonate, microparticulele sînt în stare permanentă de agitație termică. Viteza medie în mișcarea de agitație termică este ridicată și depinde de temperatură. Astfel, cînd temperatura este de 20°C , viteza medie a microparticulelor este de 10^5 m/s. Viteza în mișcarea ordonată, care este provocată de forțele de natură electrică, este mult mai mică și egală cu 10^{-4} m/s.

În deplasarea microparticulelor și apariția curentului de conducție, esențială este mișcarea ordonată, efectul mișcării de agitație termică este nul ca urmare a caracterului dezordonat al acestei mișcări.

Sensul vitezei microparticulei coincide cu sensul cîmpului electric cînd sarcina acesteia este pozitivă. Cînd sarcina este negativă, deplasarea se face în sens contrar cîmpului electric. Dacă viteza medie de deplasare a microparticulelor nu depinde de timp, conductorul se află în stare electrocinetică staționară și curentul de conducție se numește curent continuu (c.c.). Dacă viteza medie de deplasare este o funcție de timp, starea electrocinetică a conductorului este nestaționară, și curentul de conducție este curent variabil.

Degajarea de căldură în conductoarele parcurse de curent de conducție se explică la scară microscopică prin ciocnirile care se produc la deplasarea particulelor încărcate cu sarcină în interiorul corpurilor. La fiecare ciocnire, microparticula pierde din energia sa de mișcare - energie cinetică - care se transformă în energie calorică. Pentru reaccelerare, microparticula trebuie să primească energie din exterior prin intermediul cîmpului electric aplicat conductorului.

3.4. Curentul electric în semiconductoare

Pentru a explica procesul de conducție a curentului în semiconductoare este necesară prezentarea pe scurt a teoriei cu privire la structura materiei. Atomul se compune dintr-un nucleu și electroni care în stare de echilibru se găsesc pe anumite niveluri energetice "permise".

Pe același nivel energetic există un singur electron iar electronul mai îndepărtat de nucleu are o energie mai mare. În Fig.3.3 sînt reprezentate nivelurile energetice pentru metale, semiconductoare și izolatoare. Electronii trec de pe un nivel energetic pe un alt nivel energetic, caz în care emit sau primesc energie.

Nivelele energetice se pot grupa formînd zona de valență și zona de conducție. În cazul metalelor aceste două zone se întrepătrund dar în cazul semiconductoarelor și izolatoarelor, între aceste zone, există o zonă interzisă care în cazul semiconductoarelor este mai îngustă ca în cazul izolatoarelor. Pentru ca electronii să depășească această zonă interzisă trebuie să primească energii foarte mari din exterior.

Electronii din zona de conducție formează gazul electronic. Aceștia se mai numesc electroni liberi sau electroni de conducție.

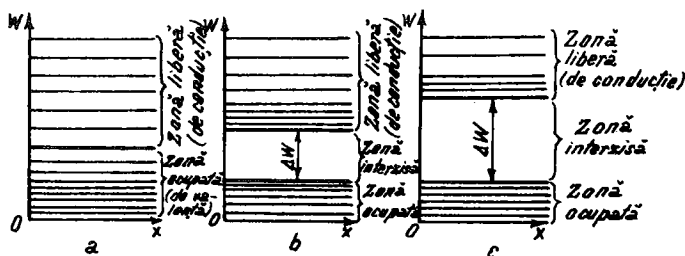


Fig. 3.3. Nivele energetice

a - metal

b - semiconductor

c - izolator

În semiconductoare și izolanți, la temperaturi joase, toți electronii aparțin nucleului fiind plasați în zona de valență. Neexistînd electroni în zona de conducție, nu vom avea electroni de conducție, deci nu va exista curent de conducție. Dacă se ridică temperatura, atunci electronii vor căpăta energie suficient de mare pentru a trece din zona de valență în zona de conducție. În urma trecerii electronului pe alt nivel de energie, în locul acestuia va rămîne un gol echivalent cu sarcina electrică pozitivă. Golul respectiv poate fi

ocupat de un alt electron din rețeaua cristalină ceea ce reprezintă apariția unui alt gol. Se ajunge în final, dacă se aplică o diferență de potențial respectiv un câmp electric, la o mișcare ordonată a electronilor din semiconductor, respectiv a golurilor în sens contrar. Deci, în cazul semiconductoarelor, spre deosebire de metale, curentul electric este reprezentat de mișcarea electronilor din zona liberă și de mișcarea golurilor din zona de valență. Deci, în cazul semiconductoarelor, conductivitatea este mixtă: prin electroni respectiv prin goluri.

Cînd semiconductorul este chimic pur cum este de exemplu carbonul, siliciul, staniul, plumbul și compușii lor, numărul electronilor liberi este egal cu numărul golurilor din zona de valență. Aceste elemente sînt tetravalente, adică posedă patru electroni de valență. Conductivitatea este intrinsecă.

În urma unor experiențe s-a constatat că se poate schimba foarte mult conductivitatea electrică a semiconductorului dacă i se adaugă impurități dintr-un element pentavalent sau trivalent. Consecința este că în zona interzisă apar nivele energetice pe care se plasează electronii de valență ai atomului de impuritate. În acest fel, zona interzisă se îngustează și mai mult ceea ce determină ca trecerea electronilor în zona de conducție să se realizeze cu o cantitate mică de energie primită din exterior. Cînd semiconductorul - de exemplu germaniu, element tetravalent - primește ca impuritate un element pentavalent ca arseniu, stibiu, bismut etc., rezultă un electron în exces.

Ca exemplu, vom considera că semiconductorul pur este germaniu iar ca impuritate se folosește elementul pentavalent-arseniu (Sb). Patru electroni de valență ai atomilor pentavalenți vor fi atrași de atomii de germaniu (Fig. 3.4 a).

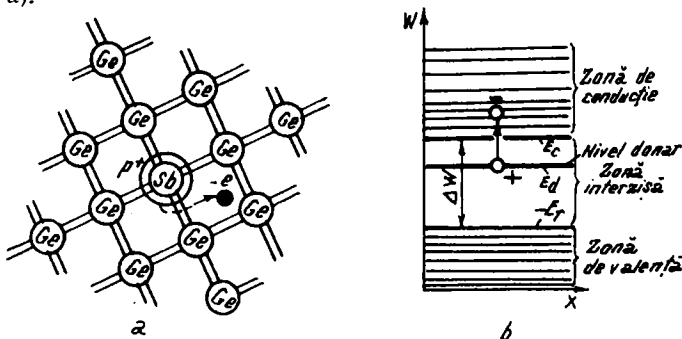


Fig. 3.4 Conductivitatea electrică a semiconductoarelor dotate cu impurități donoare.
a) reprezentarea schematică a legăturii b) diagrama nivelelor energetice.

Cel de al cincilea electron va fi atras numai de un nucleu, deci va avea o legătură mai slabă, motiv pentru care chiar la temperatura mediului ambiant acest electron poate deveni un electron de conducție.

Fiindcă aceste impurități sînt din punct de vedere chimic pentavalente, vor oferi în rețeaua semiconductorului electroni de conducție. Acestea se numesc impurități donoare iar semiconductorul este un semiconductor de tip n. Conducția la semiconductorul de tip n se realizează de electronii de conducție.

Se constată existența unei conductivități electrice și în cazul în care impuritatea adăugată semiconductorului germaniu este un element trivalent din punct de vedere chimic (iridiu, bor, aluminiu). Considerăm că elementul de impurificare este de exemplu iridiu. Atomii de iridiu vor avea numai trei legături realizate cu atomii vecini ai semiconductorului germaniu, o legătură a semiconductorului va rămîne nesatisfăcută. Chiar la temperatura ambiantă, un electron dintr-o altă legătură poate completa legătura nesatisfăcută. În locul electronului va rămîne un gol. iar atomul de impuritate care a primit electronul va deveni negativ din punct de vedere electric, adică va fi ion negativ.

Impuritățile se numesc acceptoare iar semiconductorul cu astfel de impurități se numește semiconductor de tip p. Conducția electrică se realizează în cazul acesta prin goluri. Si la semiconductoarele impurificate cu elemente trivalente apar nivele energetice în zonă interzisă a atomilor de impurități, aceste nivele sînt însă mai apropiate de zona de valență. În acest caz, energia necesară ca un electron să treacă din zona de valență pe nivelul energetic din zona interzisă, denumit și nivel acceptor, este mică.

Electronii care trec pe nivelele acceptoare lasă în urma lor goluri care participă la conducția electrică. Electronii de pe nivelele acceptoare nu pot participa la conducția curentului electric deoarece sînt legați de atomii acceptori.

Aplicînd în mod corespunzător o diferență de potențial în interiorul semiconductorului de tip n sau de tip p, apare un cîmp electric și semiconductorul este străbătut de curent datorită mișcării ordonate a purtătorilor mobili de sarcini electrice reprezentați de electroni sau goluri.

Asamblarea unui semiconductor compus din două regiuni, o regiune de tip p, alta de tip n, dă naștere unei joncțiuni de tip pn sau unei diode semiconductoră. Dacă avem două joncțiuni p n p sau n p n, se obține dispozitivul electronic - tranzistor iar dacă joncțiunile sînt p n p n, dispozitivul semiconductor se numește tiristor. Funcționarea acestor dispozitive semiconductoră este prezentată pe larg în lucrări de specialitate corespunzătoare.

3.5. Curentul electric în vid

Dacă într-un tub de sticlă se realizează o presiune foarte scăzută, se constată că între două piese metalice (electrozi), denumite catod respectiv anod, supuse la o diferență de potențial $U_A = V_A - V_K$, apare o deplasare de purtători de sarcină electrică (electroni) de la catod la anod adică un curent electric (Fig. 3.5). Potențialul anodului V_A trebuie să fie mai ridicat față de potențialul catodului pe care-l notăm cu V_K , adică: $V_A > V_K$.

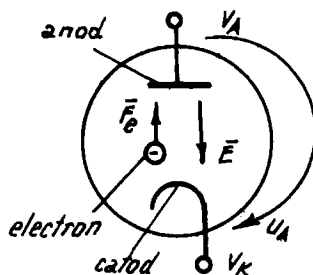


Fig. 3.5. Deplasarea purtătorilor de sarcină - electroni - în vid.

Eliberarea electronilor de către catod constituie emisiunea electronică și se explică în modul următor: electronii din metal datorită agitației termice se îndepărtează de nucleele pozitive care aparțin rețelei cristaline a metalului. Electronii nu se îndepărtează așa de mult din cauza câmpului electric care se naște și este orientat spre exteriorul metalului de la microparticulele pozitive, legate în rețeaua cristalină, spre microparticulele negative-electroni - care s-au deplasat în exteriorul metalului.

Electronii din exteriorul metalului formează gazul electronic și în regiunea metal - gaz electronic potențialul variază brusc. Dacă se notează cu V_i - potențialul cel mai ridicat, caracteristic rețelei cristaline și V_e - potențialul cel mai scăzut de la limita exterioară a gazului electronic ($V_i > V_e$), atunci se poate defini lucrul mecanic necesar extragerii electronului din metal:

$$L_e = q (V_i - V_e) = q U_e \quad \text{în}$$

care q – sarcina electrică a electronului; $V_i - V_e = U_e$ – diferența de potențial sau bariera de potențial.

Lucrul mecanic pe care electronul trebuie să-l primească din exterior pentru a părăsi catodul este necesar mai mic decât L_e pentru faptul că electronul are o energie proprie de mișcare din cauza agitației termice.

Acest lucru mecanic primit din exterior poartă denumirea de lucru mecanic de ieșire. Depinde de natura elementului din care este confecționat catodul și se măsoară în electron - volt. " (eV) ".

(Ex. 4.54 eV la Wolfram; 2.51 eV la bariu; 1,43 eV la cesiu).

După felul cum se obține lucrul mecanic de ieșire, emisiunea electronică se grupează astfel:

- emisiune termoelectronică, cînd catodul este încălzit.
- emisiune fotoelectronică, cînd suprafața catodului este luminată;
- emisiune electronică secundară, cînd suprafața catodului este

"bombardată" din exterior cu electroni sau ioni;

- emisiune autoelectronică, cînd suprafața catodului este supusă unui câmp electric exterior de intensitate ridicată.

În cazul curentului electric din vid nu mai este valabilă legea pe care o vom prezenta ulterior – legea lui Ohm – fiindcă această lege conține în expresia ei o constantă de material care în cazul vidului nu are sens. Din acest motiv, curentul electric din vidul creat în interiorul tubului de sticlă i_A se exprimă în funcție de diferența potențialelor $V_A - V_K = U_A$ – care se numește tensiune anodică:

$$i_A = G U_A^{3/2} \quad (3.2)$$

În care G este o constantă caracteristică tubului electronic. Această expresie se mai numește „teorema exponentului $3/2$ ”.

3.6. Curentul electric în gaze

Aplicațiile practice ale curentului electric în gaze, ca: tuburi termoionice (gazotroane, tiratroane), tuburi luminoase (lămpi cu vapori de mercur, aparate cu arc electric), au determinat cunoașterea mai profundă a conductivității electrice a gazelor.

În cazul unui tub umplut cu gaz sau vapori metalici la o presiune scăzută, atomii de gaz sînt neutri din punct de vedere electric. Sub influența razelor cosmice, a radiațiilor radioactive emanate de pămînt, apar purtători de sarcină electrică: ioni pozitivi sau negativi, electroni. Microparticulele vor avea o mișcare ordonată cînd între cei doi electrozi plasați în tub se aplică o diferență de potențial. În timpul deplasării, au loc ciocniri între microparticule, în urma lor, producîndu-se excitarea atomilor de gaz sau ionizarea lor. Numai în urma ionizării atomilor se nasc purtători de sarcină electrică iar la aplicarea unui cîmp electric în gaz, purtătorii să formeze curentul electric. Pentru a studia variația curentului electric în gaze, în dependență de tensiunea aplicată celor doi electrozi, se prezintă în Fig.3.6..... caracteristica tensiune - curent.

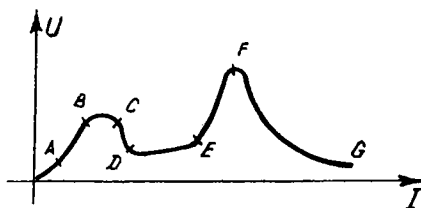


Fig. 3.6. Caracteristica tensiune - curent
a tubului cu gaz.

Porțiunea OA. Pentru această porțiune, curentul electric depinde de tensiunea electrică conform legii conducției electrice (legea lui Ohm).

Curentul electric are valori foarte mici (10^{-18} A) și este compus numai din electronii și ionii pozitivi rezultați în urma ionizării naturale.

Porțiunea A B. Este porțiunea în care se manifestă o saturație de curent. În tub apare o sarcină spațială sau de volum care împiedică creșterea intensității curentului. Apare și emisiunea secundară.

Porțiunea BC. Electronii din tub rezultați în urma ionizării, împreună cu electronii rezultați în urma emisiunii secundare, primesc din partea câmpului electric, majorat ca urmare a creșterii tensiunii aplicate electrozilor, o energie cinetică suficientă pentru a provoca, în urma ciocnirilor, ionizarea atomilor de gaz. Apare așa numita avalanșă electronică care face să crească și mai mult curentul. În punctul C, tensiunea se numește tensiune de aprindere; apare în tub descărcarea luminiscentă.

Porțiunea CD. Descărcarea luminiscentă se păstrează chiar și pentru tensiuni inferioare punctului C aplicată între electrozi.

Porțiunea DE. Descărcarea luminiscentă se păstrează iar tensiunea se menține constantă. În aceasta porțiune se află punctul de funcționare al tuburilor luminiscente cu catod rece.

Porțiunea EF. Apare o emisiune termoelectronică puternică, consecință a bombardării catodului de către ionii pozitivi accelerați și mai mult de câmpul electric determinat de tensiunea crescută.

Porțiunea FG. Corespunde descărcării în arc electric; apare o emisiune foarte mare de electroni primari, pe catod își face apariția pata catodică iar coloana de gaz se ionizează termic și mai puternic.

Starea aceasta de ionizare intensă a gazului a căpătat denumirea de plasmă care, după părerea oamenilor de știință, reprezintă a patra stare de agregare a materiei. Conductivitatea electrică a plasmei se aseamănă cu cea a metalelor care, din cauza vitezei mari căpătate de electroni, ionii apar ca o rețea oarecum fixă față de electroni din cauza mobilității reduse a ionilor. Se aseamănă și cu un electrolit (după cum vom vedea în continuare) deoarece, la formarea curentului electric, participă și ionii rezultați în urma ionizării gazului.

3. 7. Curentul electric în electroliți

În cazul metalelor - considerate conductoare de specie întâi - curentul electric este format din electroni liberi care se deplasează, ordonat "sub influența câmpului electric. Există o altă categorie de conductoare, conductoare de specie a doua, denumite electroliți, la care curentul electric se compune din

ioni pozitivi sau negativi care se mișcă ordonat sub influența unui câmp electric. Electrolițul este o soluție formată dintr-un acid, sare sau bază în apă.

Curentul nu apare în componentele soluției luate separat cum ar fi de exemplu în acid clorhidric pur sau în apă pură. Dacă se amestecă însă acești doi constituenți, atunci are loc un fenomen denumit disociație electroli-tică, adică moleculele substanței dizolvate în apă se descompun în ioni pozitivi și ioni negativi.

Un exemplu poate fi soluția de sare de bucătărie în apă. În urma disocierii electrolitice, majoritatea moleculelor de sare de bucătărie NaCl se disociază în ioni de sodiu și clor:



Dacă se introduc în vasul cu soluție de sare de bucătărie doi electrozi cărora li se aplică o diferență de potențial, atunci sub influența forțelor de natură electrică, ionii rezultați în urma disocierii se pun în mișcare formînd curentul electric (Fig. 3.7). Curentul electric în electroliți este un curent ionic spre deosebire de curentul electric din metale care este un curent

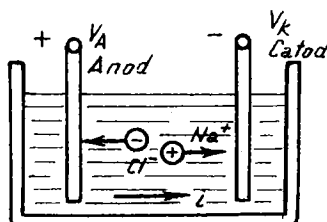


Fig. 3.7. Deplasarea ionilor și sensul curentului în electrolit.

electric. Microparticulele din electroliți fiind cu sarcină electrică pozitivă respectiv negativă se vor deplasa în ambele sensuri. Electrocul pozitiv la care sosesc ionii negativi se numește anod iar electrocul negativ la care vin

ionii pozitivi se numește catod. Ionii pozitivi circulă în sensul curentului iar ionii negativi în sens contrar.

Conductivitatea electrică a electrolitului depinde de concentrația soluției. De asemenea, conductivitatea este influențată de temperatură. La creșterea temperaturii, crescând disocierea electrolitică, conductivitatea electrică a electrolitului crește.

Fiindcă în electroliți curentul este realizat din ioni, va avea loc un transport de substanță. Din această cauză, pe suprafața electrozilor va fi depunere de substanță. De exemplu, în cazul unei soluții de azotat de argint, pe catod, se depune argint.

Electroliza are aplicații industriale importante ca exemplu: rafinarea metalelor, prepararea metalelor din săruri, metalizarea.

Rafinarea metalelor constă în purificarea lor prin electroliză. Dacă într-o instalație de electroliză se folosește ca electrolit o soluție de sulfat de cupru amestecat cu acid sulfuric, atunci la catod se depune cuprul pur care se mai numește și cupru electrolitic.

Prepararea metalelor din sărurile lor. Un exemplu tipic este electroliza aluminiului. Electrolitul în acest caz este constituit din fluorură dublă de aluminiu și sodiu topită, electrozii fiind formați din plăci de cărbune. Sarea se menține în stare topită ca urmare a efectului termic al curentului care se deplasează în interiorul electrolitului. Această tehnologie de preparare a aluminiului prin fenomenul de electroliză se folosește în țara noastră la Combinatul de Aluminiu Chimic Slatina.

Metalizarea anticorozivă a suprafețelor metalice care nu rezistă la coroziune se realizează tot printr-un procedeu de electroliză, cunoscut și sub numele de galvanizare (Ca exemplu: cadmierea, nichelarea, cromarea etc.).

3.8. Cîmpuri electrice imprimate

Considerăm un conductor în formă de disc (Fig. 3.8). Electronii liberi ai metalului care compun gazul electronic sînt într-o continuă agitație termică dezordonată a căror rezultantă este zero. Din punct de vedere electric, cu toate că aceste microparticule sînt purtătoare de sarcină electrică, cîmpul electric rezultat este zero (Fig. 3.8.a):

$$\vec{E} = 0$$

(3.4)

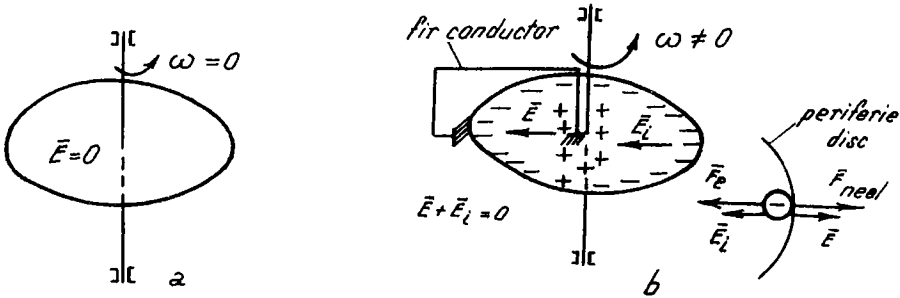


Fig. 3.8. Disc conductor. a) nemișcat. b) rotit.

Dacă se imprimă o mișcare de rotație cu viteza unghiulară ω , electronii liberi vor fi supuși unei forțe de natură neelectrică, forța centrifugă. Aceasta determină îndepărtarea spre periferia discului a microparticulelor.

Simultan se va naște un câmp de natură electrică și implicit o forță electrică care se opune forței centrifuge.

Pentru că forța electrică apare din cauza câmpului electric, se poate imagina un câmp corespondent forței neelectrice - în cazul acesta forța centrifugă - care este un câmp fictiv și care se numește câmp electric imprimat, notat cu \vec{E}_i .

Purtătorii de sarcină vor ajunge la starea de echilibru atunci când cele două câmpuri, câmpul electric și câmpul electric imprimat vor fi egale și de sens contrar.

Vectorial se scrie astfel:

$$\vec{E} + \vec{E}_i = 0 \quad (3.5)$$

Pentru ca purtătorii de sarcină să fie în mișcare, este necesar ca rezultanta forței electrice și forței neelectrice să fie diferită de zero. Implicit, rezultanta celor două câmpuri va fi diferită de zero.

Se poate scrie astfel:

$$\vec{E} + \vec{E}_i \neq 0 \quad (3.6)$$

Pentru același disc aflat în rotație, se realizează o legătură printr-un fir conductor între periferia discului și centrul său (Fig. 3.8.b).

Din cauza câmpului electric \vec{E} care se va transmite și prin firul de legătură, purtătorii de sarcină vor reveni în centrul discului pentru a fi din nou accelerați spre periferie apărând astfel o mișcare a microparticulelor în circuit închis. În acest circuit închis a apărut curentul electric de conducție.

Pentru că mișcarea purtătorilor de sarcină nu variază în timp, curentul de conducție este un curent staționar sau cum s-a arătat în paragrafele anterioare, este un curent continuu.

În interiorul discului există două câmpuri: câmpul electric și câmpul electric imprimat. În exterior, deci și în firul conductor, este prezent numai câmpul electric.

Câmpul electric imprimat nu este generat numai prin accelerarea microparticulelor. Sînt și alte condiții fizice care determină separarea sarcinilor electrice în conductoare. Din punct de vedere al condițiilor fizice, câmpurile electrice imprimate se clasifică în:

- câmpuri imprimate de volum și de contact.

Câmpurile imprimate de volum se grupează la rîndul lor în:

- câmpuri imprimate de accelerație;
- câmpuri imprimate termice;
- câmpuri imprimate de concentrație.

Câmpurile imprimate de contact se împart în:

- câmpuri imprimate **voltaice**;
- câmpuri imprimate termice;
- câmpuri imprimate galvanice.

3.8.1. Câmpuri electrice imprimate de accelerație

Experiența prezentată mai sus, cu discul rotitor, pune în evidență câmpul electric imprimat de accelerație. Câmpul imprimat are o simetrie radială și este orientat de la periferie spre centru.

3.8.2. Cîmpuri electrice imprimate de natură termică

Intr-o bară metalică, încălzită la o extremitate, sub influența diferenței de temperatură, purtătorii de sarcină electrică se vor aglomera în regiunea în care temperatura este mai mică.

Apare un cîmp electric imprimat \vec{E}_i , dirijat de la capătul cu temperatură mai mică spre capătul cu temperatură mai ridicată (Fig. 3.9).

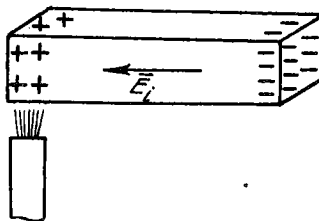


Fig. 3.9. Cîmp imprimat termic.

3.8.3. Cîmpuri electrice imprimate de concentrație

Intr-un vas compartimentat printr-un perete poros, se pune acid clorhidric concentrat respectiv acid clorhidric diluat (Fig. 3.10).

În urma fenomenului de disociere electrolitică, rezultă ioni pozitivi de hidrogen (H^+) și ioni negativi de clor (Cl^-). Ionii de hidrogen, avînd o mobilitate mai ridicată decît a ionilor de clor, trec mai repede, respectiv în număr mai mare, din compartimentul cu concentrație ridicată în compartimentul cu concentrație scăzută.

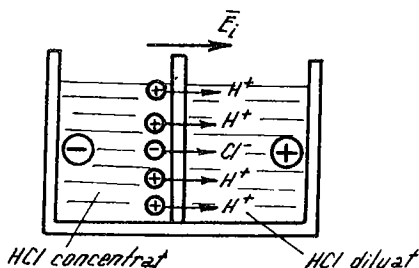


Fig. 3.10. Cîmp imprimat de concentrație.

În compartimentul cu H Cl concentrat, apar în exces sarcinile negative iar în celălalt compartiment va fi exces de sarcini pozitive.

Cîmpul electric imprimat va avea sensul indicat în figură.

3.8.4. Cîmpuri electrice imprimate de contact voltaice

Dacă se pun în contact două metale 1 și 2 (Fig. 3.11), din cauza agitațiilor termice diferite, are loc o trecere diferită a electronilor liberi dintr-un metal în celălalt. Se separă, în acest fel, sarcinile pe cele două interfețe ale suprafeței de contact și apare un cîmp electric imprimat, îndreptat ca în figură.

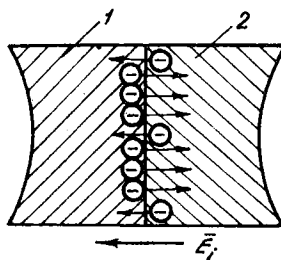


Fig. 3.11. Cîmp imprimat de contact voltaic.

3.8.5. Cîmpuri electrice imprimate de contact termice

În acest caz sînt puse în contact două metale și încălzite în cele două puncte de contact (Fig. 3.12). Se realizează temperaturi de încălzire diferite în punctele de contact în care caz, cîmpurile imprimate care apar nu mai sînt egale. Cîmpul imprimat din locul de contact este mai intens dacă încălzirea este mai intensă. Cîmpul imprimat rezultat va fi dat de diferența $\bar{E}_i(T_a) - \bar{E}_i(T_b)$ care va fi cu atît mai mare cu cît diferența dintre temperaturile T_a și T_b va fi mai ridicată.

Pentru aplicații tehnice, se realizează un ansamblu compus din două metale puse în contact la cele două capete și un instrument, denumit milivoltmetru, intercalat în circuit conform Fig. 3.13. Acest ansamblu reprezintă un termocuplu cu milivoltmetru.

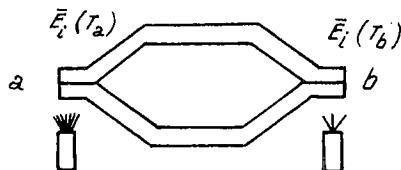


Fig. 3.12. Câmpuri imprimate termoelectrice de contact.

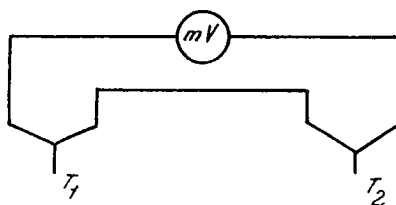


Fig. 3.13. Termocuplu cu milivoltmetru.

Dacă temperaturile la cele două suprafețe de contact sînt diferite,

T_1 - reprezintă temperatura din interiorul unui cuptor electric de exemplu și

T_2 - reprezintă temperatura mediului ambiant, atunci tensiunea măsurată cu milivoltmetru este diferită de zero. Efectul acesta se numește efectul Seebeck.

Se scrie:

$$U_e = K (T_2 - T_1) \quad (3.7)$$

în care tensiunea măsurată U_e este proporțională cu diferența temperaturilor.

Materialele din care se realizează aceste termocuple sînt prezentate în Tabelul 3.2.

Tabelul 3.2

Termocuplul	Temperatura maximă de utilizare (°C)	Tensiunea electromotoare care se obține pentru $T_1 - T_2 = 100^\circ\text{C}$ (mV)
Constantan - cupru	500	5
Constantan - cromnichel	900	6,2
Constantan - fier	900	5,1
Nichel - cromnichel	(de la 300) 1000	4,1
Platin - platin rodiiu	(de la 600) 1600	0,9
Iridiu - iridiu rodiiu	2000	0,5
Wolfram - wolfram moliбden	3000	0,3

Pentru conversia directă a energiei termice în energie electrică, se construiesc în prezent generatoarele termoelectrice sau pilele termoelectrice.

Funcționarea lor se bazează tot pe efectul Seebeck. Nu sînt răspîndite din cauza puterii obținute care este mică.

3.8.6. Cîmpuri electrice imprimate de contact galvanice.

Contactul este realizat între un metal și un electrolit, adică între un conductor de specia întâi și un conductor de specia a doua.

Dacă se introduce un electrod de cupru într-o soluție de sulfat de cupru concentrată, la suprafața de separație dintre cele două conductoare se produc separări de sarcini electrice care dau naștere unui cîmp electric imprimat (Fig. 3.14).

Pentru explicarea procesului se definesc două noțiuni: presiune osmotică și presiune de dizolvare.

Presiunea osmotică reprezintă tendința ionilor pozitivi de metal de a trece din electrolit în electrod iar presiune de dizolvare, tendința ionilor pozitivi de metal de a trece din electrod în electrolit.

În cazul contactului dintre cupru și soluția de sulfat de cupru concentrată, presiunea osmotică este mai mare decât presiunea de dizolvare ceea ce determină ca ionii pozitivi de cupru să treacă din electrolit în electrod, câmpul imprimat avînd același sens ca sensul de trecere al acestora.

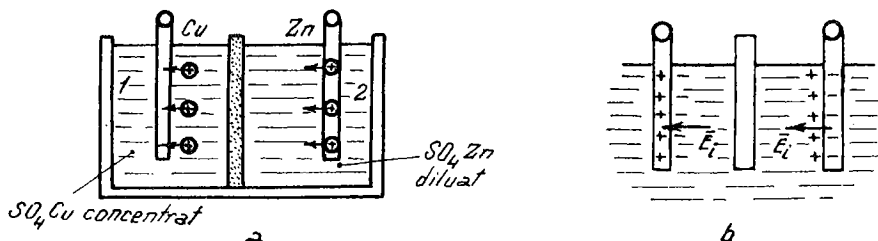


Fig. 3.14. Câmpuri imprimate de contact, galvanice.

Există și conductoare la care, atunci cînd sînt puse în contact, procesul se desfășoară invers. Este cazul electrodului de zinc introdus în soluție de sulfat de zinc diluată. Aici, presiunea de dizolvare este mai mare ca presiunea osmotică și din acest motiv ionii pozitivi de zinc trec din electrod în electrolit; câmpul electric imprimat are sensul orientat de la electrodul de metal spre electrolit.

Dacă în același recipient se introduc electrozii de cupru și de zinc cu soluțiile de sulfat de cupru concentrat respectiv sulfat de zinc diluat, efectul este și mai pronunțat întrucît cele două câmpuri electrice imprimate care iau naștere dau un câmp electric imprimat egal cu suma acestora. Acest dispozitiv se numește element galvanic și constituie o sursă de curent electric.

Elementele galvanice sînt de două tipuri: elemente galvanice primare (pile) și elemente galvanice secundare (acumulatori).

Elementele galvanice primare sînt ireversibile, adică energia electrică nu poate fi schimbată în energie chimică (prin încărcare).

Elementele galvanice secundare sînt însă reversibile, și din această cauză funcționarea lor se caracterizează prin mai multe cicluri de funcționare.

3.8.7. Elemente galvanice primare (pile electrice)

Corespunzător materialelor din care sînt realizați electrolitul și electrozii, pilele electrice sînt de mai multe tipuri.

Pila Volta. Intr-o soluție de acid sulfuric diluat sînt cufundați doi electrozi, unul de cupru și celălalt de zinc. (Fig. 3.15).

Dacă se realizează o legătură galvanică între cei doi electrozi printr-un fir conductor, se constată încălzirea acestuia fapt care indică trecerea curentului electric. Sensul curentului electric va fi în exterior de la electrodul de cupru spre cel de zinc; în interiorul sursei, sensul va fi invers adică de la electrodul de zinc spre cel de cupru.

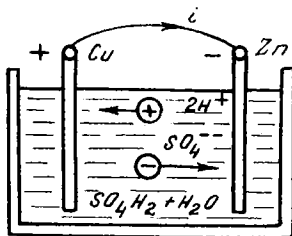


Fig. 3.15. Pila Volta.

În urma disocierii acidului sulfuric, rezultă ioni pozitivi de hidrogen care se îndreaptă spre electrodul de cupru și ioni negativi de radical care sosesc pe electrodul de zinc. În aceasta constă explicația că electrodul de cupru este pozitiv și cel de zinc negativ. La pila Volta, apare fenomenul de polarizare care constă din scăderea concentrației de ioni de hidrogen din apropierea electrodului de cupru.

Tensiunea electromotoare, noțiune pe care o vom defini ulterior, este 1,1 V dar din cauza polarizării această tensiune electromotoare ajunge la 0,85 - 0,9 V.

Din cauza polarizării această pilă electrică este complet abandonată.

Pentru înlăturarea fenomenului de polarizare se folosește o pilă modificată constructiv și care este descrisă în continuare.

Pila Daniel. Electrocul de cupru este introdus într-o soluție concentrată de sulfat de cupru (Cu SO_4) și totul într-un vas poros. Acest ansamblu este cufundat într-un vas mai mare din sticlă în care există soluția diluată de acid sulfuric.

Concentric cu vasul poros se plasează electrocul cilindric de Zinc (Fig. 3. 16).

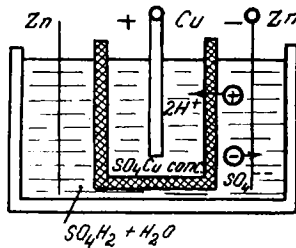


Fig. 3. 16. Pila Daniel.

Ioni pozitivi de hidrogen migrează prin peretele poros și intră în reacție cu sulfatul de cupru, eliberându-se în acest fel ioni pozitivi de cupru care se depun pe electrocul de cupru.

Pentru că ioni pozitivi de hidrogen nu mai sosesc pe electrocul de cupru, polarizarea este înlăturată.

Ioni de hidrogen pozitivi iau naștere în urma reacției dintre acidul sulfuric și electrocul de zinc.

Tensiunea electromotoare a pilei Daniel este 1.07 V.

Pila Leclanché constă dintr-un electrod de cărbune care constituie electrocul pozitiv și dintr-un electrod de zinc, sub formă de pahar, care constituie electrocul negativ.

Electrolitul este o soluție de clorură de amoniu (împirig). Pentru evitarea fenomenului de polarizare electrocul de cărbune este introdus într-un săculeț de pânză poroasă în care există bioxid de mangan (MnO_2) cu rol de depolarizant. Întreg ansamblu este plasat în paharul de zinc în care se află clorura de amoniu.

Tensiunea electromotoare a pilei Leclanché este de 1,5 V. Este foarte utilizată sub formă de pilă uscată fiind robustă și cu durată mare de func-

ționare. Se folosește pentru alimentarea aparatelor de măsură portabile, aparatelor de radio portabile, calculatoarele de buzunar etc.

Pentru folosirea lor, însă, pilele electrice se compun din mai multe elemente în serie, formînd o baterie.

3.8.8. Elemente galvanice secundare (acumulatori)

Electrolitul acestor elemente constituie criteriul de clasificare a lor în acide și alcaline. Acumulatorii acide sînt acumulatorii cu plumb iar cele alcaline sînt reprezentate de acumulatorii fero-nichel și cadmiu-nichel.

Acumulatorii cu plumb. Sînt foarte răspîndite deoarece au caracteristici electrice bune și o tehnologie de fabricație mai simplă.

Electrozii sînt executați din grătare de plumb care sînt acoperiți cu paste de oxizi de plumb (miniude plumb Pb_3O_4 și litargă PbO) iar electrolitul este o soluție de acid sulfuric diluat cu apă distilată. Recipientul acumulatorului se realizează din sticlă sau din ebonită pentru a rezista la contactul cu electrolitul.

Înainte de utilizare, are loc operația de formare care constă în trecerea unui curent continuu prin acumulator și pe electrodul pozitiv se formează PbO_2 (culoare cafenie) iar pe electrodul negativ se formează plumb spongios (culoare cenușie).

La descărcare, au loc reacții chimice care se finalizează cu acoperirea ambilor electrozi cu sulfat de plumb și diluarea acidului sulfuric (electrolitul) cu apa rezultată din reacție. Se spune că a scăzut concentrația sau densitatea electrolitului. Tensiunea unui element coboară în timpul descărcării pînă la valoarea de 1,8 V. Descărcarea trebuie oprită la această valoare deoarece pentru tensiuni mai scăzute, reacțiile chimice nu mai sînt reversibile.

La începutul încărcării, electrozii sînt acoperiți cu sulfat de plumb dar în urma reacțiilor chimice se obține în final acoperirea electrodului pozitiv (anod) cu bioxid de plumb (PbO_2) și electrodului negativ (catod) cu plumb spongios.

Acidul sulfuric devine concentrat iar tensiunea electromotoare a acumulatorului atinge valoarea 2,6 - 2,7 V.

În funcționare, după încărcare, tensiunea este 2,2 V dar scade repede la 1,95 V rămânând aproape constantă pînă la descărcare.

Pentru obținerea unor tensiuni potrivite, elementele se leagă în serie.

Caracteristicile mai importante ale acumuloarelor cu plumb sînt:

- Tensiunea nominală (V);
- Capacitatea exprimată în amperi x oră (A h);
- Curentul maxim admisibil debitat (A).

Acest curent maxim nu trebuie depășit chiar pentru timp scurt deoarece efectele mecanice provocate de acesta pot conduce la deteriorarea plăcilor.

În Fig. 3.17, sînt reprezentate curbele de variație a tensiunii și a concentrației electrolitului în timpul încărcării și descărcării acumulatorului de plumb pentru curent constant.

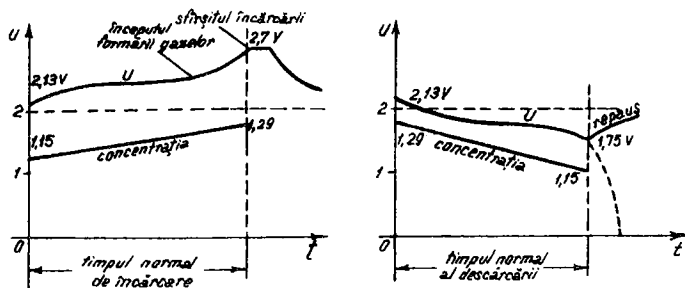


Fig. 3.17. Curbele acumulatorului cu plumb (pentru un element).

Timpul normal de încărcare este de cca. 10 ore ceea ce determină un curent de încărcare egal cu 1/10 din capacitatea acumulatorului.

Sfîrșitul operației de încărcare se constată și prin intensificarea formării gazelor datorită proceselor chimice din electrolit (acumulatorul fierbe).

Acumuloarele alcaline. Electrolitul acumuloarelor alcaline este o soluție alcalină, hidroxidul de potasiu (KOH). Sînt două tipuri:

- acumuloarele fero-nichel (Fe-Ni) ;
- acumuloarele cadmiu - nichel (Cd-Ni) .

Electrozii sînt constituiți din oțel nichelat pe care se fixează substanțele active.

La electrodul pozitiv, substanța activă este hidratul de nichel - $\text{Ni}(\text{OH})_2$ iar la electrodul negativ, substanța activă este:

- fier la acumulateoarele Fe - Ni;
- cadmiu spongios și fier (15%) la acumulateoarele Cd - Ni. Vasul și capacul sînt din tablă de oțel nichelat, sudate.

Tensiunea electromotoare a acumulateoarelor alcaline are valoarea de 1,41 V la Fe-Ni și 1,38 V la Cd-Ni.

Acumulateoarele alcaline au randament scăzut 55%. Ca avantaje față de cel cu plumb se notează:

- este ușor transportabil;
- nu emană vapori;
- nu necesită întreținere deosebită.

3.9. Generatorul electric (Sursa electrică). Tensiunea electromotoare

Dispozitivul în care au loc separările de sarcină electrică, datorate câmpului electric imprimat, reprezintă generatorul electric (sursa electrică). Din punct de vedere al condițiilor fizice care dau naștere câmpului electric imprimat, generatoarele electrice pot fi: mecanice, chimice, termice.

Considerăm un astfel de generator electric reprezentat în Fig. 3.18.

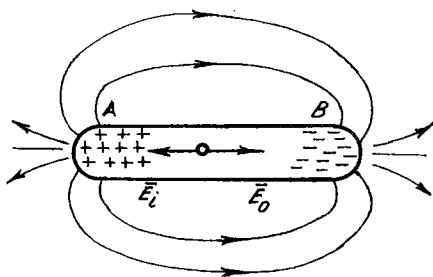


Fig. 3.18. Generator electric .

Separarea sarcinilor electrice pe cele două borne, A pozitivă și B negativă, este realizată de câmpul imprimat \vec{E}_i . Ca urmare a separării, se naște câmpul electric \vec{E}_o ale cărui linii de câmp se închid de la borna pozitivă A la borna negativă B prin interiorul generatorului electric dar și prin aer.

La echilibru, când separarea sarcinilor electrice s-a realizat, se poate scrie:

$$E_o = E_i \text{ (în interiorul generatorului)} \quad (3.8)$$

sau vectorial (câmpurile în interiorul generatorului au aceeași direcție dar sensuri opuse).

$$\vec{E}_o = - \vec{E}_i \quad (3.8a)$$

Relația arată că în circuit deschis (bornele A și B nu sînt legate printr-un conductor) intensitatea câmpului electric are aceeași mărime dar sens contrar față de intensitatea câmpului electric imprimat.

Cînd circuitul este deschis, generatorul este în gol.

Dacă se consideră câmpul omogen, în interiorul sursei, atunci se scrie:

$$E_o \cdot l_{AB} = E_i \cdot l_{AB}. \quad (3.9)$$

$$\text{In care:} \quad E_i \cdot l_{AB} = e \quad (3.10)$$

reprezintă tensiunea electromotoare a generatorului

$$\text{iar} \quad E_o \cdot l_{AB} = U_{AB} = U_{\text{borne}} = U_b \quad (3.11)$$

este tensiunea electrică la bornele generatorului care este aceeași oricare ar fi drumul pe care se calculează această tensiune electrică; prin interiorul generatorului electric sau prin exteriorul acestuia adică prin aer.

Relația (3.3) se scrie, în notațiile de mai sus,

$$e = U_b \quad (3.12)$$

respectiv tensiunea între bornele generatorului electric este egală cu tensiunea electromotoare atunci cînd generatorul este în circuit deschis (în gol). Tensiunea electromotoare se mai notează prescurtat cu E , U_e , \mathcal{E} .

Simbolurile grafice utilizate pentru generatorul electric de curent de conducție staționar (curent continuu) sînt reprezentate în Fig. 3.19.

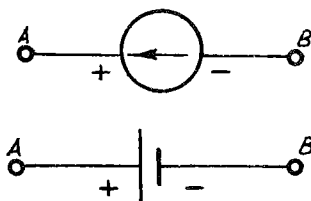


Fig. 3.19. Simboluri grafice pentru generatorul electric.

În tabelul 3.3. sînt prezentate caracteristicile electrice și constructive a cîtorva pile electrice care se folosesc ca surse electrice în aplicațiile practice:

Tabelul 3.3

Tipul pilei	Tensiunea electromotoare E (V)	C o n s t r u c Ț i a			
		Catodul	Electrolitul	Depolarizantul	Anodul
Volta	0,85 - 0,90	Zinc	Soluție acid sulfuric	-	Cupru
Daniel	1,08	Zinc	Soluție sulfat de zinc	Soluție sulfat de cupru	Cupru
Leclanché	1,5	Zinc	Soluție clorură de amoniu	Bioxid de mangan	Cărbune
Bunsen	1,9	Zinc	Soluție acid sulfuric	Acid azotic	Cărbune
Poggendorf	20,1	Zinc	Soluție acid sulfuric	Soluție bicromat de potasiu	Cărbune

3.10. Legile electrocineticii

Pentru înțelegerea și explicarea fenomenelor care aparțin domeniilor dintr-o știință s-au stabilit relații cunoscute sub numele de legi.

Acestea exprimă cele mai generale adevăruri demonstrate pe cale experimentală și care nu se deduc prin analiză logică.

Prin analiză logică se deduc din legi, relațiile care poartă denumirea de teoreme.

În electrocinetică, capitol important al electrotehnicii, se întâlnesc următoarele legi și teoreme:

- legea de conservare a sarcinii electrice;
- legea conducției electrice;
- teorema potențialului electric staționar;
- legea transformării de energie în conductoare parcurse de curenți de conducție.

3.10.1. Legea de conservare a sarcinii electrice

În regim electrostatic, sarcinile electrice se conservă, adică nu există o deplasare a lor către exterior; acestea se păstrează pe corpul aflat în stare de electrizare.

În electrocinetică, sarcinile electrice se află în mișcare dar nu se produce o schimbare a lor într-o altă formă a materiei de exemplu în câmp electric.

Se poate stabili experimental o relație între curentul electric de conducție - care reprezintă mișcarea ordonată a purtătorilor de sarcină și cantitatea totală de sarcini electrice acumulate, de exemplu, pe armăturile unui condensator electric.

Să considerăm următoarea experiență:

Pe armăturile unui condensator electric se află sarcini electrice, pozitive pe armătura pozitivă și negative pe cealaltă armătură.

Se leagă cele două armături printr-un conductor electric (Fig. 3.20).

Imediat se constată încălzirea conductorului, consecință a curentului de conducție stabilit prin acest conductor; sensul este de la armătura pozitivă la armătura negativă a condensatorului.

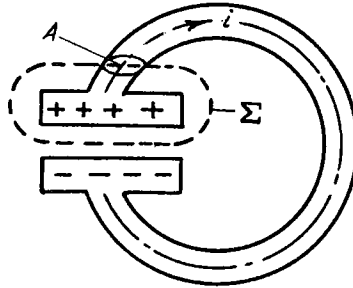


Fig. 3.20. Condensator electric legat prin conductor.

Se consideră două momente t_1 și t_2 .

La momentul t_1 pe armătură respectiv în interiorul suprafeței închise Σ există sarcina q_1 iar la t_2 , sarcina q_2 . Între momentele t_1 și t_2 există o modificare a sarcinii electrice :

$$q_2 - q_1 = -\Delta q_{\Sigma}$$

Semnul minus este o consecință a faptului că sarcina electrică scade și $q_2 < q_1$.

Raportul $\frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1} = \frac{-\Delta q_{\Sigma}}{\Delta t}$ reprezintă curentul electric i_{Σ} care trece prin suprafața Σ spre exterior, adică:

$$i_{\Sigma} = - \frac{\Delta q_{\Sigma}}{\Delta t} \quad (3.13)$$

Această relație exprimă legea de conservare a sarcinii electrice cu următorul enunț:

Viteza de scădere a sarcinii electrice din interiorul unei suprafețe închise este egală cu intensitatea curentului de conducție care iese din interiorul suprafeței.

În regim electrostatic, nu avem curent de conducție, adică $i_{\Sigma} = 0$.

Deci și $\Delta q_{\Sigma} = 0$.

(3.14)

Rezultă că $q_{1\Sigma} = q_{2\Sigma} = \text{constant}$.

Sarcina electrică a unui sistem izolat, fără legătură cu exteriorul, este constantă în regim electrostatic.

În regim electrocinetic, nu există acumulări de sarcină electrică și deasemenea:

$$\Delta q_{\Sigma} = 0$$

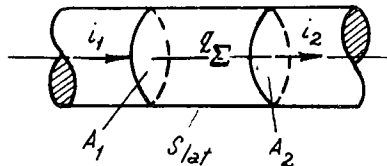


Fig. 3.21. Suprafața închisă a conductorului electric.

În acest regim se consideră ca suprafață închisă Σ , suprafața totală compusă din suprafețele parțiale A_1 , A_2 și S_{lat} (Fig. 3.21).

În interiorul acestei suprafețe, sarcinile se vor schimba de la un moment la alt moment (regimul este electrocinetic) dar cantitatea totală de sarcini electrice va fi la momentele t_1 , $t_2 \dots t_n$ aceeași, adică:

$$q_{\Sigma t_1} = q_{\Sigma t_2} = \dots = q_{\Sigma t_n} = \text{const.}$$

Rezultă $\frac{\Delta q_{\Sigma}}{\Delta t} = 0$ deoarece $\Delta q_{\Sigma} = 0$.

Deci : $i_{\Sigma} = 0$.

(3.15)

Enunțul acestei relații este: suma algebrică a curenților de conducție care străbate suprafața Σ este zero.

Dacă se adoptă semnul plus pentru curenții care părăsesc suprafața Σ și semnul minus pentru curenții care intră în suprafața Σ , rezultă că:

$$i_{\Sigma} = i_2 - i_1 = 0.$$

Adică: $i_1 = i_2,$

respectiv suma algebrică a curenților printr-o suprafață închisă este zero.

Din relația 3.15 se deduce și teorema întâi a lui Kirchhoff după cum se va prezenta ulterior.

3.10.2. Legea conducției electrice

În urma experiențelor, s-a stabilit că între curenții și tensiunea electrică dintr-o porțiune de circuit există o relație matematică cunoscută sub denumirea de legea lui Ohm.

Ulterior, tot pe baza unor constatări experimentale și pe anumite considerente teoretice cu privire la aspectele microscopice ale conducției electrice, s-a elaborat legea conducției electrice. Enunțul este următorul:

În orice material și în orice regim, densitatea curenților electrici de conducție \vec{J} este orientată și proporțională cu suma intensității câmpului electric \vec{E} și a intensității câmpului electric imprimat \vec{E}_i din același punct și din același moment.

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_i) \quad (3.16)$$

sau

$$\vec{E} + \vec{E}_i = \oint \vec{J}. \quad (3.16 \text{ a})$$

Mărimea σ se numește conductivitate electrică iar mărimea.

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

se numește rezistivitate electrică.

Acste două mărimi sînt mărimi de material dependente de natura și starea materialului (presiune, temperatură etc.).

Unitatea de măsură în S I pentru rezistivitate este $\Omega \text{ m}$ și se deduce din relația dimensională:

$$[\rho] = [E]/[J] \quad (3.17)$$

În sistemul internațional S I se scrie astfel:

$$\frac{1 \cdot \text{V/m}}{1 \text{ A/m}^2} = 1 \Omega \text{ m în care s-a notat}$$

$$\frac{1 \text{ volt}}{1 \text{ amper}} = 1 \text{ ohm } [1 \Omega].$$

În practică se folosește și $\frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$

Unitatea de măsură în S I pentru conductivitatea electrică este $1 (\Omega \text{ m})^{-1} = \frac{1 \text{ siemens}}{1 \text{ m}} = \frac{1 \text{ S}}{\text{m}}$ unde s-a notat $1 (\text{ohm})^{-1} = 1 \text{ siemens (S)}$.

Dependența rezistivității unui conductor față de temperatură are expresia matematică următoare :

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)] \quad (3.18)$$

în care:

ρ_0 este rezistivitatea la temperatura T_0 ;

ρ este rezistivitatea la temperatura T ;

α - coeficient de temperatură și este o constantă de material.

În tabelul 3.4. sînt prezentate valorile rezistivității electrice la 20°C și coeficientul de temperatură la 20°C .

Tabelul 3.4

Material	$\rho_{20^{\circ}}$ $\left[\Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \right]$	$\alpha_{20^{\circ}}$ $[1/^{\circ}\text{C}]$	Material	$\rho_{20^{\circ}}$ $\left[\Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \right]$	$\alpha_{20^{\circ}}$ $[1/^{\circ}\text{C}]$
Alamă	0,07	0,002	Mangan	0,42	0,00001
Aluminiu	0,026	0,004	Mercur	0,958	0,0009
Argint	0,016	0,0036	Nichel	0,07	0,006
Aur	0,024	0,0037	Oțel	0,1	0,006
Bronz fosforos	0,115	0,004	Platină	0,1	0,003
Cărbune	60 - 80	-0,0002 -0,0008	Plumb	0,21	0,004
Constantan	0,49	0,000004	Staniu	0,11	0,0044
Cromnichel	1,1	0,00015	Wolfram	0,055	0,005
Cupru	0,0175	0,004	Zinc	0,06	0,004

Din tabel se constată că în urma ordonării materialelor după valorile crescătoare ale rezistivității electrice, rezultă următorul șir: argint, cupru, aur, aluminiu, molibden, zinc, wolfram, tantal, fier, cobalt, nichel etc.

Pentru cupru pur și aluminiu pur, rezistivitatea electrică are următoarele valori:

$$\rho_{\text{cu } 20^{\circ}} = \frac{1}{57} \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} : \rho_{\text{Al } 20^{\circ}} = \frac{1}{33} \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

Cazuri particulare ale legii conducției electrice

a) $\vec{E} = \vec{E}_i \neq 0; \vec{J} = 0; \rho \neq 0$. Sursa electrică în gol. Cazul acesta corespunde generatorului electric la funcționarea în gol, adică bornele sale nu sînt legate printr-un conductor electric (Fig. 3.22).

Din relația (3.16 a) se obține că $\vec{E}_i + \vec{E} = 0$ sau sub formă scalară

$$E_i = E.$$

Considerînd cele două cîmpuri electrice uniforme și omogene și multiplicînd cu l_{AB} se obține:

$$E_i l_{AB} = E l_{AB}$$

Dar:

$E_i l_{AB} = e$ reprezintă tensiunea electromotoare

și $E l_{AB} = u_b$ reprezintă tensiunea la borne.

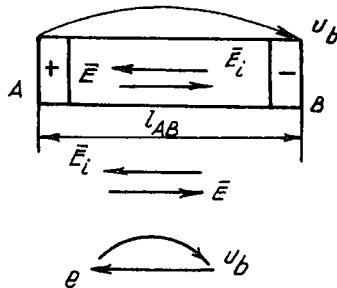


Fig. 3.22. Sursa electrică în gol.

Astfel că relația respectivă devine:

$$e = u_b \quad (3.19)$$

b) $\vec{E} \neq 0$; $\vec{E}_i = 0$; $\vec{J} \neq 0$; $\rho \neq 0$. Conductor omogen fără cîmp electric imprimat. (Legea lui Ohm). În acest caz relația matematică apare numai între cîmpul electric și curentul dintr-o porțiune de conductor (Fig. 3.23) respectiv între tensiunea electrică și curentul electric din conductorul respectiv.

Legea conducției electrice se scrie în acest caz particular,

$$\vec{E} = \rho \vec{J}$$

sau scalar:

$$E = \rho J$$

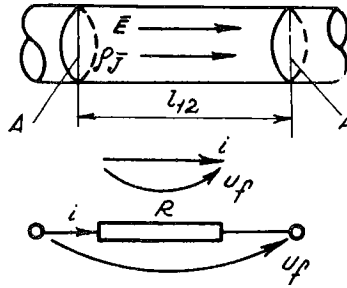


Fig. 3.23. Conductor fără câmp electric imprimat.

Se consideră câmpul uniform și omogen iar densitatea de curent uniformă pe secțiunea A .

Se multiplică cu l_{12} - lungimea între cele două secțiuni - și se înlocuiește densitatea de curent prin relația cunoscută (3.1 b):

$$J = \frac{i}{A}$$

$$\text{Se obține : } E l_{12} = \int l_{12} \frac{i}{A} . \quad (3.20)$$

Dar $E l_{12}$ reprezintă tensiunea de-a lungul firului între secțiunea 1 și 2 adică

$$E l_{12} = u_f \quad (3.21)$$

$$\text{iar } \frac{\int l_{12}}{A} = R \quad (3.22)$$

este rezistența electrică a porțiunii de conductor considerate, astfel că relația (3.20) devine:

$$u_f = R i . \quad (3.23)$$

Această relație reprezintă legea lui Ohm.

Din relația 3.22, rezultă că unitatea de măsură în sistemul S I pentru rezistența electrică este 1 ohm (1Ω):

$$[R] = [\rho] \frac{[l]}{[A]}$$

$$\text{sau} \quad 1 \Omega \cdot \text{m} \cdot \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ m}^2} = 1 \Omega \quad (1 \text{ ohm}).$$

Simbolul rezistenței electrice este redat de asemenea în Fig. 3.23.

Valoarea inversă a rezistenței se numește conductanță electrică:

$$G = \frac{1}{R} \quad \text{și unitatea de măsură în S.I. este 1 siemens (S) } 1 \text{ S} = \\ = 1 (\text{ohm})^{-1} = \Omega^{-1}.$$

c) $\vec{E}_i \neq \vec{E} \neq 0$; $J \neq 0$; $\rho \neq 0$ Sursa electrică în sarcină.

Distingem două posibilități:

1 c) $\vec{E}_i > \vec{E}$ - Sursa electrică în regim de generator;

2 c) $\vec{E}_i < \vec{E}$ - Sursa electrică în regim de receptor.

1 c) Considerăm Fig. 3.24 în care relația (3.16 a) se scrie sub forma scalară, astfel:

$$E_i - E = \rho J$$

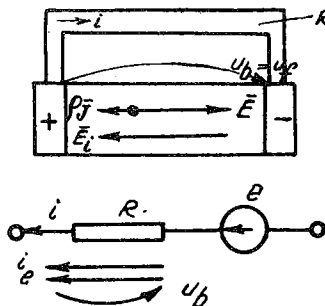


Fig. 3.24. Sursa electrică în regim de generator.

Dacă se multiplică cu l_{AB} și se înlocuiește densitatea de curent prin expresia

$$J = \frac{i}{A_g}$$

unde A_g - reprezintă secțiunea sursei electrice prin care densitatea de curent J este uniform repartizată, se obține:

$$E_i \cdot l_{AB} - E l_{AB} = \int l_{AB} \frac{i}{A_g} \quad (3.24)$$

Dar: $E_i l_{AB} = e$ - tensiunea electromotoare a sursei

și $E l_{AB} = u_b$ - tensiunea electrică la bornele sursei.

Astfel, relația (3.24) devine:

$$e - u_b = R_g i$$

sau

$$e = u_b + R_g i \quad (3.25)$$

în care s-a notat cu R_g , rezistența internă a sursei.

Tensiunea la bornele generatorului în această situație este egală cu tensiunea la bornele firului conductor, astfel că relația (3.25) se mai scrie:

$$e = u_f + R_g i \quad (3.26)$$

Dar conform (3.23), $u_f = R i$.

$$\text{Deci} \quad e = (R + R_g) i \quad (3.27)$$

și curentul electric:

$$i = \frac{e}{R + R_g} \quad (3.28)$$

Acestei relații îi corespunde circuitul prezentat în Fig. 3.25. Sensurile de referință ale curentului și tensiunii la borne au fost asociate după regula de la generatoare.

2 c) - Considerăm Fig. 3.26 în care relația (3.16 a) se scrie sub formă scalară:

$$E - E_i = \rho J.$$

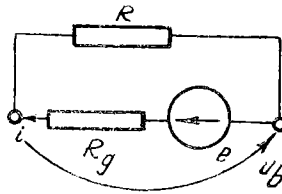


Fig. 3.25. Sursa electrică în regim de generator.

Aceasta corespunde situației în care sursa electrică este alimentată de la o altă sursă cu o tensiune electromotoare mai mare de cît a acesteia.

Se obține relația:

$$u_b = e + R_g i \quad (3.29)$$

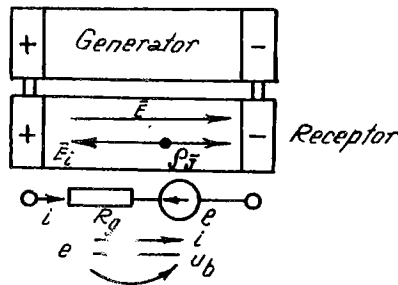


Fig. 3.26. Sursa electrică în regim de receptor.

Aici, sensurile de referință ale curentului și tensiunii la borne au fost asociate după regula de la receptoare.

Intradevăr, dacă se consideră conductorul omogen, lipsit de surse de câmp imprimat adică $e = 0$, se obține relația:

$$u_b = R i$$

dedusă și în cazul conducției electrice printr-un fir conductor deoarece tensiunea în fir u_f este egală cu tensiunea la borne:

$$u_f = u_b$$

d) - $\vec{E}_i \neq \vec{E} \neq 0$; $\vec{J} \neq 0$ dar $\rho = 0$ Generatorul ideal de tensiune
(Fig. 3.27). Legea conducției electrice se scrie în acest caz:

$$\begin{array}{ll} \vec{E} + \vec{E}_i = 0 & \\ \text{sau scalar } E = E_i & \\ \text{respectiv } u_b = e & \end{array} \quad (3.30)$$

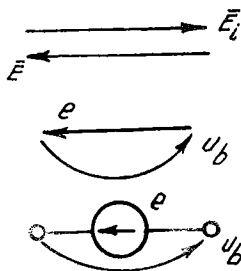


Fig. 3.27. Generatorul ideal de tensiune.

Sursa electrică reprezintă un generator ideal de tensiune.

e) $\vec{E}_i \neq \vec{E} \neq 0$; $J \neq 0$ dar $\sigma = 0$. Generatorul ideal de curent.
(Fig. 3.28). În acest caz există câmp electric imprimat, conductivitatea este considerată nulă dar generatorul asigură în circuit curentul $i_g = i$. (3.31)

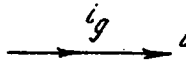


Fig.3.28. Generatorul ideal de curent.

Sursa electrică reprezintă un generator ideal de curent.

Toate aceste expresii matematice prezentate nu sînt decît particularizări ale legii conducției electrice exprimată sub o altă formă, forma integrală a legii conducției electrice.

Această formă integrală este:

$$u_f + e_i = Ri \quad (3.32)$$

în care:

u_f - tensiunea în fir;

e_i - tensiunea electrică imprimată (tensiunea electromotoare);

$R = \frac{\rho l}{A}$ - rezistența porțiunii de conductor considerate;

i - curentul electric uniform repartizat prin secțiunea conductorului.

3.10.3. Legea transformării energiei în conductoare parcurse de curenți electrici (Legea Joule-Lenz).

Experimental se constată că la trecerea curentului electric printr-un conductor, acesta se încălzește. Fenomenul este cunoscut sub denumirea de efect termic al curentului sau efect Joule-Lenz și este o consecință a transformării energiei cîmpului electric în energie calorică. Transformarea se face conform unei legi cunoscute sub denumirea de legea transformării de energie în conductoare parcurse de curenți de conducție.

Enunțul este următorul:

Puterea cedată unității de volum a unui conductor de către cîmpul electric, în procesul de conducție, este egal cu produsul scalar între intensitatea cîmpului electric și densitatea curentului,

$$\text{adică} \quad p_J = \bar{E} \bar{J} \quad (\text{W/m}^3) \quad (3.33)$$

în care:

p_J este densitatea de volum a puterii cedate de câmpul electric conductorului;

\bar{E} - intensitatea câmpului electric în conductor;

\bar{J} - densitatea curentului electric prin conductor.

În sistemul Internațional S I unitatea de măsură a acestei densități de putere este watt pe metru cub (1 W/m^3).

Cunoscînd puterea cedată pe unitatea de volum a conductorului, se poate determina puterea cedată sub formă de căldură unei porțiuni din conductorul respectiv. Considerăm o porțiune de conductor cu aceeași secțiune transversală A și determinăm puterea cedată de câmpul electric pe lungimea l_{12} (Fig. 3.29). Densitatea de volum a puterii este:

$$p_J = EJ.$$

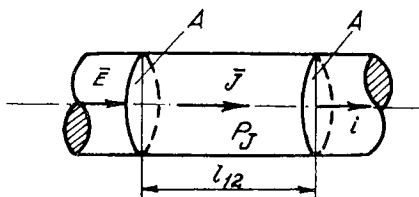


Fig. 3.29. Puterea cedată de câmpul electric într-un conductor.

Puterea cedată de câmpul electric conductorului de lungime l_{12} și secțiune A se obține înmulțind densitatea de volum a puterii cu volumul conductorului:

$$P_J = p_J l_{12} A = E l_{12} JA = u_{12} i \quad (\text{W}) \quad (3.34)$$

în care s-a înlocuit $E l_{12} = u_{12}$ tensiunea în conductor pe lungimea l_{12}

și $i = JA$ curentul de conducție prin conductor.

Enunțul este următorul:

Puterea cedată de câmpul electric unei porțiuni de conductor în procesul de conducție electrică este egală cu produsul dintre intensitatea curentului și tensiunea electrică între capetele porțiunii considerate.

Relația se mai poate scrie, înlocuind tensiunea

$$u_{12} = u_f = u_b = Ri,$$

astfel:
$$P_J = Ri^2 = \frac{u_{12}^2}{R} = \frac{u_b^2}{R} = G u_b^2 \quad [W] \quad (3.35)$$

sau

$$P_J = P_R \text{ în care } P_R = Ri^2.$$

Corespunzător expresiei, s-a elaborat schema din Fig. 3.30.

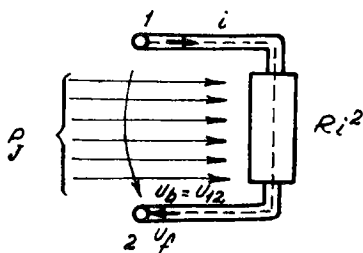


Fig. 3.30. Puterea cedată de câmpul electric unui conductor.

În cazul în care între bornele 1 și 2 există și o sursă de câmp electric imprimat, puterea primită la borne prin intermediul câmpului electric și cedată conductorului de rezistență electrică R , poate fi majorată sau diminuată cu puterea sursei dintre bornele respective.

Distingem prin urmare două cazuri:

Cazul a) Fig. 3.31.

$$P_J + P_g = Ri^2 \quad (3.36)$$

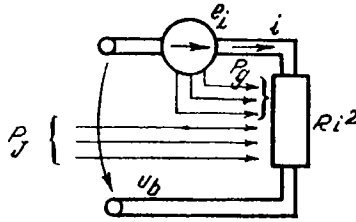


Fig. 3.31. Cazul a) e_i și i au același sens.

Se enunță astfel: pentru acoperirea pierderii de energie prin efect Joule - Lenz se transformă atît energia electrică primită pe la borne cît și aceea a sursei de cîmp electric imprimat (sursa cedează energie, respectiv se descarcă)

Cazul b)

Fig. 3.32.

$$P_J = Ri^2 + P_g \quad (3.37)$$

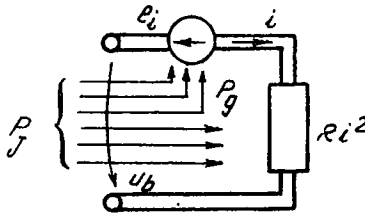


Fig. 3.32. Cazul b) e_i și i au sensuri opuse.

În acest caz energia cedată de cîmpul electric pe la borne acoperă atît efectul Joule-Lenz din conductor, cît și creșterea energiei sursei de cîmp electric imprimat - (sursa primește energie; dacă este acumulator electric se încarcă).

În relațiile (3.36) și (3.37) s-a notat cu P_g puterea primită respectiv cedată de sursă. Este egală cu :

$$P_g = e_i i \quad (3.38)$$

Microscopic, acest fenomen se explică astfel:

Cîmpul electric transmite energie particulelor microscopice libere care constituie "gazul electronic". În urma ciocnirilor dintre acestea și atomii rețelei cristaline, crește agitația termică a atomilor care la scară macroscopică se evidențiază prin creșterea temperaturii conductorului.

Pentru a nu se depăși încălziri admisibile ale conductoarelor electrice, se prescriu prin tabele densitățile de curent maxim admise. Astfel în Tabelul 3.5. sînt prezentate densitățile de curent admise pentru conductoare de cupru cu secțiuni folosite în aplicațiile practice.

Tabelul 3.5

Secțiunea $S \text{ (mm}^2\text{)}$	Conductor cupru izolat $J \text{ (A/mm}^2\text{)}$	Conductor cupru neizolat	
		În încăperi $J \text{ (A/mm}^2\text{)}$	În exterior $J \text{ (A/mm}^2\text{)}$
4	9	14,2	14,2
6	7,7	12,2	12,6
10	6,8	10,3	10,8
16	5,7	8,1	9,4
25	4,9	6,6	8,2
35	4,3	6,0	7,7
50	3,8	5,3	6,7
70	3,5	4,8	6,1
95	3,1	4,3	5,4

Se observă că la secțiuni mai mari, densitatea de curent este mică. La dimensionarea conductoarelor pe bază de încălzire se demonstrează că în cazul a două conductoare de diametre d_1 respectiv d_2 , există următoarea relație între densitățile de curent J_1 și J_2 :

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{d_2}{d_1} \quad (3.39)$$

3.10.4. Aplicații în tehnică ale efectului electrocaloric

Siguranțe fuzibile. Se folosesc pentru protecția circuitelor electrice. Deconectează sau separă circuitul electric atunci când curentul electric depășește o anumită valoare. Elementul important al siguranței îl constituie fuzibilul. Acesta este un conductor cilindric sau o plăcuță care din cauza efectului caloric al curentului electric se topește deoarece reprezintă porțiunea de circuit cea mai slabă din punct de vedere termic. Este necesar ca acest fuzibil să reziste termic timp îndelungat la curentul nominal dar să se topească instantaneu la curenți periculoși. Puterea degajată prin efectul Joule-Lenz determină creșterea temperaturii elementului fuzibil pînă cînd se atinge punctul de topire sau fuziune.

Elementul fuzibil se realizează din materiale ca: argintul, cuprul, zincul, aliaje de staniu și cadmiu. Cuprul se cositorește sau se argintează pentru a nu se oxida în timpul funcționării normale fapt care ar provoca micșorarea secțiunii.

Caracteristicile importante ale siguranțelor fuzibile sînt: curentul nominal al siguranței, curentul nominal al fuzibilului, caracteristica de topire

Caracteristica de topire reprezintă dependența duratei de topire a elementului fuzibil al siguranței de curentul care trece prin el. (Fig. 3.33).

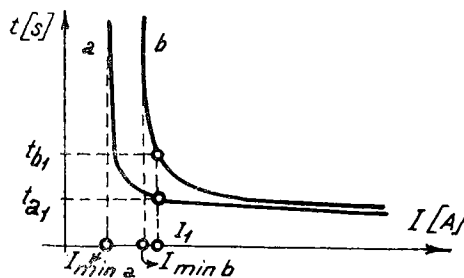


Fig. 3.33. Caracteristica de topire a elementului fuzibil.

În această figură, se reprezintă caracteristicile de topire a două elemente fuzibile a și b pentru curenți nominali diferiți.

$$I_{\min a} < I_{\min b}$$

Un curent I_1 va topi elementele fuzibile la timpi diferiți $t_{a1} < t_{b1}$. Același curent de suprasarcină va topi mai repede elementul fuzibil al cărui curent nominal este mai mic. Acest fapt se folosește pentru asigurarea funcționării selective a siguranțelor fuzibile.

După caracteristica de topire se deosebesc: siguranțe rapide și siguranțe lente. La siguranțele fuzibile rapide, timpul de topire este foarte scurt la un anumit supracurent.

La siguranțele lente prin măsuri constructive adecvate se obține un timp de topire relativ lung la supracurenți mici (suprasarcină), respectiv un timp de topire scurt la supracurenți mari (scurtcircuite).

În tabelul 3.6 sînt redați curenții minimi de topire și diametrele firurilor fuzibile din diferite materiale (situate în aer).

Tabelul 3.6

Curentul de topire (A)	Diametrul firului, în mm				
	Argint	Cupru	Cositor	Plumb	Oțel
1	-	0,05	0,19	0,21	0,12
2	-	0,09	0,29	0,33	0,19
3	-	0,11	0,36	0,43	0,25
4	-	0,14	0,46	0,52	0,30
5	0,14	0,16	0,56	0,60	0,42
10	0,25	0,25	0,85	0,95	0,55
15	0,40	0,33	1,11	1,25	0,72
25	0,51	0,46	1,59	1,75	1,01

Ciocane de lipit cu rezistențe electrice. Aceste dispozitive, foarte răspîndite în industria electronică, funcționează tot pe baza efectului electrocaloric. O rezistență din fir sau plăcuță de nichelină transmite căldura dezvoltată unui vîrf de cupru prin intermediul căruia se topește aliajul de lipit (plumb aliat cu cositor).

Lămpi electrice cu incandescență. Corpul incandescent este filamentul care se încălzește la trecerea prin el a curentului electric, la o temperatură de cca. 2000°C.

La această temperatură, lumina devine albă. Materialul folosit pentru filament este wolframul deoarece rezistă la această temperatură, este rezistent din punct de vedere mecanic, se evaporă lent.

O altă aplicație a efectului electrocaloric, este sudarea electrică.

3.11. Circuite de curent continuu

Circuitul electric reprezintă un ansamblu de medii prin care circulă curent electric. Aceste medii au fost prezentate și sînt: conductoare, semiconductoare și dielectrice. În conductoare și semiconductoare se constată prezența curentului de conducție; în dielectrice există numai curent de deplasare.

Circuitul electric în care curenții și tensiunile au valori invariabile în timp se numește circuit de curent continuu.

Componentele care alcătuiesc un circuit electric se numesc elemente de circuit. În curent continuu aceste elemente sînt: sursa electrică și rezistorul.

Elementele de circuit cu două borne de acces se numesc elemente dipolare.

În circuitele electrice de curent continuu sînt reprezentate elemente ideale de circuit: surse ideale și rezistorul ideal.

Pentru caracterizarea elementelor de circuit se utilizează relația dintre tensiunea U de la borne și curentul I care circulă prin element.

Reprezentarea grafică a acestei relații, în planul U - I , se numește caracteristica tensiune - curent a elementului de circuit.

Dacă această caracteristică tensiune - curent este o dreaptă, elementul de circuit este liniar (Fig. 3.34).

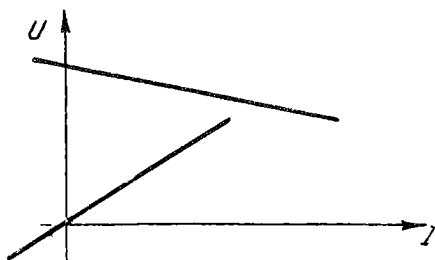


Fig. 3.34. Caracteristica tensiune-curent a elementului liniar.

În cazul în care această caracteristică este o curbă diferită de o dreaptă, elementul de circuit este neliniar. (Fig. 3.35)



Fig. 3.35. Caracteristica tensiune - curent a elementului neliniar.

Elementele reale de circuit sînt în general neliniare dar prin aproximarea caracteristicii lor cu o dreaptă, acestea se consideră liniare.

Elementele de circuit se pot grupa și sub aspect energetic. Astfel se definesc elemente pasive și elemente active.

Elementul de circuit de curent continuu pasiv este elementul care nu poate ceda în circuit energie electrică în nici un regim de funcționare; acesta primește energie electrică. Rezistorul este element pasiv.

Elementul de circuit de curent continuu activ generează energie electrică în anumite regimuri de funcționare; în anumite regimuri de lucru poate primi energie electrică. Sursele electrice sînt elemente active de circuit. Corespunzător, circuitul electric compus numai din elemente pasive se numește circuit pasiv. Dacă circuitul conține cel puțin un element activ, se numește circuit activ.

Reprezentarea grafică prin simboluri a elementelor de circuit și a modului cum acestea sînt conectate între ele se numește schemă electrică.

Se vor prezenta elementele ideale liniare de circuit de curent continuu.

3.11.1. Rezistorul ideal este un element de circuit dipolar pasiv la bornele căruia tensiunea este proporțională cu intensitatea curentului care străbate acest element.

Ecuția care reprezintă caracteristica rezistorului este :

$$U = RI$$

$$(3.40)$$

în care factorul de proporționalitate R este rezistența electrică a rezistorului.

Această ecuație se mai scrie:

$$I = G U \quad (3.41)$$

în care $G = \frac{1}{R}$ reprezintă conductanța rezistorului.

Simbolul rezistorului și caracteristica tensiune - curent sînt reprezentate în Fig. 3.36 și Fig.3.37.

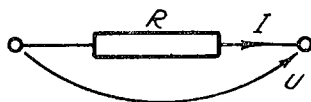


Fig.3.36. Simbolul rezistorului.

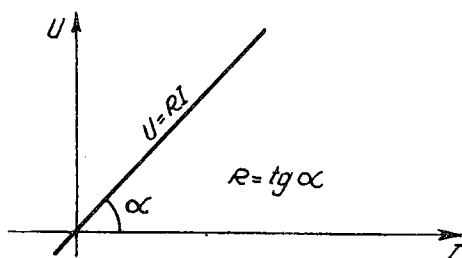


Fig. 3.37. Caracteristica tensiune - curent a rezistorului.

Rezistorul este un element pasiv; puterea $P_R = UI = RI^2 > 0$ este totdeauna pozitivă fiind primită pe la borne. Rezistorul funcționează numai ca receptor.

Sensurile tensiunii la borne și ale curentului se asociază conform regulii de la receptoare (vezi Fig. 3.26).

Rezistorul ideal este un rezistor liniar.

3.11.2. Sursa ideală de tensiune sau generatorul ideal de tensiune este elementul de circuit dipolar activ caracterizat printr-o tensiune la borne constantă independentă de curentul care îl parcurge.

Ecuția care reprezintă caracteristica sursei ideale de tensiune este

$$U = E \text{ pentru orice } I. \quad (3.42)$$

Simbolul sursei ideale de tensiune și caracteristica tensiune-curent sînt reprezentate în Fig. 3.38 și Fig. 3.39.

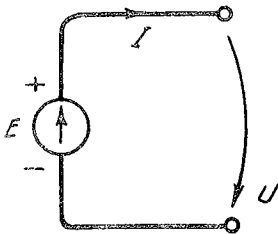


Fig. 3.38. Simbolul sursei ideale de tensiune.

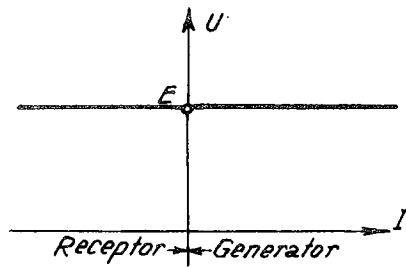


Fig. 3.39. Caracteristica tensiune-curent a sursei ideale de tensiune.

Față de sensurile tensiunii E și curentului I , sursa ideală de tensiune funcționează în regim de generator atunci când curentul I are același sens cu sensul tensiunii electromotoare E (Fig. 3.38). Puterea generată $P_g = EI > 0$. Sursa funcționează ca receptor de energie electrică, când curentul I are sens contrar cu sensul tensiunii electromotoare E . (Fig. 3.40).

Puterea generată are semnul minus $P_g = EI < 0$, adică este efectiv primită de sursă. Cele două regimuri de funcționare ale sursei ideale de tensiune se pot deduce și din caracteristica tensiune - curent (Fig. 3.39). Când $I > 0$, sursa furnizează energie electrică (generator) iar pentru $I < 0$ sursa primește energie electrică (receptor). Intensitatea I a curentului prin sursă depinde de circuitul în care sursa este conectată.

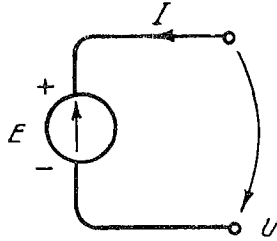


Fig. 3.40. Sursa ideală de tensiune careceptor.

3.11.3. Sursa ideală de curent sau generatorul ideal de curent este elementul de circuit dipolar activ care debitează în circuit un curent constant independent de tensiunea la borne. Ecuația care reprezintă caracteristica sursei ideale de curent este:

$$I = I_g \text{ pentru orice } U. \quad (3.43)$$

Simbolul sursei ideale de curent și caracteristica tensiune - curent sînt reprezentate în Fig. 3.41 și 3.42.

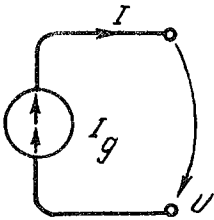


Fig. 3.41. Simbolul sursei ideale de curent.

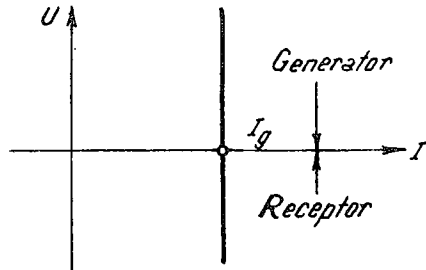


Fig. 3.42. Caracteristica tensiune-curent a sursei ideale de curent.

Față de sensurile tensiunii U și curentului I_g , sursa ideală de curent funcționează în regim de generator atunci cînd tensiunea U are același sens cu sensul curentului I_g debitat de sursă. Puterea generată $P_g = UI_g > 0$.

Sursa funcționează ca receptor de energie electrică, când tensiunea U are sens contrar cu sensul curentului I_g (Fig. 3.43).

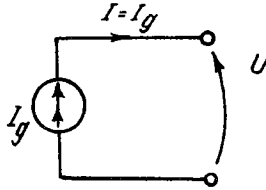


Fig. 3.43. Sursa ideală de curent, ca receptor.

Puterea generată are semnul minus adică este efectiv primită de sursă:

$$P_g = U I_g < 0.$$

Cele două regimuri de funcționare ale sursei ideale de curent se pot deduce și din caracteristica tensiune-curent (Fig. 3.42).

Cînd $U > 0$, sursa furnizează energie electrică (generator) iar pentru $U < 0$, sursa primește energie electrică (receptor). Tensiunea U de la bornele sursei de curent depinde de circuitul electric în care este conectată această sursă.

3.11.4. Sursa reală de tensiune.

Nu există în realitate o sursă de tensiune a cărei rezistență internă să fie nulă. Sursa reală de tensiune are o rezistență internă diferită de zero și circuitul în acest caz se compune dintr-o sursă ideală de tensiune legată în serie cu un rezistor a cărei rezistență electrică este rezistența internă a sursei (Fig. 3.44).

Ecuția circuitului electric, aplicînd legea conducției electrice în circuitul din Fig. 3.44, este

$$U = E - RI \tag{3.44}$$

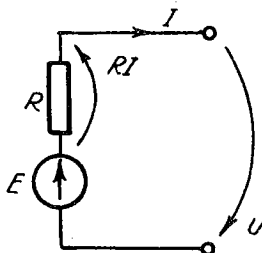


Fig. 3.44. Sursa reală de tensiune.

Caracteristica tensiune - curent este reprezentată de o dreaptă (Figura 3.45).

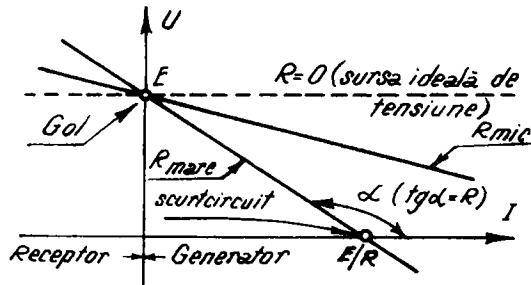


Fig. 3.45. Caracteristica tensiune-curent a sursei reale de tensiune.

Punctul de intersecție cu axa tensiunii ($U = E$; $I = 0$) reprezintă cazul în care sursa nu debitează curent (funcționarea în gol).

La intersecția cu axa curentului ($U = 0$; $I = \frac{E}{R}$) se află punctul care reprezintă cazul în care sursa debitează cel mai mare curent (funcționare în scurtcircuit). Panta dreptei $\tan \phi = R$ reprezintă valoarea rezistenței interne a sursei.

În Fig. 3.45, s-a prezentat prin linie întreruptă caracteristica tensiune curent corespunzătoare regimului de funcționare al sursei ideale de tensiune ($R = 0$). De asemenea s-a indicat regimul de funcționare - generator - al sursei de tensiune ($I > 0$) și regimul de funcționare - receptor - ($I < 0$).

3.11.5. Sursa reală de curent.

Ca și în cazul sursei reale de tensiune, nu există o sursă ideală de curent în realitate. Sursa reală de curent posedă o rezistență internă diferită de ∞ , circuitul fiind alcătuit în acest caz dintr-o sursă ideală de curent legată în paralel cu un rezistor a cărei rezistență electrică este egală cu rezistența internă a sursei (Fig. 3.46).

Ecuția circuitului electric corespunzător Fig. 3.46 este:

$$I = I_g - \frac{U}{R} \quad (3.45)$$

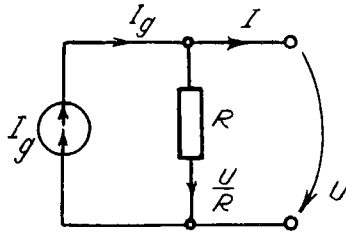


Fig. 3.46. Sursa reală de curent.

Caracteristica tensiune - curent este de asemenea o dreaptă (Fig. 3.47).

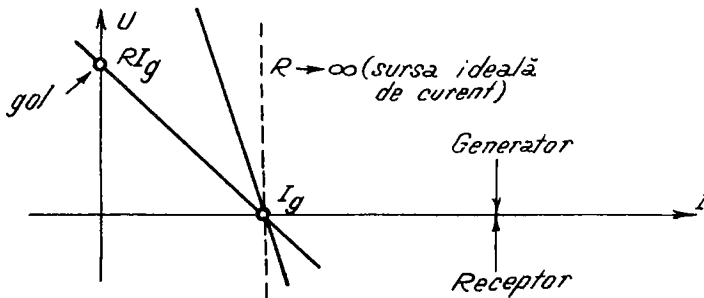


Fig. 3.47. Caracteristica tensiune-curent a sursei reale de curent.

Punctul de intersecție al caracteristicii tensiune-curent cu axa tensiunii ($I=0$; $U=RIg$) reprezintă cazul în care sursa nu debitează curent în exterior (funcționarea în gol).

La intersecția caracteristicii tensiune-curent cu axa curentului ($I = I_g$; $U = 0$) se obține punctul care redă cazul în care sursa debitează

curentul maxim în exterior (funcționare în scurtcircuit). S-a reprezentat în Fig. 3.47 prin linie întreruptă, caracteristica unei surse ideale de curent ($R \rightarrow \infty$).

De asemenea, s-a indicat regimul-generator-al sursei ($U > 0$) și regimul-receptor - al sursei ($U < 0$).

3.11.6. Echivalența surselor electrice.

Două surse sînt echivalente, dacă prin substituirea uneia cu cealaltă, curentul și tensiunea la borne nu se modifică.

Astfel o sursă reală cu caracteristică tensiune-curent liniară poate fi reprezentată fie printr-o sursă de tensiune, fie printr-o sursă de curent.

Dacă se consideră o sursă de tensiune avînd tensiunea electromotoare E și rezistența internă R , aceasta se poate înlocui cu o sursă de curent avînd curentul I_g și rezistența internă tot R numai cînd:

$$E = R I_g . \quad (3.46)$$

Pentru a demonstra această echivalență, redată schematic în Fig. 3.48, se scriu ecuațiile caracteristicilor tensiune-curent.

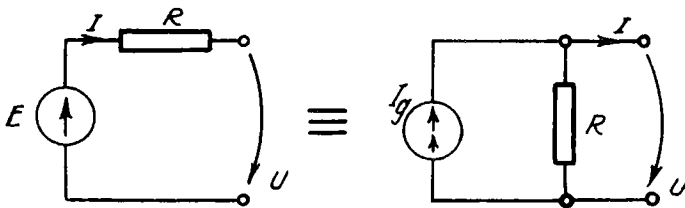


Fig. 3.48. Echivalența sursei de tensiune cu sursa de curent.

$U = E - RI$ și $I = I_g - \frac{U}{R}$. Se observă că cele două relații sînt identice numai în cazul în care relația (3.46) este îndeplinită.

3.11.7. Legarea surselor electrice ideale

La legarea în serie a două surse ideale de tensiune, curentul se păstrează dar tensiunea la borne U este suma tensiunilor la bornele surselor:

$$U = E_1 + E_2 \quad (3.47)$$

Prin urmare: două surse ideale de tensiune legate în serie sînt echivalente cu o singură sursă ideală de tensiune avînd tensiunea electromotoare egală cu suma tensiunilor electromotoare (Fig. 3.49).

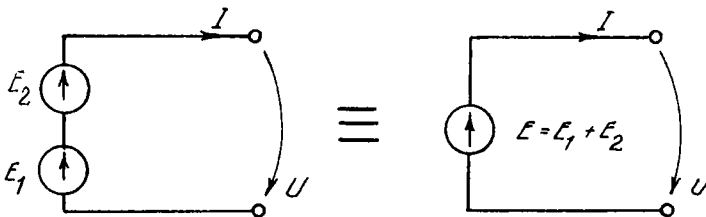


Fig. 3.49. Echivalența legării în serie a două surse ideale de tensiune.

Legarea în serie a două surse ideale de curent (Fig. 3.50) se realizează numai cînd au același curent generat.

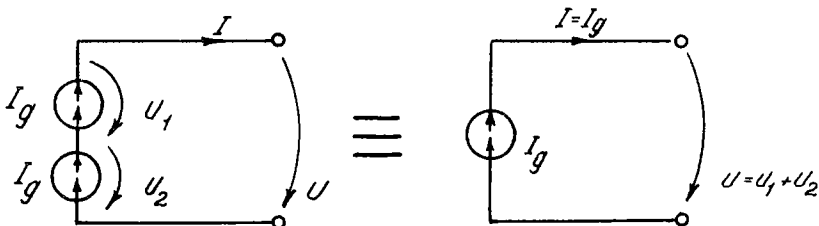


Fig. 3.50. Echivalența legării în serie a două surse ideale de curent.

Tensiunea U la borne este suma tensiunilor la bornele surselor de curent:

$$U = U_1 + U_2 \quad (3.48)$$

Legarea în paralel a două surse ideale de tensiune poate fi realizată dacă au aceeași tensiune electromotoare (Fig. 3.51).

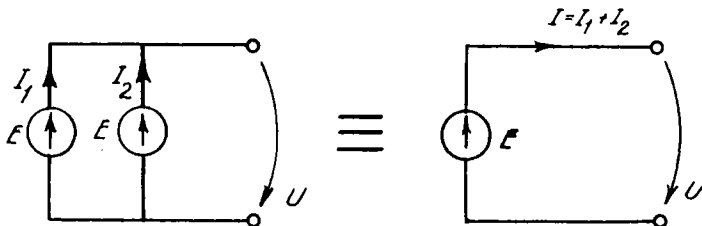


Fig.3.51. Echivalența legării în paralel a două surse ideale de tensiune.

Tensiunea la borne este egală cu tensiunea electromotoare.

$$U = E. \quad (3.49)$$

Curentul I debitat în exterior pe la borne este suma curenților la bornele surselor de tensiune:

$$I = I_1 + I_2. \quad (3.50)$$

Cînd se leagă în paralel două surse ideale de curent (Fig.3.52) tensiunea la borne este aceeași; curentul I total este suma curenților generați de cele două surse.

Prin urmare: două surse ideale de curent legate în paralel sînt echivalente cu una singură pentru care curentul generat este suma curenților componenți.

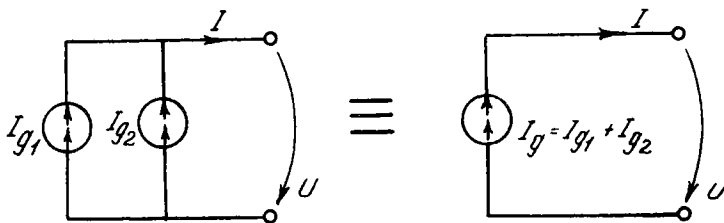


Fig. 3.52. Echivalența legării în paralel a două surse ideale de curent.

3.12. Elementele topologice ale circuitelor de curent continuu

Elementele ideale de circuit: sursele ideale și rezistorul ideal sînt legate într-un circuit electric în cele mai diferite moduri. Această legare (interconectare) dă naștere unor noi elemente, denumite elemente topologice de circuit și care se definesc după cum urmează:

Nod este punctul de ramificație al circuitului electric (Fig. 3.53). Sensul de referință va fi sensul de ieșire din nod. Numărul de noduri al unui circuit electric se notează cu N .

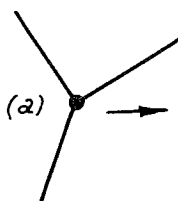


Fig. 3.53. Nod.

Latură este o cale de curent a circuitului electric cuprinsă între două noduri. (Fig. 3.54).

În latură pot exista și elemente ideale de circuit; surse și rezistoare.

Sensul de referință al laturii indicat pe schema electrică a circuitului este sensul curentului prin latură dacă aceasta conține un rezistor, sensul tensiunii electromotoare dacă latura conține numai generator ideal de tensiune și sensul curentului de scurtcircuit dacă latura conține numai generator ideal de curent. Numărul de laturi al unui circuit electric se notează cu L .



Fig. 3.54. Latură.

Ochi este o succesiune închisă de laturi dintr-un circuit (Fig. 3.55)

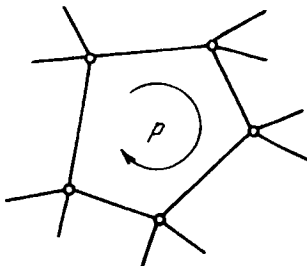


Fig. 3.55. Ochi.

Sensul de referință al ochiului este ales arbitrar și indicat pe schema electrică a circuitului.

Sistem de ochiuri independente reprezintă un ansamblu de ochiuri care se determină în următorul mod: se alege un ochi oarecare ca prim ochi independent; se determină în continuare, pe rând, câte un ochi independent de cele formate deja, respectând regula ca noul ochi să aibă cel puțin o latură care să nu aparțină vreunui din ochiurile deja constituite; determinarea ochiurilor independente este terminată atunci când fiecare latură a circuitului face parte cel puțin dintr-un ochi independent.

Numărul de ochiuri independente al sistemului stabilit pentru un circuit electric se notează cu o .

Între numărul de noduri N , numărul de laturi L și numărul de ochiuri independente o , există o relație matematică:

$$o = L - N + 1 \quad (3.51)$$

cunoscută sub numele de teorema lui Euler.

3.13. Teoremele lui Kirchhoff pentru circuite de curent continuu

Între mărimile electrice - tensiuni electromotoare, tensiuni electrice și curenți electrice - caracteristice ale unui circuit electric de curent continuu, există anumite relații matematice cunoscute sub denumirea de teoremele lui Kirchhoff.

3.13.1. Teorema întâi a lui Kirchhoff

Este o consecință a legii conservării sarcinii electrice (3.13).

Enunțul este următorul: suma algebrică a intensităților curenților prin laturile legate într-un nod de circuit este egală cu zero.

$$\sum_{k \in a} I_k = 0 \quad (3.52)$$

Suma se referă la toți curenții din laturile legate la nod. Aceasta este precizată prin notația $k \in a$: se citește: pentru orice latură k aparținând nodului a . În relația respectivă, semnele termenilor se adoptă în conformitate cu regula precizată în Fig. 3.56 (convenția poate fi inversată).

Se demonstrează că într-un circuit cu N noduri, se scriu numai $N-1$ ecuații cu teorema întâi a lui Kirchhoff. În acest scop se consideră circuitul electric din Fig. 3.57.

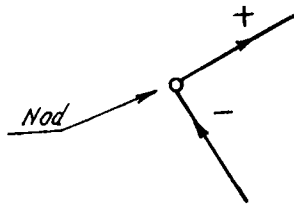


Fig.3.56. Convenția pentru semnele curenților.

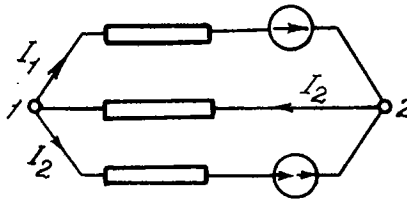


Fig.3.57. Circuit cu două noduri.

Se aplică nodului 1 și apoi nodului 2, teorema întâi a lui Kirchhoff;

$$\text{nodul 1 : } I_1 - I_2 + I_3 = 0;$$

$$\text{nodul 2 : } -I_1 + I_2 - I_3 = 0;$$

aceeași ecuație pentru nodul 2 ca și pentru nodul 1. Într-un circuit cu $N = 2$ noduri, teorema întâi a lui Kirchhoff determină $2 - 1 = 1$ ecuație distinctă. Dacă se extinde la rețele cu mai multe noduri acest raționament, se obține că pentru un circuit electric cu N noduri se pot scrie numai $N-1$ ecuații distincte, adică:

$$\sum_{k \in a} I_k = 0, \text{ în care } a = 1, 2, \dots, N-1$$

3.13.2. Teorema a doua a lui Kirchhoff

Pentru un ochi de circuit se demonstrează că:

$$\sum_{k \in p} R_k I_k + \sum_{k \in p} U_k = \sum_{k \in p} E_k \quad (3.53)$$

adică: suma algebrică a căderilor de tensiune pe elementele din laturile unui ochi de circuit este egală cu suma algebrică a tensiunilor electromotoare din laturile ochiului considerat.

Notarea $k \in p$ se citește: „pentru toate laturile k aparținând ochiului p ”.

În expresia matematică a teoremei a doua a lui Kirchhoff, termenii care apar au semnificația următoare:

$R_k I_k$ reprezintă tensiunea la bornele rezistorului R din latura k sau căderea de tensiune pe acest rezistor;

U_k reprezintă tensiunea la bornele generatorului de curent din latura k ;

E_k reprezintă tensiunea electromotoare a sursei ideale de tensiune din latura k .

Semnele termenilor se adoptă în raport cu sensul de referință al ochiului (Fig. 3.58).

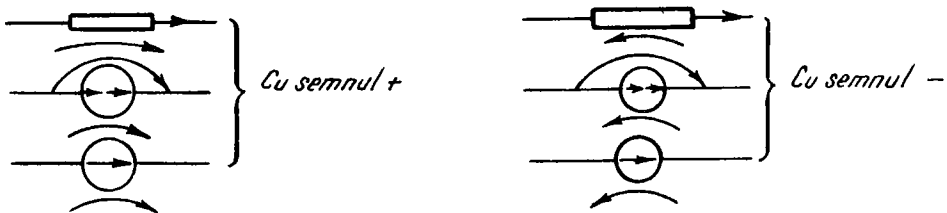


Fig. 3.58. Semnele termenilor adoptate.

Căderile de tensiune din membrul întâi se scriu cu semnul plus, când curenții care le generează au același sens cu sensul de referință al ochiului și cu semnul minus în caz contrar.

Tensiunile la bornele generatoarelor ideale de curent se scriu cu semnul plus când sensul lor are același sens cu sensul de referință al ochiului și cu semnul minus în caz contrar.

În fine, tensiunile electromotoare ale surselor ideale de tensiune se scriu cu semnul plus când sensul lor are același sens cu sensul de referință al ochiului și cu semnul minus în caz contrar.

Exemplu. Pentru circuitul electric din Fig. 3.59 se vor scrie ecuațiile corespunzătoare teoremelor Kirchhoff.

Circuitul are $L = 6$ laturi și $N = 3$ noduri. Rezultă $0 = L - N + 1 = 6 - 3 + 1 = 4$ ochiuri independente.

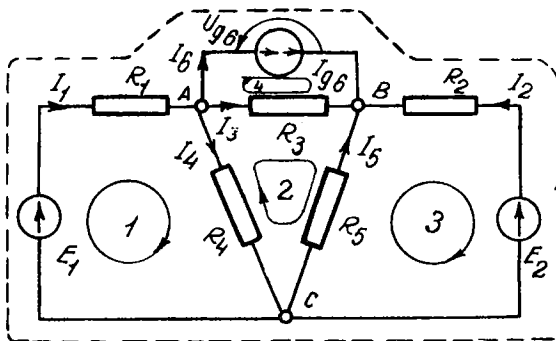


Fig. 3.59. Circuit electric cu $N = 3$ și $L = 6$.

Ecuatiile obținute prin aplicarea celor două teoreme ale lui Kirchhoff sînt:

$$\begin{array}{l} N - 1 = \\ 3 - 1 = 2 \\ \text{ecuații} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} - I_1 + I_3 + I_4 + I_{g6} = 0 & \text{nodul A} \\ - I_2 - I_3 - I_5 - I_{g6} = 0 & \text{nodul B} \end{array} \right. \quad (3.54)$$

$$\begin{cases}
 R_1 I_1 + R_4 I_4 = E_1 & \text{ochiul 1} \\
 R_3 I_3 - R_4 I_4 - R_5 I_5 = 0 & \text{ochiul 2} \\
 - R_2 I_2 + R_5 I_5 = - E_2 & \text{ochiul 3} \\
 - R_3 I_3 - U_{g6} = 0 & \text{ochiul 4}
 \end{cases} \quad (3.55)$$

Să explicăm mai în detaliu modul de aplicare a teoremelor Kirchhoff, în nodul A, s-a înlocuit $I_6 = I_{g6}$ în care I_{g6} este curentul debitat de sursa ideală de curent. Curentul I_1 s-a scris cu minus pentru că intră în nod, ceilalți curenți I_3 , I_4 și I_{g6} s-au scris cu plus pentru că ies din nod.

În nodul B, toți curenții I_2 , I_3 , I_5 și I_{g6} intră în nod și s-au scris cu minus. Pentru nodul C nu s-a mai scris teorema întâi a lui Kirchhoff pentru că într-un circuit se scriu $N-1$ ecuații. Se putea scrie în locul ecuației pentru nodul A sau în locul ecuației pentru nodul B.

Teorema a doua a lui Kirchhoff s-a scris pentru ochiul independent 1 astfel: la prima parcurgere a ochiului se constată că tensiunea $R_1 I_1$ are semnul plus fiindcă sensul curentului I_1 coincide cu sensul de referință al ochiului. Din același motiv s-a scris cu semnul plus și căderea de tensiune $R_4 I_4$. La a doua parcurgere a ochiului 1, pentru a scrie membrul doi al ecuației, tensiunea electromotoare va fi scrisă cu semnul plus pentru că sensul acesteia este la fel cu sensul de referință al ochiului. Se procedează asemănător pentru ochiul 2 și 3, observând că termenii $R_4 I_4$, $R_5 I_5$ din ecuația scrisă pentru ochiul 2 și $R_2 I_2$ pentru ochiul 3 s-au scris cu semnul minus pentru că curenții I_4 , I_5 și I_2 care provoacă căderile de tensiune respective au sensuri contrare cu sensurile de referință ale ochiurilor.

În ultima ecuație scrisă pentru ochiul 4, apare termenul U_{g6} care reprezintă tensiunea la bornele generatorului ideal de curent I_{g6} din latura 6. Această tensiune s-a scris cu semnul minus pentru că este contrară cu sensul de referință al ochiului 4. Termenul doi al ecuației este zero deoarece în laturile care aparțin ochiului 4, lipsesc sursele de tensiune electromotoare.

Se putea scrie teorema a doua a lui Kirchhoff pentru ochiul figurat cu linie întreruptă în locul oricărei ecuații scrise cu teorema a doua a lui

Kirchhoff, astfel că numărul de ecuații scrise cu teorema a doua a lui Kirchhoff să rămână egal cu o.

Această ecuație se scrie astfel:

$$- R_1 I_1 + R_2 I_2 + U_{g6} = - E_1 + E_2 \quad (3.56)$$

Pentru ca sistemul de ecuații să fie complet determinat este necesar și suficient ca numărul de ecuații să fie egal cu numărul de necunoscute.

În exemplul nostru, numărul de ecuații este egal cu 6 și numărul de necunoscute este egal cu numărul de laturi L , adică $L = 6$, cu precizarea că în latura 6, necunoscută nu mai este curentul ca în celelalte laturi; este tensiunea la bornele generatorului de curent I_{g6} .

Prin urmare, pentru determinarea necunoscutelor se scriu $N-1$ ecuații cu teorema întâi a lui Kirchhoff și o ecuație cu teorema a doua a lui Kirchhoff; rezultă un sistem de ecuații algebrice liniare cu :

$$N - 1 + o = N - 1 + L - N + 1 = L$$

ecuații cu L necunoscute.

Sistemul este complet determinat dacă nu există ochi format numai din generatoare ideale de tensiune și nod în care concură numai generatoare ideale de curent.

3.14. Puteri în circuite de curent continuu

Dacă într-un circuit de curent continuu se efectuează bilanțul puterilor, se constată conservarea acestora, adică puterile debitate de surse sînt disipate în rezistoare sau acumulate în alte surse ale circuitului electric sub o altă formă de energie.

Să efectuăm bilanțul de puteri pentru circuitul din Fig. 3.60 în care s-a considerat că sursele E_1 și E_2 sînt ideale (rezistențe interne neglijabile) și rezistorul de rezistență electrică R s-a plasat în circuit pentru limitarea curentului. Acest circuit electric reprezintă un montaj de încărcarea unui acumulator de la un redresor.

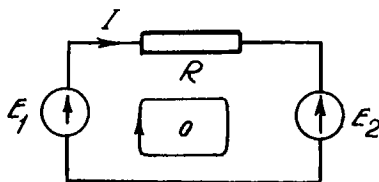


Fig. 3.60. Ochi cu două surse.

Ecuția scrisă cu teorema a doua a lui Kirchhoff este:

$$RI = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \quad (3.57)$$

Se înmulțește cu I în ambi membri. și rezultă prin regruparea termenilor

$$\mathcal{E}_1 I = \mathcal{E}_2 I + RI^2 \quad (3.58)$$

care se interpretează astfel:

Puterea $\mathcal{E}_1 I$ debitată de sursa \mathcal{E}_1 este egală cu puterea disipată în rezistorul R (care se încălzește) și puterea primită de sursa \mathcal{E}_2 (acumulatorul se încarcă).

Bilanțul puterilor dintr-un circuit de curent continuu este dat de teorema conservării puterilor în circuite de curent continuu prin ecuația următoare:

$$\sum_{k=1}^L R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^L (\mathcal{E}_k I_k + U_{gk} I_{gk}) \quad (3.59)$$

Enunțul este următorul:

Suma puterilor consumate de toate rezistoarele circuitului este egală cu suma puterilor generate de toate generatoarele ideale de tensiune și de curent ale circuitului electric.

Termenii din membrul stîng sînt totdeauna pozitivi; termenii din membrul drept se scriu cu semnul plus sau minus conform regulilor prezentate în Fig. 3.61 .

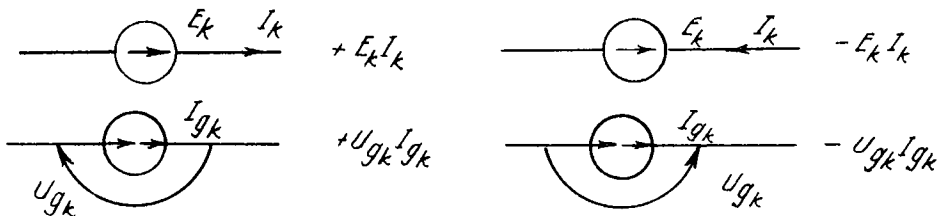


Fig. 3. 61. Reguli de scriere a puterilor debitate sau primite de surse.

3.15. Teorema transferului maxim de putere

Un generator real de tensiune electromotoare E și rezistență internă R_i sau un generator real de curent I_g și rezistență internă R_i transferă o putere maximă receptorului de rezistență R_s atunci când rezistența acestuia este egală cu rezistența internă a generatorului:

$$R_s = R_i \quad (3.60)$$

Puterea maximă transferată are expresia

$$P_{\max} = \frac{E^2}{4 R_i} \quad (3.61)$$

în cazul generatorului real de tensiune și

$$P_{\max.} = \frac{R_i I_g^2}{4} \quad (3.62)$$

în cazul generatorului real de curent,

Considerăm un generator real de tensiune electromotoare E și rezistență internă R_i care alimentează un rezistor avînd rezistența R_s reglabilă (Fig. 3.62).

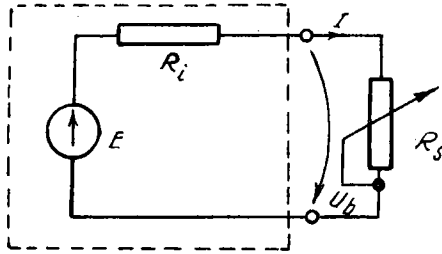


Fig. 3.62. Generator de tensiune E alimentează rezistența reglabilă R_s .

Pentru a studia transferul de putere din circuit se calculează mai întâi curentul I din circuit:

$$I = \frac{E}{R_i + R_s} \quad (3.63)$$

Puterea disipată în rezistorul de sarcină va fi:

$$P = R_s I^2 = \frac{R_s E^2}{(R_i + R_s)^2} = \frac{E^2}{R_i \left(2 + \frac{R_s}{R_i} + \frac{R_i}{R_s} \right)} \quad (3.64)$$

Se observă că în cazurile în care rezistorul de sarcină R_s este scurt-circuitat ($R_s = 0$) sau întrerupt ($R_s \rightarrow \infty$), puterea P este zero ($P = 0$).

Puterea P va fi maximă, atunci când numitorul expresiei de mai sus va fi minim. Acesta este minim atunci când $R_s = R_i$, caz în care puterea transformată P devine maximă adică:

$$P_{\max} = \frac{E^2}{4 R_i}$$

Analog se determină puterea transferată maximă și în cazul în care generatorul este de curent (Fig. 3.63).

Se obține:

$$P_{\max} = \frac{R_i I_g^2}{4}$$

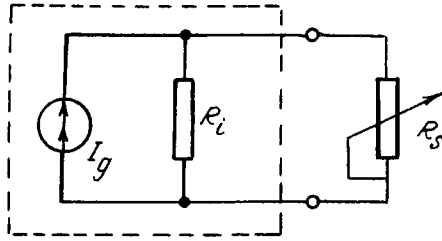


Fig. 3.63. Generator de curent I_g alimentează rezistența reglabilă R_s .

Reprezentată grafic variația puterii P transferată de generator și disipată se prezintă conform Fig. 3.64.

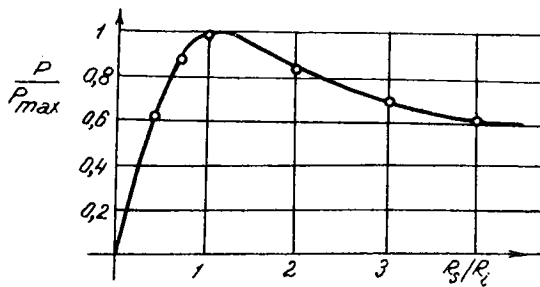


Fig. 3.64. Variația puterii transferată de generator.

În grafic s-au utilizat pentru ordonată și abscisă mărimi relative. Pe axa absciselor s-a reprezentat raportul dintre rezistența de sarcină și rezistența internă a generatorului $\frac{R_s}{R_i}$ iar pe axa ordonatelor s-a reprezentat raportul dintre puterea disipată în rezistența de sarcină și valoarea sa maximă

$$\frac{P}{P_{max}} = \frac{4}{2 + \frac{R_s}{R_i} + \frac{R_i}{R_s}} \quad (3.65)$$

Dacă se calculează randamentul transferului de putere de la sursă la receptor ca raport între puterea disipată în sarcină și puterea generată de sursă, în procente, se obține:

$$\eta = 100 \frac{P}{P_g} = 100 \frac{R_s I^2}{E I} = 100 \frac{R_s}{R_i + R_s} (\%) \quad (3.66)$$

Cînd transferul de putere este maxim, randamentul este mic, egal cu 50%.

$$R_i = R_s \Rightarrow P = P_{\max} \text{ și } \eta = 100 \frac{R_i}{R_i + R_i} = 50\%$$

Puterea maximă se obține numai la un randament redus. Se obține randament ridicat, atunci cînd rezistența internă este mică comparativ cu rezistența de sarcină ($R_i \ll R_s$).

În acest caz:

$$\eta \approx 100 \left(1 - \frac{R_i}{R_s} \right). \quad (3.67)$$

Dacă $R_i = 0$ (generator ideal), randamentul este maxim (100%).

Pentru a obține randamentul $\eta = 95\%$ (caz real) este necesar ca $R_s > 20 R_i$.

3.16. Metode de rezolvare a circuitelor liniare de curent continuu

Rezolvarea circuitelor liniare de curent continuu presupune determinarea unor mărimi electrice necunoscute avînd însă o parte din mărimile caracteristice ale circuitului date.

Cele mai răspîndite probleme care se cer rezolvate sînt acelea în care trebuie:

- Să se determine curenții cînd sînt date rezistențele rezistoarelor, rezistențele interne ale surselor și tensiunilor electromotoare ale surselor.

Sau:

- Să se determine curenții din laturi și tensiunile la bornele surselor de curent cînd sînt cunoscute rezistențele rezistoarelor, rezistențele interne ale surselor de tensiune și surselor de curent, tensiunile electromotoare ale surselor de tensiune și curenții debitați de sursele de curent.

Se mai întîlnesc și următoarele probleme:

- Să se determine tensiunile electromotoare ale surselor de tensiune și curenții surselor de curent cînd sînt cunoscute rezistențele rezistoarelor, rezistențele interne ale surselor și curenții din laturi și tensiunile surselor de curent.

- Probleme combinate.

Cînd sursele de tensiune și curent ale circuitului electric de curent continuu sînt ideale, rezistențele lor interne sînt cunoscute, egale cu zero respectiv infinit și nu mai sînt precizate în enunțul problemei.

Calea de rezolvare a circuitului electric liniar se parcurge conform unor metode de rezolvare, cele mai multe din acestea avînd la bază ecuațiile scrise cu ajutorul teoremelor Kirchhoff.

Aceste metode sînt:

- Metoda teoremelor Kirchhoff.
- Metoda superpoziției.
- Metoda curenților ciclici.
- Metoda tensiunilor la noduri.

Pentru cazurile în care se cere determinarea unui singur curent printr-o latură pasivă a unui circuit electric izolat sau curentul debitat în exterior de un circuit electric de curent continuu dipolar se aplică:

- Metoda generatoarelor echivalente de tensiune și curent.

Pentru simplificarea circuitului electric de curent continuu, s-au imaginat de asemenea metode care determină un alt circuit electric, echivalent însă celui inițial. Ultimul circuit electric obținut capătă însușirea de a fi rezolvat cu una din metodele enumerate dar prin aplicarea unui număr redus de ecuații față de circuitul electric inițial.

Metodele de simplificare sînt:

- Metoda rezistențelor echivalente.
- Metoda transfigurării din triunghi în stea și reciproc.
- Metoda teoremei lui Vachy.

Pentru verificarea rezultatelor obținute în urma rezolvării circuitului electric de curent continuu, se efectuează bilanșul puterilor prezentat anterior la paragraful 3.14.

3.16.1. Metoda teoremelor lui Kirchhoff.

După cum s-a prezentat anterior, prin teorema întâi și a doua a lui Kirchhoff, se stabilesc relații de funcționare ale circuitelor electrice de curent continuu, datele care apar în aceste relații fiind mărimi electrice, caracteristici ale circuitelor respective.

Pentru utilizarea corectă a metodei, se procedează astfel:

a) Se stabilesc numărul de noduri, numărul de laturi și numărul de ochiuri fundamentale.

Curenții și tensiunile necunoscute se notează cu majuscule și indici corespunzători laturilor aferente.

b) Se atribuie curenților din laturi și tensiunilor de la bornele surselor de curent, pe schema circuitului electric, sensuri arbitrare.

Se presupun cunoscute tensiunile electromotoare ale surselor de tensiune și curenții surselor de curent. Dacă în urma rezolvării ecuațiilor, curenții sau tensiunile apar cu semne negative, sensul real al curenților este opus sensului de referință atribuit. Se notează nodurile pe schema electrică.

c) Se stabilesc ochiurile independente și se atribuie sensuri de referință arbitrare acestor ochiuri pe aceeași schemă electrică. Se notează tot pe schema electrică, ochiurile independente.

d) Se scriu pentru noduri $N-1$ ecuații cu teorema întâi a lui Kirchhoff și pentru ochiurile independente $0 = L - N + 1$ ecuații cu teorema a doua a lui Kirchhoff.

La aplicarea teoremei a doua a lui Kirchhoff, trebuie să se parcurgă tot ochiul independent în același sens de referință arbitrar ales. Căderile de tensiune $R_k I_k$ se scriu cu plus în relația (3.53) dacă sînt parcurse în sensul lor și cu semnul minus, în caz invers. Tensiunile de la bornele surselor de curent (generatoarelor de curent) se scriu cu plus dacă sensul coincide cu

sensul de referință al ochiului independent și cu semnul minus dacă sensul nu coincide. Tensiunile electromotoare se scriu cu plus dacă sensul lor coincide cu sensul de referință al ochiului independent și cu minus în caz contrar.

e) Pe schema electrică simplificată (fără elemente dipolare de circuit) se trasează curenții și tensiunile electrice presupuse inițial necunoscute astfel: dacă sensul curentului sau tensiunii se obține în urma rezolvării sistemului de ecuații cu semnul plus, atunci sensul arbitrar ales inițial este real și sensul se păstrează. Dacă semnul este negativ, sensul arbitrar ales nu este cel real și în schema electrică simplificată se trasează invers sensului arbitrar ales inițial.

f) Se verifică aplicarea corectă a teoremelor lui Kirchhoff și a calculului numeric efectuat, cu bilanțul puterilor prezentat în paragraful 3.14.

Aplicația 1. Să se rezolve circuitul din Fig. 3.65.

Se vor verifica rezultatele cu bilanțul puterilor.

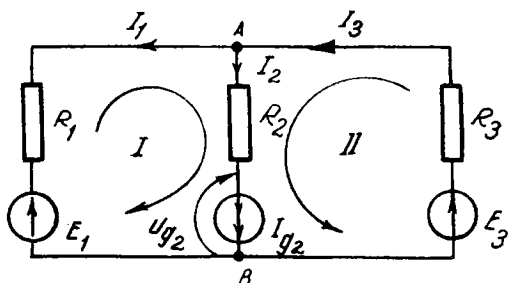


Fig. 3.65. Circuit electric cu $N = 2$ și $L = 3$.

Date:

- Tensiunile electromotoare.

$$E_1 = 15 \text{ V} ; \quad E_3 = 20 \text{ V} .$$

- Curenții generatoarelor de curent.

$$I_{g_2} = 3 \text{ A} .$$

- Rezistențele rezistoarelor electrice .

$$R_1 = 3 \Omega \quad ; \quad R_2 = 5 \Omega \quad ; \quad R_3 = 4 \Omega .$$

Necunoscute:

- Curenții din laturi : I_1 ; I_3 .

- Tensiunea la bornele generatorului de curent : U_{g_2} .

Mod de rezolvare.

Circuitul electric are $N = 2$; $L = 3$; $o = L - N + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$

a) Se notează, cu majuscule și indici corespunzători laturilor aferente, necunoscutele: I_1 , I_3 și U_{g_2} .

b) În schema electrică, se atribuie sensuri de referință arbitrare curenților din laturi și tensiunilor la bornele generatoarelor de curent. Se notează nodurile cu A și B.

c) În schema electrică, se atribuie sensuri arbitrare ochiurilor independente și se notează cu I și II.

d) Se scriu pentru noduri $N - 1 = 2 - 1 = 1$ ecuații cu teorema întâi a lui Kirchhoff,

$$\sum_{k \in a} I_k = 0$$

adică:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \text{ pentru nodul A}$$

Se scriu pentru ochiuri independente:

$o = L - N + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$ ecuații cu teorema a doua a lui Kirchhoff.

$$\sum_{k \in p} R_k I_k + \sum_{k \in p} U_k = \sum_{k \in p} E_k$$

adică:

$$- R_1 I_1 + R_2 I_2 - U_{g2} = E_1 \quad (3.68)$$

$$R_2 I_2 + R_3 I_3 - U_{g2} = E_3$$

Se înlocuiesc datele cu valori numerice în ecuațiile respective avînd în vedere și înlocuirea $I_2 = I_{g2} = 3 \text{ A}$.

Se obține următorul sistem de ecuații:

$$I_1 + 3 - I_3 = 0$$

$$- 3 I_1 + 5.3 - U_{g2} = 15$$

$$5.3 + 4 I_3 - U_{g2} = 20$$

Se înmulțește ecuația 2^a cu - 1 și se adună cu ecuația 3^a. Se obține:

$$3 I_1 + 4 I_3 = 5 .$$

Se înlocuiește $I_3 = I_1 + 3$ din ecuația 1^a și se obține:

$$3 I_1 + 4 (I_1 + 3) = 5$$

sau

$$7 I_1 = - 7. \text{Rezultă } I_1 = - 1 \text{ A} .$$

Din ecuația 1^a rezultă $I_3 = I_1 + 3 = - 1 + 3 = 2 \text{ A} .$

Tensiunea la bornele generatorului de curent U_{g2} rezultă din ecuația 2^a:

$$U_{g2} = - 3 (-1) + 15 - 15 = 3 \text{ V} .$$

e) Pe schema electrică simplificată din Fig. 3.66 se trasează curenții și tensiunile presupuse inițial necunoscute. Curentul I_1 are sens contrar celui inițial acceptat.

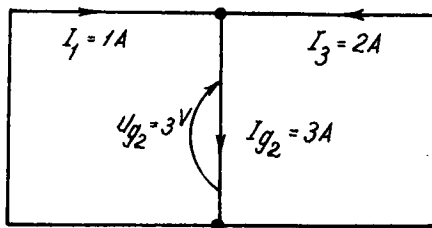


Fig.3.66. Curenții obținuți prin rezolvarea circuitului electric (Fig.3.65).

f) Verificarea aplicării corecte a teoremelor lui Kirchhoff și a calculului numeric efectuat se face cu bilanțul puterilor.

$$\sum_{k=1}^L R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^L (E_k I_k + U_{g_k} I_{g_k})$$

(3.69)

$$R_1 I_1^2 + R_2 I_{g_2}^2 + R_3 I_3^2 = E_1 I_1 + E_3 I_3 + U_{g_2} I_{g_2}$$

Termenii din membrul doi s-au luat cu plus conform regulilor prezentate în paragraful 3.14; Fig. 3.61.

Se înlocuiește și se obține:

$$3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 3^2 + 4 \cdot 2^2 = 15 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 3 \cdot 3$$

$$64 \text{ W} = 64 \text{ W}$$

Rezultă că aplicarea teoremelor lui Kirchhoff și efectuarea calculului numeric sînt corecte.

Aplicația 2.

Să se rezolve circuitul electric din Fig.3.67.

Se vor verifica rezultatele cu bilanțul puterilor.

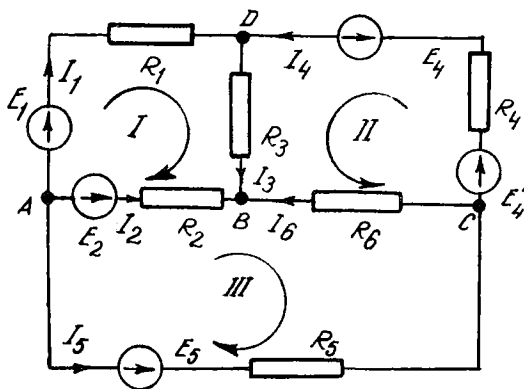


Fig. 3.67. Circuit electric cu $N = 4$ și $L = 6$.

Date:

- Tensiunile electromotoare:

$$E_1 = 300\text{V}; E_2 = 100\text{V}; E_4 = 120\text{V}; E'_4 = 50\text{V}; E_5 = 200\text{V}$$

- Rezistențele rezistoarelor electrice:

$$R_1 = 10\ \Omega; R_2 = 10\ \Omega; R_3 = 5\ \Omega; R_4 = 5\ \Omega; R_5 = 20\ \Omega;$$

$$R_6 = 15\ \Omega.$$

Necunoscute:

- Curenții din laturi :

$$I_1; I_2; I_3; I_4; I_5; I_6.$$

Rezolvare:

Circuitul electric are $N = 4$ noduri, $L = 6$ laturi și

$$o = L - N + 1 = 6 - 4 + 1 = 3 \text{ ochiuri independente.}$$

Se atribuie sensuri de referință arbitrare pentru curenții din laturi și pentru ochiurile independente.

Se scriu $N - 1 = 4 - 1 = 3$ ecuații cu teorema întâi a lui Kirchhoff, pentru nodurile A, C și D.

$$I_1 + I_2 + I_5 = 0 \quad (3.70)$$

$$I_4 - I_5 + I_6 = 0$$

$$-I_1 + I_3 - I_4 = 0$$

Se scriu $0 = 3$ ecuații cu teorema a doua a lui Kirchhoff pentru ochiurile independente I, II și III.

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_1 - E_2$$

$$R_3 I_3 + R_4 I_4 - R_6 I_6 = -E_4 + E_4' \quad (3.71)$$

$$R_2 I_2 - R_5 I_5 - R_6 I_6 = E_2 - E_5$$

Se înlocuiesc datele cu valori numerice în ecuațiile respective: obținem următorul sistem de ecuații:

$$I_1 + I_2 + I_5 = 0$$

$$I_4 - I_5 + I_6 = 0$$

$$-I_1 + I_3 - I_4 = 0$$

$$10 I_1 - 10 I_2 + 5 I_3 = 300 - 100$$

$$5 I_3 + 5 I_4 - 15 I_6 = -120 + 50$$

$$10 I_2 - 10 I_5 - 15 I_6 = 100 - 200$$

Rezolvând sistemul de ecuații se obțin următoarele soluții:

$$I_1 = 10 \text{ A} ; I_2 = - 8 \text{ A} ; I_3 = 4 \text{ A}$$

$$I_4 = - 6 \text{ A} ; I_5 = - 2 \text{ A} ; I_6 = 4 \text{ A}$$

Rezultă că I_1 , I_3 și I_6 circulă în sensurile indicate pe Fig. 3.67; curenții I_2 , I_4 și I_5 circulă în sens contrar.

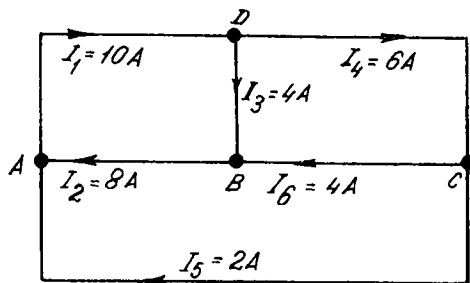


Fig.3.68. Curenții obținuți prin rezolvarea circuitului electric (Fig.3.67).

Pe schema electrică simplificată din Fig.3.68, se trasează curenții cu sensurile lor efective.

Se aplică bilanțul puterilor.

$$R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 =$$

$$E_1 I_1 - E_2 I_2 + E_4 I_4 - E'_4 I_4 - E_5 I_5. \quad (3.72)$$

$$10 \cdot 10^2 + 10 \cdot 8^2 + 5 \cdot 4^2 + 5 \cdot 6^2 + 20 \cdot 2^2 + 15 \cdot 4^2 =$$

$$300 \cdot 10 - 100 \cdot 8 + 120 \cdot 6 - 50 \cdot 6 - 200 \cdot 2$$

$$2 \ 200 \text{ W} \quad = \quad 2 \ 200 \text{ W}.$$

3.16.2. Metoda superpoziției

Se demonstrează că intensitatea curentului într-o latură dată a unui circuit electric este egală cu suma algebrică a curenților din latura respectivă, acești curenți fiind rezultați din calculul succesiv al circuitului electric avînd în funcțiune numai o sursă de tensiune electrică, celelalte fiind pasivizate.

Se înțelege prin pasivizarea sursei, păstrarea în circuit numai a rezistenței sale interne.

Deci, în circuitele electrice intermediare, se păstrează eventualele rezistențe interne ale surselor.

Metoda este avantajoasă că se rezolvă circuite electrice cu o singură sursă, calculul fiind în acest caz mai simplu. Dezavantajul apare la circuitele electrice cu mai multe surse cînd trebuie rezolvate atîtea circuite electrice intermediare cîte surse sînt în circuit.

Aplicație.

Să se rezolve circuitul electric din Fig. 3.69. prin metoda superpoziției.

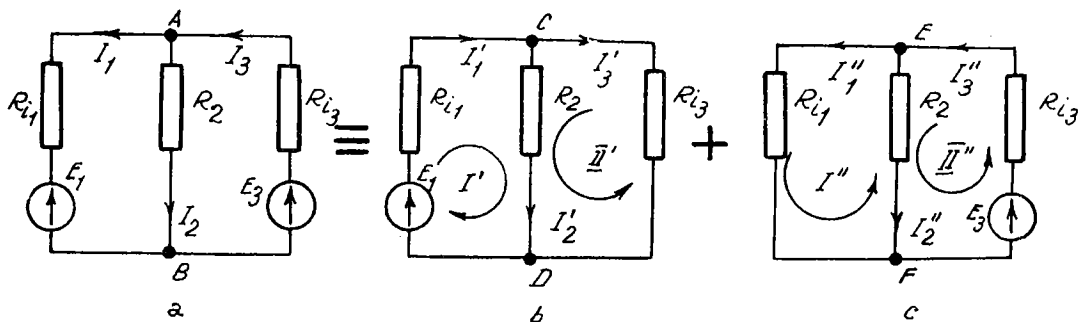


Fig. 3.69. Circuit electric pentru metoda superpoziției.

Date:

- Tensiuni electromotoare $E_1 = 22 \text{ V}$; $E_3 = 26 \text{ V}$

- Rezistențe interne $R_{i1} = 1 \Omega$; $R_{i3} = 2 \Omega$.

- Rezistențele rezistoarelor electrice $R_2 = 4 \Omega$.

Rezolvare:

Se descompune circuitul electric inițial într-o sumă de două circuite care au o singură sursă de tensiune electromotoare. Pentru fiecare din aceste două circuite se cunosc sensurile reale ale curenților stabiliți de sursa respectivă.

Circuitul electric din Fig. 3.69 b

Se aplică metoda teoremelor lui Kirchhoff:

$$I_1' = I_2' + I_3'$$

$$R_{11} I_1' + R_2 I_2' = E_1 \quad (3.73)$$

$$R_2 I_2' - R_{13} I_3' = 0$$

Se înlocuiesc datele cu valori numerice și rezultă sistemul:

$$I_1' = I_2' + I_3'$$

$$1 I_1' + 4 I_2' = 22$$

$$4 I_2' - 2 I_3' = 0$$

Rezolvînd sistemul de ecuații se obțin următoarele soluții:

$$I_1' = \frac{66}{7} \text{ A}; \quad I_2' = \frac{22}{7} \text{ A}; \quad I_3' = \frac{44}{7} \text{ A}.$$

Circuitul electric din Fig. 3.69.c.

Se aplică metoda teoremelor lui Kirchhoff:

$$I_3'' = I_1'' + I_2''$$

$$2 I_3'' + 4 I_2'' = 26$$

$$1 I_1'' - 4 I_2'' = 0$$

Rezolvând și acest sistem de ecuații se obțin soluțiile:

$$I_1'' = \frac{104}{14} \text{ A}; \quad I_2'' = \frac{26}{14} \text{ A}; \quad I_3'' = \frac{130}{14} \text{ A}$$

Curenții prin laturile circuitului electric din Fig. 3.69 a se obțin însumând algebric curenții prin laturile corespunzătoare din circuitele electrice b și c din Fig. 3.69.

Dacă sensurile curenților coincid cu sensul curentului arbitrar ales în circuitul electric dat, se adoptă semnul plus. În caz contrar se scrie cu semnul minus.

$$I_1 = -I_1' + I_1'' = -\frac{66}{7} + \frac{104}{14} = -2 \text{ A}$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' = \frac{22}{7} + \frac{26}{14} = 5 \text{ A}$$

$$I_3 = -I_3' + I_3'' = -\frac{44}{7} + \frac{130}{14} = 3 \text{ A}$$

Rezultă că sensul curentului I_1 adoptat este invers sensului real.

În Fig. 3.70 se trasează pe schema simplificată curenții cu sensurile lor efective.

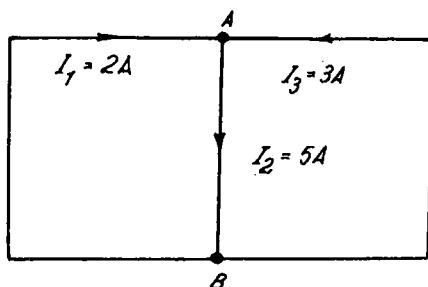


Fig. 3.70. Curenții obținuți prin rezolvarea circuitului electric (Fig. 3.69).

Verificarea se face cu bilanțul puterilor:

$$R_{11} I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_{13} I_3^2 = E_1 I_1 + E_3 I_3$$

$$1 \cdot 2^2 + 4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 3^2 = 22 \cdot 2 + 26 \cdot 3$$

$$122 \text{ W} = 122 \text{ W}$$

3.16.3. Metoda curenților ciclici

Metoda se folosește pentru că simplifică rezolvarea. Dacă la calcularea unui circuit electric cu teoremele lui Kirchhoff trebuia rezolvat un sistem cu L ecuații și tot atâtea necunoscute, prin aplicarea acestei metode, sistemul conține un număr mai mic de ecuații, egal cu o numărul ochiurilor independente. ($o < L$).

Pentru o prezentare mai simplă și o înțelegere a acestei metode se folosește exemplul următor:

Se consideră circuitul electric din Fig. 3. 71.

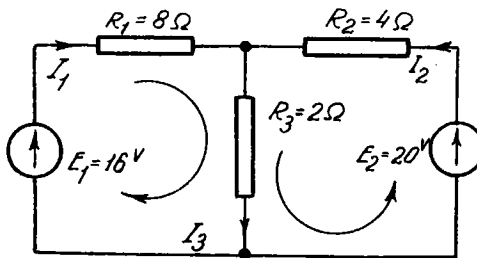


Fig. 3. 71. Circuit electric pentru metoda curenților ciclici.

Aplicând teoremele lui Kirchhoff se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I_3 \\ 8 I_1 + 2 I_3 &= 16 \\ 4 I_2 + 2 I_3 &= 20 \end{aligned}$$

Pentru rezolvarea sistemului de ecuații se va elimina curențul I_3 .
Se obține noul sistem:

$$8 I_1 + 2 (I_1 + I_2) = 16$$

$$4 I_2 + 2 (I_1 + I_2) = 20$$

sau

$$(8 + 2) I_1 + 2 I_2 = 16$$

$$2 I_1 + (4 + 2) I_2 = 20$$

Cu soluțiile $I_1 = 1 \text{ A}$ și $I_2 = 3 \text{ A}$ respectiv $I_3 = 4 \text{ A}$.

Sistemul de două ecuații obținut mai sus se poate obține direct dacă se aleg noi necunoscute astfel ca teorema întâi a lui Kirchhoff să fie satisfăcută. Aceste necunoscute sînt tot curenți dar nu sînt reali, sînt curenți folosiți în calcule. Se numesc curenți ciclici sau de ochiuri.

Acești curenți ciclici trebuie să îndeplinească anumite condiții:

- Să fie asociați ochiurilor independente ale unui circuit electric și să parcurgă toate laturile care alcătuiesc ochiul independent.

- Suma algebrică a curenților ciclici dintr-o latură a circuitului electric reprezintă curențul real din latura respectivă.

- Numărul curenților ciclici dintr-un circuit electric este egal cu numărul ochiurilor independente.

Prin urmare, avantajul acestei metode constă în faptul că numărul ecuațiilor de rezolvat care trebuie să fie egal cu numărul necunoscutelor

- curenții ciclici - este egal cu o - numărul ochiurilor independente. Cum $o \leq L$, numărul laturilor circuitului electric, se înțelege că spre deosebire de metoda teoremelor lui Kirchhoff cînd trebuia să se rezolve L ecuații, în acest caz calculele se simplifică pentru că se rezolvă numai o ecuație.

Pentru circuitul electric din Fig. 3.71, admitem că prin cele două ochiuri independente circulă curenți ciclici I'_1 și I'_2 cu sensurile alese arbitrar din Fig. 3.72.

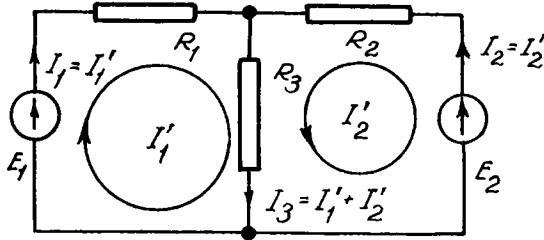


Fig. 3.72. Curenții ciclici prin circuitul electric (Fig. 3.71)

Curenții reali prin laturile circuitului pot fi exprimați prin acești curenți ciclici. Astfel:

$$I_1 = I'_1 \text{ și } I_2 = I'_2 \text{ dar } I_3 = I'_1 + I'_2$$

deoarece prin latura a treia trec ambii curenți ciclici.

Se aplică a doua teoremă a lui Kirchhoff pe ochiurile independente și se obține:

$$8 I'_1 + 2 (I'_1 + I'_2) = 16$$

$$4 I'_2 + 2 (I'_1 + I'_2) = 20$$

sau

$$(8 + 2) I'_1 + 2 I'_2 = 16$$

$$2 I'_1 + (4 + 2) I'_2 = 20$$

Sistemul acesta este identic cu cel obținut prin înlocuirea curentului I_3 . Are însă o interpretare diferită. Ecuațiile în care apar curenții ciclici se pot scrie sub următoarea formă:

$$R_{11} I'_1 + R_{12} I'_2 = E'_1 \quad (3.74)$$

$$R_{21} I'_1 + R_{22} I'_2 = E'_2$$

S-a notat cu R_{11} și R_{22} rezistențele proprii ale ochiurilor, întotdeauna pozitive; sînt suma tuturor rezistențelor din laturile ochiului independent.

S-a notat cu $R_{12} = R_{21}$ rezistența comună a ochiurilor. Aceasta reprezintă suma algebrică a tuturor rezistențelor laturilor comune celor două ochiuri. Se scriu cu plus rezistențele laturilor parcurse în același sens de curenții celor două ochiuri și cu minus cele parcurse în sensuri contrare.

Se notează cu E'_1 și E'_2 tensiunile electromotoare ale ochiurilor independente. Tensiunea electromotoare de ochi reprezintă suma algebrică a tuturor tensiunilor electromotoare din ochiul respectiv și se calculează la fel ca în cazul scrierii teoremei a doua a lui Kirchoff.

Rezolvînd sistemul se obține:

$$I'_1 = 1 \text{ A} \quad \text{și} \quad I'_2 = 3 \text{ A}$$

Dar: $I_1 = I'_1 = 1 \text{ A}$; $I_2 = I'_2 = 3 \text{ A}$ și $I_3 = I'_1 + I'_2 = 1 + 3 = 4 \text{ A}$.

Modul în care se aplică metoda curenților ciclici este următorul:

- a) Se adoptă sensuri arbitrare pentru curenții din laturi.
- b) Se stabilesc ochiurile independente și se trasează sensul curenților ciclici.
- c) Se scriu ecuațiile în care apar curenții ciclici pentru ochiurile independente.
- d) Se rezolvă sistemul de ecuații.
- e) Se determină curenții efectivi din laturi prin însumarea algebrică a curenților ciclici corespunzători.

f) Se trasează și se notează pe schema simplificată curenții efectivi din laturi.

g) Se verifică rezultatele cu bilanțul puterilor.

Aplicația 1.

Să se rezolve circuitul electric din Fig.3.73 prin metoda curenților ciclici.

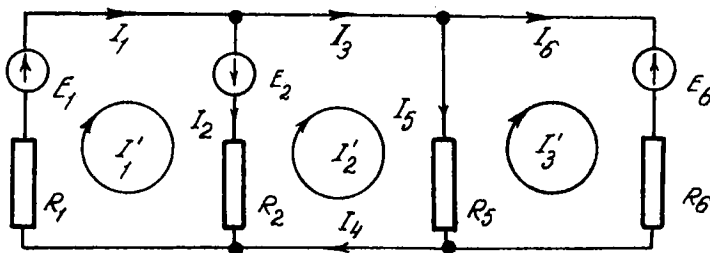


Fig. 3.73. Circuit electric pentru metoda curenților ciclici.

Date:

- Tensiunile electromotoare:

$$E_1 = 105 \text{ V} ; E_2 = 20 \text{ V} ; E_6 = 10 \text{ V}.$$

- Rezistențele rezistoarelor electrice:

$$R_1 = 10 \Omega ; R_2 = 20 \Omega ; R_5 = 10 \Omega ; R_6 = 10 \Omega$$

a și b) S-au adoptat sensuri arbitrare pentru curenții din laturi și sensuri arbitrare pentru curenții ciclici.

c) Numărul ecuațiilor este egal cu $o = L - N + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$.

Se vor scrie ecuațiile în care apar curenții ciclici:

$$R_{11} I'_1 + R_{12} I'_2 + R_{13} I'_3 = E'_1$$

$$R_{21} I'_1 + R_{22} I'_2 + R_{23} I'_3 = E'_2 \quad (3.75)$$

$$R_{31} I'_1 + R_{32} I'_2 + R_{33} I'_3 = E'_3$$

Dar:

$$R_{11} = R_1 + R_2 = 10 + 20 = 30 \, \Omega$$

$$R_{22} = R_2 + R_5 = 20 + 10 = 30 \, \Omega$$

$$R_{33} = R_5 + R_6 = 10 + 10 = 20 \, \Omega$$

$$R_{12} = R_{21} = - R_2 = - 20 \, \Omega$$

$$R_{13} = R_{31} = 0$$

$$R_{23} = R_{32} = - R_5 = - 10 \, \Omega$$

R_{12} și R_{23} respectiv R_{21} și R_{32} au fost scrise cu semnul minus deoarece laturile comune ochiurilor independente 1 și 2 respectiv 2 și 3 sînt parcurse în sensuri contrare de curenții ciclici.

$$E'_1 = E_1 + E_2 = 105 + 20 = 125 \, V$$

$$E'_2 = - E_2 = - 20 \, V$$

$$E'_3 = - E_6 = - 10 \, V$$

Valorile E'_2 și E'_3 sînt negative deoarece au sensuri contrare sensurilor curenților ciclici.

Prin înlocuire se obține:

$$30 \, I'_1 - 20 \, I'_2 = 125$$

$$- 20 \, I'_1 + 30 \, I'_2 - 10 \, I'_3 = - 20$$

$$- 10 \, I'_2 + 20 \, I'_3 = - 10$$

Soluțiile sistemului sînt:

$$I'_1 = 7,5 \text{ A} ; I'_2 = 5 \text{ A} ; I'_3 = 2 \text{ A}$$

Curenții efectivi din laturi rezultă:

$$I_1 = I'_1 = 7,5 \text{ A} ; I_2 = I'_1 - I'_2 = 7,5 - 5 = 2,5 \text{ A}$$

$$I_3 = I'_2 = 5 \text{ A} ; I_4 = I'_2 = 5 \text{ A} ; I_5 = I'_2 - I'_3 = 5 - 2 = 3 \text{ A}$$

$$\text{și } I_6 = I'_3 = 2 \text{ A}$$

S-au figurat în schema simplificată curenții efectivi cu sensurile lor (Fig. 3. 74).

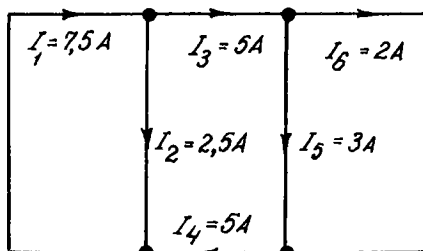


Fig. 3. 74. Curenții obținuți prin rezolvarea circuitului electric (Fig. 3. 73).

Verificarea rezultatelor se face cu bilanțul puterilor.

$$R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 =$$

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 - E_6 I_6$$

sau:

$$10 \cdot 7,5^2 + 20 \cdot 2,5^2 + 10 \cdot 3^2 + 10 \cdot 2^2 = 105 \cdot 7,5 + 20 \cdot 2,5 - 10 \cdot 2$$

$$817,5 \text{ W} = 817,5 \text{ W}$$

Metoda curenților ciclici se aplică și în cazul circuitelor care conțin generatoare electrice de curent. Ecuațiile scrise conțin în membrul stâng și tensiunile de la bornele acestor generatoare de curent. Curentul ciclic atribuit unui ochi independent este determinat dacă ochiul conține o latură în care se află un generator de curent.

Acesta este egal și are același sens ca și curentul generatorului de curent.

Aplicația 2.

Să se rezolve circuitul electric din Fig.3.75 prin metoda curenților ciclici.

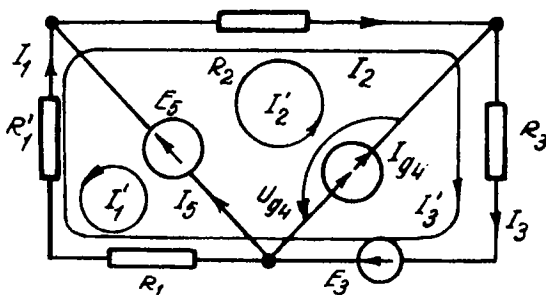


Fig.3.75. Circuit electric pentru metoda curenților ciclici.

Date:

- Tensiunile electromotoare:

$$E_3 = 10 \text{ V}; E_5 = 10 \text{ V}$$

- Curenții generatoarelor de curent

$$I_{g4} = 1 \text{ A}$$

- Rezistențele rezistoarelor electrice:

$$R_1 = 10 \Omega; R_1' = 10 \Omega; R_2 = 20 \Omega; R_3 = 20 \Omega;$$

- Necunoscute:

• Curenții din laturi I_1, I_2, I_3, I_5 .

- Tensiunile la bornele generatoarelor de curent U_{g_4} .

S-au adoptat sensuri arbitrare pentru curenții din laturi, curenții ciclici și tensiunile de la bornele generatoarelor de curent.

Numărul ecuațiilor este egal cu $o = L - N + 1 = 5 - 3 + 1 = 3$. Se scriu ecuațiile în care apar curenții ciclici și tensiunile de la bornele generatoarelor:

$$R_{11} I'_1 + R_{12} I'_2 + R_{13} I'_3 = E'_1$$

$$R_{21} I'_1 + R_{22} I'_2 + R_{23} I'_3 + U_{g_4} = E'_2 \quad (3.76)$$

$$R_{31} I'_1 + R_{32} I'_2 + R_{33} I'_3 = E'_3$$

Ecuția a doua nu are sens pentru că $R_{22} \rightarrow \infty$; se va înlocui cu relația:

$$I'_2 = I_{g_4} = 1 \text{ A}.$$

$$R_{11} = R_1 + R'_1 = 10 + 10 = 20 \Omega$$

$$R_{33} = R_1 + R'_1 + R_2 + R_3 = 10 + 10 + 20 + 20 = 60 \Omega$$

$$R_{12} = R_{21} = 0$$

$$R_{13} = R_{31} = - (R_1 + R'_1) = - (10 + 10) = - 20 \Omega$$

$$R_{23} = R_{32} = - R_2 = - 20 \Omega$$

$$E'_1 = E_5 = 10 \text{ V}$$

$$E'_3 = E_3 = 10 \text{ V}$$

Sistemul devine:

$$20 I_1' - 20 I_3' = 10 \text{ V}$$

$$- 20 I_1' - 20 \cdot 1 + 60 I_3' = 10 \text{ V}$$

Soluțiile sînt : $I_1' = 1,5 \text{ A}$; $I_2' = 1 \text{ A}$; $I_3' = 1 \text{ A}$.

Curenții efectivi din laturi rezultă:

$$I_1 = I_3' - I_1' = 1 - 1,5 = - 0,5 \text{ A}; I_2 = I_3' - I_2' = 1 - 1 = 0;$$

$$I_3 = I_3' = 1 \text{ A}; I_5 = I_1' - I_2' = 1,5 - 1 = 0,5 \text{ A} .$$

Calculul tensiunii de la bornele generatorului de curent U_{g_4} .

Se aplică teorema a doua a lui Kirchhoff pe ochiul 2.

$$- R_2 I_2 - U_{g_4} = - E_5 \quad \text{sau:}$$

$$- 20 \cdot 0 - U_{g_4} = - 10$$

Rezultă : $U_{g_4} = 10 \text{ V}$

În schema simplificată s-au figurat curenții efectivi cu sensurile lor precum și tensiunea de la bornele generatorului de curent (Fig. 3.76).

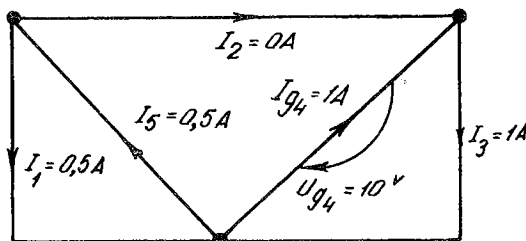


Fig. 3.76. Curenții obținuți prin rezolvarea circuitului electric (Fig. 3.75).

Verificarea rezultatelor se face cu bilanțul puterilor:

$$(R_1 + R'_1) I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = E_3 I_3 + U_{g_4} I_{g_4} + E_5 I_5$$

Prin înlocuire:

$$(10 + 10) 0,5^2 + 20 \cdot 0^2 + 20 \cdot 1^2 = 10 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 + 10 \cdot 0,5$$

$$25 \text{ W}$$

$$=$$

$$25 \text{ W}$$

3.16.4. Metoda tensiunilor la noduri

Metoda se folosește pentru că simplifică rezolvarea circuitului.

Sistemul de ecuații scris cu metoda tensiunilor la noduri conține un număr de ecuații egal cu $N - 1 < L$ mai mic decât numărul ecuațiilor scrise când se aplică metoda teoremelor lui Kirchhoff. În ultimul caz, numărul ecuațiilor era egal cu L , numărul laturilor. Necunoscutele sînt însă altele. Sînt mărimi atașate nodurilor și care se numesc tensiunile nodurilor. Se notează cu litera U . Necunoscutele reale se determină în funcție de aceste necunoscute auxiliare.

Pentru o prezentare mai simplă în scopul înțelegerii metodei, se folosește următorul:

Exemplu . Se va relua circuitul electric prezentat la metoda curenților ciclici (Fig. 3.77).

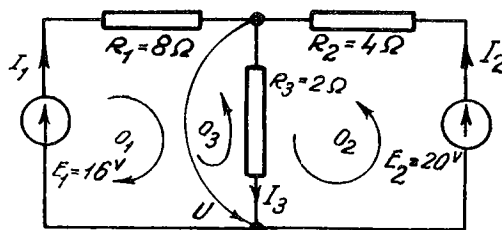


Fig. 3.77. Circuit electric pentru metoda tensiunilor la noduri.

Se alege ca necunoscută tensiunea de la bornele rezistorului R_3 notată cu U și figurată pe schema circuitului electric din figură.

Tensiunile la bornele celor trei rezistoare și curenții prin ele pot fi exprimați în funcție de această tensiune.

Curenții I_1 , I_2 și I_3 se deduc din teorema a doua a lui Kirchhoff scrisă pe cele 3 ochiuri; o_1 ; o_2 și o_3 .

$$\text{ochiul } o_1; R_1 I_1 + U = E_1 \Rightarrow I_1 = \frac{E_1 - U}{R_1}$$

$$\text{ochiul } o_2; R_2 I_2 + U = E_2 \Rightarrow I_2 = \frac{E_2 - U}{R_2}$$

$$\text{ochiul } o_3; - R I_3 + U = 0 \Rightarrow I_3 = \frac{U}{R}$$

Conform teoremei întâi a lui Kirchhoff

$$- I_1 - I_2 + I_3 = 0 .$$

Prin înmulțirea cu -1 și înlocuirea curenților se obține:

$$\frac{E_1 - U}{R_1} + \frac{E_2 - U}{R_2} - \frac{U}{R_3} = 0$$

Sau grupînd termenii, se transformă relația în :

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) U = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R} \quad (3.77)$$

Înlocuind datele cu valori numerice se va obține:

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) U = \frac{16}{8} + \frac{20}{4} \Rightarrow U = 8 \text{ V}$$

Valoarea tensiunii obținute $U = 8 \text{ V}$ se verifică folosind rezultatele obținute prin metoda curenților ciclici:

$$U = R_3 I_3 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ V}$$

Dacă se notează nodurile cu 1 respectiv 2, ecuația obținută mai sus (3.77) se poate scrie sub forma:

$$G_{11} U_1 = I_{sc1} \quad (3.78)$$

în care

$$U_1 = U \text{ și } G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

iar

$$I_{sc1} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$$

Dacă circuitul electric ar fi avut trei noduri, atunci sistemul ar fi avut două ecuații:

$$G_{11} U_1 + G_{12} U_2 = I_{sc1}$$

$$G_{21} U_1 + G_{22} U_2 = I_{sc2} \quad (3.79)$$

S-a notat:

U_1 și U_2 tensiunile între nodurile 1 și 3 respectiv între nodurile 2 și 3.

G_{11} și G_{22} reprezintă conductanțele proprii ale nodurilor; întotdeauna sînt pozitive și se calculează ca suma tuturor conductanțelor la nod.

$G_{12} = G_{21}$ reprezintă conductanța comună între nodul 1 și nodul 2; întotdeauna negativă și se calculează ca suma tuturor conductanțelor legate direct între nodurile 1 și 2.

I_{sc1} și I_{sc2} reprezintă curenții de scurtcircuit. Un curent de scurtcircuit se calculează ca sumă algebrică a tuturor curenților pe care îi trimite în nod sursele din laturi legate la acel nod dacă laturile ar fi scurtcircuitate la borne.

Se scriu cu semnul plus curenții de scurtcircuit care intră în nod și cu minus în caz contrar. Curenții de scurtcircuit ai laturilor pasive (care conțin numai rezistențe) sînt nuli.

În cazul în care într-o ecuație apare o conductanță infinită (rezistență egală cu zero) se înlocuiește această ecuație cu o relație matematică mai simplă după cum se va constata din aplicația a doua care urmează.

Pentru rezolvarea unui circuit electric prin metoda tensiunilor la noduri se procedează astfel:

- Se stabilesc sensuri arbitrare pentru curenții din laturile circuitului electric.
- Se notează cu simboluri tensiunile a $N - 1$ noduri ale circuitului electric.
- Se scriu ecuațiile (3.79) pentru $N - 1$ noduri.
- Se rezolvă sistemul de ecuații pentru determinarea necunoscutelor auxiliare: tensiunile la noduri.
- Se calculează curenții din laturi.

Aplicația 1.

Să se rezolve circuitul electric din Fig. 3.78 prin metoda tensiunilor la noduri.

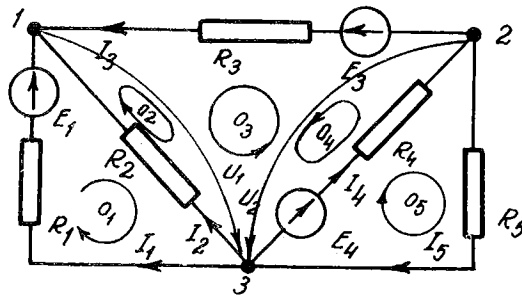


Fig. 3.78. Circuit electric pentru metoda tensiunilor la noduri.

Date.

Tensiunile electromotoare:

$$E_1 = 2 \text{ V}; E_3 = 1 \text{ V}; E_4 = 15 \text{ V}.$$

Rezistențele rezistoarelor electrice:

$$R_1 = 3 \, \Omega ; R_2 = 2,5 \, \Omega ; R_3 = 2 \, \Omega ;$$

$$R_4 = 1 \, \Omega ; R_5 = 5 \, \Omega .$$

Necunoscute:

curenții din laturi I_1 ; I_2 ; I_3 ; I_4 și I_5 .

S-au adoptat sensuri arbitrare pentru curenții din laturi și pentru tensiunile U_1 și U_2 .

Se scrie sistemul de $N-1 = 3 - 1 = 2$ ecuații și tot două necunoscute auxiliare după cum urmează:

$$G_{11} U_1 + G_{12} U_2 = I_{sc1}$$

$$G_{21} U_1 + G_{22} U_2 = I_{sc2}$$

Se determină coeficienții sistemului și termenii liberi:

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2,5} + \frac{1}{2} = \frac{37}{30} \, \Omega^{-1}$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} = \frac{17}{10} \, \Omega^{-1}$$

$$G_{12} = G_{21} = - \left(\frac{1}{R_3} \right) = - \frac{1}{2} \, \Omega^{-1}$$

$$I_{sc1} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_3}{R_3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6} \, A$$

$$I_{sc2} = - \frac{E_3}{R_3} + \frac{E_4}{R_4} = - \frac{1}{2} + \frac{15}{1} = \frac{29}{2} \, A$$

Sistemul devine:

$$\frac{37}{30} U_1 - \frac{1}{2} U_2 = \frac{7}{6}$$

$$- \frac{1}{2} U_1 + \frac{17}{10} U_2 = \frac{29}{2}$$

Soluțiile sistemului sînt: $U_1 = 5 \text{ V}$ și $U_2 = 10 \text{ V}$

Se determină necunoscutele principale (curenții din laturi) scriind L ecuații cu teorema a doua a lui Kirchhoff după cum urmează:

$$\text{ochiul } o_1; R_1 I_1 + U_1 = E_1 \Rightarrow I_1 = \frac{E_1 - U_1}{R_1} = \frac{2 - 5}{3} = -1 \text{ A}$$

$$\text{ochiul } o_2; R_2 I_2 + U_1 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{-U_1}{R_2} = \frac{-5}{2,5} = -2 \text{ A}$$

$$\text{ochiul } o_3; R_3 I_3 + U_1 - U_2 = E_3 \Rightarrow I_3 = \frac{E_3 - U_1 + U_2}{R_3} = \frac{1 - 5 + 10}{2} = 3 \text{ A}$$

$$\text{ochiul } o_4; R_4 I_4 + U_2 = E_4 \Rightarrow I_4 = \frac{E_4 - U_2}{R_4} = \frac{15 - 10}{1} = 5 \text{ A}$$

$$\text{ochiul } o_5; R_5 I_5 - U_2 = 0 \Rightarrow I_5 = \frac{U_2}{R_5} = \frac{10}{5} = 2 \text{ A}$$

În schema simplificată din Fig. 3.79 se trasează curenții cu sensurile lor efective.

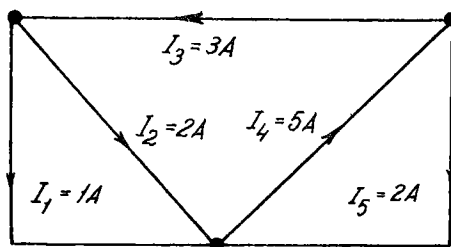


Fig. 3.79. Curenții obținuți prin rezolvarea circuitului electric (Fig. 3.78).

Verificarea se face cu bilanțul puterilor:

$$R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 =$$

$$- E_1 I_1 + E_3 I_3 + E_4 I_4.$$

$$3 \cdot 1^2 + 2,5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 5^2 + 5 \cdot 2^2 = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 15,5$$

$$76 \text{ W}$$

$$=$$

$$76 \text{ W}$$

Metoda tensiunilor la noduri se aplică și în cazul circuitelor electrice care conțin generatoare electrice de curent. Pentru laturile care conțin generatoare ideale de curent, curentul de scurtcircuit este chiar curentul debitat de generatorul ideal de curent. În suma algebrică a curenților de scurtcircuit din laturile care concură într-un nod, semnul algebric al curentului debitat de un generator ideal de curent se atribuie la fel ca la curenții de scurtcircuit din laturile în care există surse de tensiune electrică.

Aplicația 2. Să se rezolve circuitul electric din Fig. 3.80 prin metoda tensiunilor la noduri.

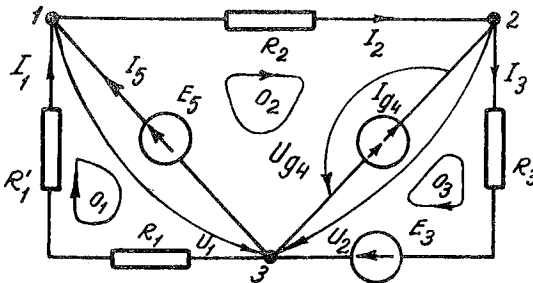


Fig. 3.80. Circuit electric pentru metoda tensiunilor la noduri.

Date:

- Tensiunile electromotoare:

$$E_3 = 10\text{V}; E_5 = 10\text{V};$$

- Curenții generatoarelor de curent:

$$I_{g4} = 1 \text{ A};$$

- Rezistențele rezistoarelor electrice:

$$R_1 = 10 \Omega ; R'_1 = 10 \Omega ; R_2 = 20 \Omega ; R_3 = 20 \Omega ;$$

Necunoscute:

- Curenții din laturi $I_1; I_2; I_3; I_5;$

- Tensiunile la bornele generatoarelor de curent : U_{g_4} .

S-au adoptat sensuri arbitrare pentru curenții din laturi, tensiunile U_1 și U_2 și tensiunea U_{g_4} de la bornele generatorului de curent I_{g_4} .

Se scrie sistemul de $N - 1 = 3 - 1 = 2$ ecuații și tot două necunoscute auxiliare, după cum urmează:

$$G_{11} U_1 + G_{12} U_2 = I_{sc1}$$

$$G_{21} U_1 + G_{22} U_2 = I_{sc2}$$

Se determină coeficienții sistemului și termenii liberi:

$$G_{11} = \frac{1}{R_1 + R'_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{10 + 10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{0} \rightarrow \infty$$

(rezistența sursei ideale E_5 este nulă, $R_5 = 0$)

$$G_{12} = G_{21} = - \frac{1}{R_2} = - \frac{1}{20}$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{\infty} = \frac{2}{20} \quad (\text{rezistența}$$

generatorului ideal I_{g_4} este infinită $R_4 \rightarrow \infty$)

$$I_{sc1} = \frac{E_5}{R_5} = \frac{10}{\infty} \rightarrow \infty$$

$$I_{sc2} = - \frac{E_3}{R_3} + I_{g_4} = - \frac{10}{20} + 1 = \frac{1}{2} \text{ A}$$

Ecuatia întâi nu are sens deoarece $G_{11} \rightarrow \infty$ și $I_{sc1} \rightarrow \infty$
 Această ecuație se va înlocui cu relația

$$U_1 = E_5 = 10 \text{ V}$$

scrisă pe baza teoremei a doua a lui Kirchhoff.

Din ultima ecuație se obține tensiunea U_2 :

$$- \frac{1}{20} \cdot 10 + \frac{2}{20} U_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow U_2 = 10 \text{ V}$$

Se determină necunoscutele principale (curenții din laturi și tensiunea la bornele generatorului de curent) scriind relațiile necesare cu teoremele lui Kirchhoff după cum urmează:

Curentul I_1 ; se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff pe ochiul o_1

$$(R_1 + R'_1) I_1 + U_1 = 0 \Rightarrow I_1 = - \frac{U_1}{R_1 + R'_1} = \frac{-10}{10+10} = -0,5 \text{ A}$$

Curentul I_2 ; se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff pe ochiul o_2

$$R_2 I_2 + U_2 = E_5 \Rightarrow I_2 = \frac{E_5 - U_2}{R_2} = \frac{10 - 10}{20} = 0 \text{ A}$$

Curentul I_3 ; se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff pe ochiul o_3

$$R_3 I_3 - U_2 = E_3 \Rightarrow I_3 = \frac{E_3 + U_2}{R_3} = \frac{10 + 10}{20} = 1 \text{ A}$$

Tensiunea U_{g_4} ; se observă că $U_{g_4} = U_2 = 10 \text{ V}$

Curentul I_5 ; se scrie teorema întâi a lui Kirchhoff pentru nodul 1

$$I_5 = I_2 - I_1 = 0 - (-0,5) = 0,5 \text{ A}$$

În schema simplificată din Fig.3.181 se trasează curenții și tensiunea de la bornele generatorului de curent cu sensurile lor efective.

Rezultatele obținute coincid cu soluțiile aceleiași probleme rezolvată prin metoda curenților ciclici.

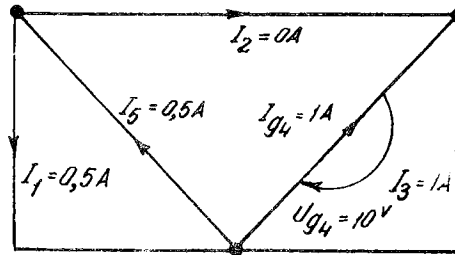


Fig. 3.81. Curenții obținuți prin rezolvarea circuitului electric (Fig.3.80)

Tensiunile la noduri se pot exprima în funcție de potențialele la noduri. În acest caz, necunoscutele auxiliare sînt potențiale iar metoda este cunoscută sub denumirea: metoda potențialelor la noduri. Este mult mai răspîdită în aplicații această formă.

Numărul de ecuații este egal tot cu $N - 1$ în care N reprezintă numărul nodurilor rețelei. Potențialul nodului se notează cu V_a în care indicele a reprezintă numărul nodului. Pentru a se scrie numai $N-1$ ecuații este necesar ca potențialul unuia din nodurile rețelei să fie ales arbitrar. Este indicat să se aleagă acest potențial egal cu zero, pentru simplificarea calculelor.

Pentru un circuit cu $N = 3$ noduri, numărul ecuațiilor care se scrie este $N-1 = 3 - 1 = 2$ ecuații. Forma este următoarea:

$$\begin{aligned} G_{11} V_1 + G_{12} V_2 &= I_{sc1} \\ G_{21} V_1 + G_{22} V_2 &= I_{sc2} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Aici, conductanțele G_{11} , $G_{12} = G_{21}$, G_{22} și curenții de scurt-circuit I_{sc1} și I_{sc2} au aceeași semnificație ca în cazul metodei tensiunilor la noduri.

Necunoscutele principale-curenții din laturi-se determină cu expresia:

$$I_{ab} = G_{ab} (E_{ab} + V_a - V_b)$$

în care: I_{ab} - curentul din latura legată între nodurile a și b; sensul curentului este de la nodul a spre b.

G_{ab} - conductanța din latura respectivă legată între nodurile a și b.

E_{ab} - tensiunea electromotoare a sursei de tensiune din aceeași latură.

V_a - potențialul nodului a.

V_b - potențialul nodului b.

Aplicație

Să se rezolve circuitul electric din Fig.3.82 cu metoda potențialelor la noduri.

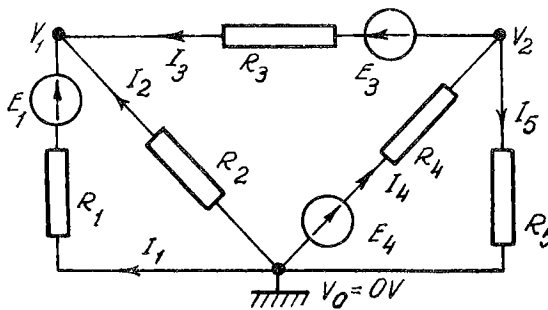


Fig. 3.82 Circuit electric pentru metoda potențialelor la noduri.

Date:

- Tensiunile electromotoare:

$$E_1 = 2 \text{ V}; E_2 = 1 \text{ V}; E_4 = 15 \text{ V}$$

Rezistențele rezistoarelor electrice:

$$R_1 = 3 \Omega; R_2 = 2,5 \Omega; R_3 = 2 \Omega; R_4 = 1 \Omega; R_5 = 5 \Omega$$

Necunoscute:

Curenții din laturi: I_1 ; I_2 ; I_3 ; I_4 și I_5 .

S-au adoptat sensuri arbitrare pentru curenții din laturi.

Se scrie sistemul de $N - 1 = 3 - 1 = 2$ ecuații și tot două necunoscute auxiliare: V_1 și V_2 .

$$G_{11} V_1 + G_{12} V_2 = I_{sc1}$$

$$G_{21} V_1 + G_{22} V_2 = I_{sc2}$$

Valorile coeficienților sistemului și termenii liberi s-au calculat:

$$G_{11} = \frac{37}{30} \Omega^{-1}; \quad G_{22} = \frac{17}{10} \Omega^{-1}; \quad G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{2} \Omega^{-1}$$

$$I_{sc1} = \frac{7}{6} \text{ A}; \quad I_{sc2} = -\frac{29}{2} \text{ A}$$

Sistemul devine:

$$\begin{aligned} \frac{37}{30} V_1 - \frac{1}{2} V_2 &= \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{2} V_1 + \frac{17}{10} V_2 &= -\frac{29}{2} \end{aligned}$$

Soluțiile sistemului sînt : $V_1 = 5\text{V}$ și $V_2 = 10 \text{ V}$

Se determină curenții din laturi folosind relația:

$$I_{ab} = G_{ab} (E_{ab} + V_a - V_b)$$

$$\text{Curentul } I_1 = I_{01} = G_{01} (E_{01} + V_0 - V_1) = \frac{1}{3} (2 + 0 - 5) = -1 \text{ A}$$

Tensiunea $E_{01} = E_1$ cu sensul de la nodul 0 la nodul 1.

Analog:

$$I_2 = \frac{1}{2,5} (0 + 0 - 5) = -2 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{1}{2} (1 + 10 - 5) = 3 \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{1}{1} (15 + 0 - 10) = 5 \text{ A}$$

$$I_5 = \frac{1}{5} (0 + 10 - 0) = 2 \text{ A}$$

Curenții I_1 și I_2 au sensuri reale inverse față de cele alese inițial în Fig. 3.82.

În Fig. 3.83 s-au reprezentat curenții pe schema simplificată.

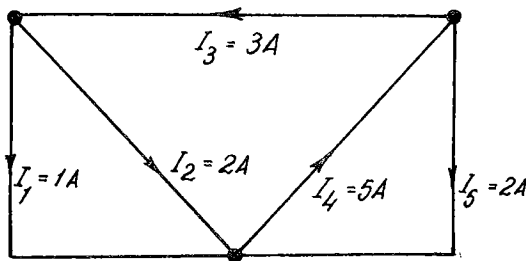


Fig. 3.83. Curenții obținuți prin rezolvarea circuitului electric (Fig. 3.82).

Metoda potențialelor la noduri este cea mai indicată în rezolvarea circuitelor cu surse electrice (generatoare electrice) comandate care apar în electronică.

3.17. Metode de simplificare a circuitelor electrice

În scopul simplificării calculelor necesare rezolvării unui circuit electric, s-au elaborat metode care vor fi expuse în continuare. Prin aplicarea acestor metode, numărul de ecuații determinat cu teoremele lui Kirchhoff, metoda curenților ciclici sau metoda potențialelor la noduri se reduce.

3.17.1. Metoda rezistențelor echivalente

Un circuit electric se numește pasiv, când nu are surse de curent continuu. În raport cu două borne de acces A și B (Fig. 3.84) se poate defini no-

țiunea de rezistență echivalentă R_e ca fiind raportul dintre tensiunea aplicată la bornele de acces U_{AB} și intensitatea curentului absorbit:

$$R_e = \frac{U_{AB}}{I_{AB}} \quad (3.81)$$

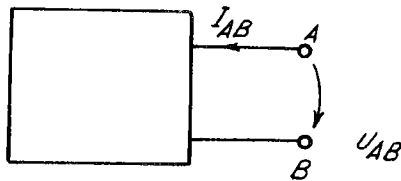


Fig. 3.84. Circuit electric pasiv

Rezistențele care compun un circuit electric pot fi legate în cele mai diverse moduri dar pentru calculul rezistenței echivalente este necesar a se cunoaște legarea în serie și în paralel a rezistoarelor.

3.17.2. Legarea în serie a rezistoarelor

La legarea în serie, rezistoarele fac parte dintr-o porțiune neramificată de circuit, curentul care le străbate este același iar tensiunile la bornele lor se însumează pentru a obține tensiunea totală aplicată grupului de rezistoare (conform teoremei a doua a lui Kirchhoff).

Pentru Fig.3.85 se scrie:

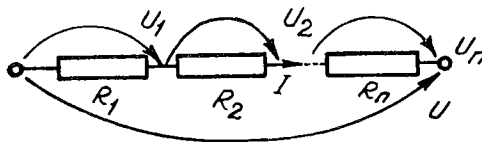


Fig. 3.85. Legarea în serie a rezistoarelor.

$$U = U_1 + U_2 + \dots U_n = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) I$$

Dar $U = R_e I$ de unde rezultă:

$$R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (3.82)$$

Divizorul de tensiune (Fig. 3.86). Se observă că la conectarea în serie a rezistoarelor, tensiunea totală U se repartizează pe rezistoarele înseriate. Aceasta reprezintă un divizor de tensiune. În cazul a două rezistoare R_1 și R_2 legate în serie, tensiunea divizată pe cele două rezistoare se calculează cu următoarele relații:

Tensiunea pe rezistorul R_1 :

$$U_1 = R_1 I$$

$$\text{Dar } I = \frac{U}{R_1 + R_2} \quad (3.83)$$

$$\text{Rezultă că: } U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U \quad \text{și}$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

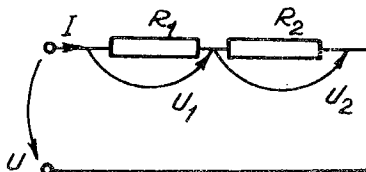


Fig. 3.86. Divizorul de tensiune.

Conductanța echivalentă a conductanțelor legate în serie se determină cu formula:

$$\frac{1}{G_e} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \dots + \frac{1}{G_n} \quad (3.84)$$

În cazul a două conductanțe legate în serie, conductanța echivalentă se determină cu:

$$G_e = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \quad (3.85)$$

Conductanța echivalentă este raportul dintre produsul celor două conductanțe legate în serie și suma acestor două conductanțe.

3.17.3. Legarea în paralel a rezistoarelor (Fig.3.87).

La legarea în paralel, rezistoarele sînt parcurse de curenți care pleacă de la o bornă comună și sosesc la cealaltă bornă comună; între aceste două borne este aplicată tensiunea care este aceeași pentru toate rezistoarele.

Conform teoremei întâi a lui Kirchhoff,

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n.$$

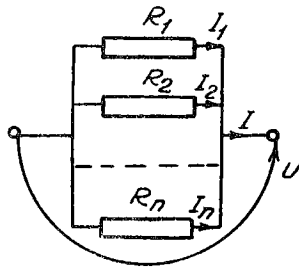


Fig.3.87. Legarea în paralel a rezistoarelor

Dar rezistența echivalentă am definit-o ca:

$$R_e = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_1 + I_2 + \dots + I_n}$$

$$\text{dar } I_1 = \frac{U}{R_1} ; I_2 = \frac{U}{R_2} ; \dots ; I_n = \frac{U}{R_n} .$$

Prin înlocuire:

$$R_e = \frac{U}{\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

Rezultă în final:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (3.86)$$

Divizorul de curent (Fig. 3.88) Se observă că la conectarea în paralel a rezistoarelor, curentul total I se divide în rezistoarele conectate în paralel. Acesta reprezintă un divizor de curent. În cazul a două rezistoare R_1 și R_2 legate în paralel, curentul divizat pe cele două rezistoare se calculează cu următoarele relații:

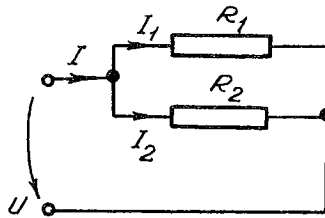


Fig. 3.88. Divizorul de curent

Curentul prin rezistorul R_1

$$I_1 = \frac{U}{R_1}$$

Curentul total prin divizor este

$$I = \frac{U}{R_e}$$

Rezultă că

$$I_1 = \frac{R_e}{R_1} I = \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{R_1} I$$

sau

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \quad (3.87)$$

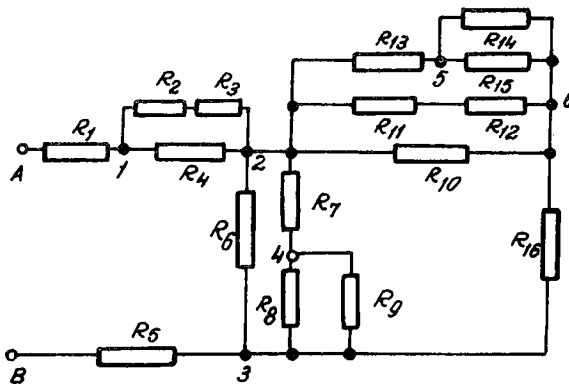
respectiv

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I .$$

Conductanța echivalentă a conductoarelor legate în paralel se determină în formula:

$$G_e = G_1 + G_2 + \dots + G_n \quad (3.88)$$

Aplicație. Să se determine rezistența echivalentă în raport cu bornele A și B, R_{AB} , pentru circuitul din Fig.3.89.



Fog. 3.89. Circuit electric pentru calcularea rezistenței echivalente R_{AB} .

Valorile rezistențelor sînt următoarele:

$$\begin{array}{lll} R_1 = 1 \, \Omega ; & R_2 = 11 \, \Omega ; & R_3 = 7 \, \Omega ; \\ R_4 = 9 \, \Omega ; & R_5 = 1 \, \Omega ; & R_6 = 4 \, \Omega ; \\ R_7 = 9 \, \Omega ; & R_8 = 4 \, \Omega ; & R_9 = 12 \, \Omega ; \\ R_{10} = 15 \, \Omega ; & R_{11} = 7 \, \Omega ; & R_{12} = 8 \, \Omega ; \\ R_{13} = 10 \, \Omega ; & R_{14} = 30 \, \Omega ; & R_{15} = 6 \, \Omega ; \\ R_{16} = 1 \, \Omega . \end{array}$$

Succesiv se determină rezistențele echivalente a rezistențelor legate în serie sau în paralel.

- Grupul de rezistențe: R_2 , R_3 și R_4 .

$$R_{1,2} = \frac{R_4 (R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{9 (11 + 7)}{11 + 7 + 9} = \frac{162}{27} = 6 \Omega$$

Grupul de rezistențe : R_{13} , R_{14} , R_{15} .

$$R'_{2,6} = R_{13} + \frac{R_{14} \cdot R_{15}}{R_{14} + R_{15}} = 10 + \frac{30 \cdot 6}{30 + 6} = 15 \Omega$$

$$\begin{aligned} \text{- Grupul } R_{10}, R_{11}, R_{12}, R'_{2,6}: \quad \frac{1}{R_{2,6}} &= \frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{R_{11} + R_{12}} + \frac{1}{R'_{2,6}} = \\ &= \frac{1}{15} + \frac{1}{7 + 8} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} \Omega^{-1} \rightarrow R_{2,6} = 5 \Omega \end{aligned}$$

$$\text{- Grupul } R_7, R_8, R_9: \quad R'_{2,3} = R_7 + \frac{R_8 R_9}{R_8 + R_9} = 9 + \frac{4 \cdot 12}{4 + 12} = 12 \Omega$$

Circuitul electric a devenit (Fig.3.90)

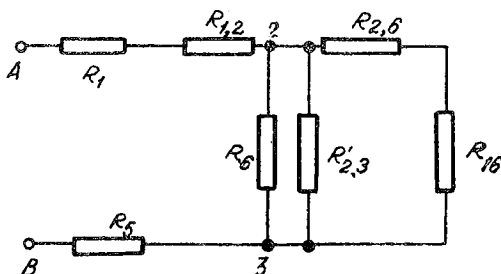


Fig. 3.90. Circuitul electric (Fig.3.89). simplificat.

Se calculează:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{2,3}} &= \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R'_{2,3}} + \frac{1}{R_{16} + R_{2,6}} = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{1 + 5} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Omega^{-1} \\ R_{2,3} &= 2 \Omega \end{aligned}$$

Rezistența echivalentă între bornele A și B:

$$R_{AB} = R_1 + R_{1,2} + R_{2,3} + R_5 = 1 + 6 + 2 + 1 = 10 \, \Omega$$

3.17.4. Teorema lui Vaschy.

Această teoremă se aplică tot în scopul simplificării unui circuit electric în vederea rezolvării lui cu un număr mai mic de ecuații.

Prin această teoremă, se afirmă:

În laturile care concură la un nod de rețea se pot intercala surse de tensiuni electromotoare egale pe fiecare latură, cu condiția ca sensurile tensiunilor electromotoare să fie orientate identic față de nod.

În urma acestei operații, numărul surselor se reduce și se ajunge astfel la un circuit mai simplu.

Teorema se demonstrează dar în cadrul acestei cărți se va rezolva numai un circuit electric.

Aplicație - Să se rezolve circuitul electric din Fig. 3.91.

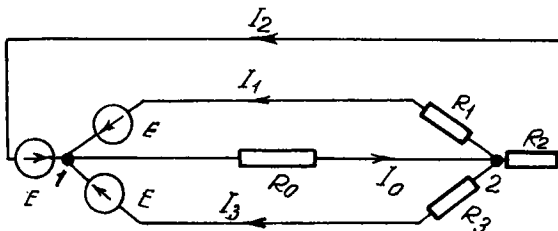


Fig. 3.91. Circuit electric pentru teorema Vaschy.

Date:

Tensiunile electromotoare:

$$E = 48 \, \text{V} .$$

Rezistențele rezistoarelor electrice :

$$R_0 = 2\Omega ; R_1 = 4\Omega ; R_2 = 6\Omega ; R_3 = 12\Omega .$$

Necunoscute:

Curenții din laturi : $I_0 ; I_1 ; I_2 ; I_3$.

Problema se simplifică prin aplicarea teoremei lui Vaschy în nodul 1; se introduc în cele 4 laturi care se leagă în nodul 1 cîte o sursă de tensiune electromotoare de aceeași valoare $E = 48V$ și cu sensul de referință spre nodul 2 (Fig. 3.92).

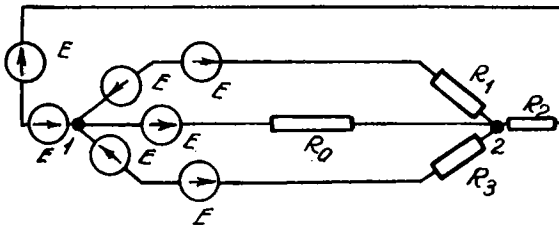


Fig. 3.92. Introducerea surselor E în circuitul electric (Fig.3.91).

În laturile 1, 2 și 3 în care există două surse egale și de sens contrar, efectul lor este nul pentru că se anihilează reciproc. Circuitul devine Fig.3.93 .

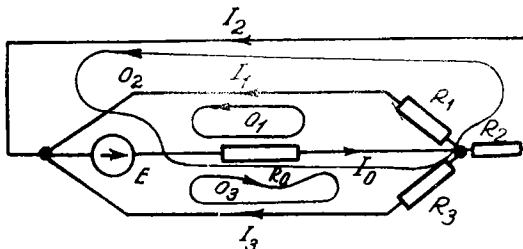


Fig. 3.93. Circuitul electric (Fig.3.91) simplificat.

Rezolvarea circuitului se face prin determinarea rezistenței echivalente a rezistențelor R_1 , R_2 și R_3 legate în paralel:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12}$$

respectiv : $R_e = \frac{12}{6} = 2 \Omega$

Circuitul electric se simplifică și devine ca în Fig. 3.94 .

Curentul $I_o = \frac{E}{R_o + R_e} = \frac{48}{2 + 2} = 12 \text{ A}$

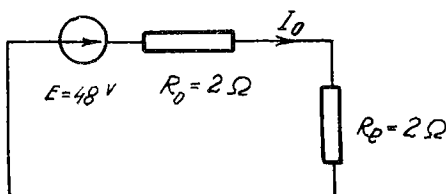


Fig. 3.94. Circuitul electric (Fig.3.92) simplificat.

Pe circuitul din Fig.3.93 aplicînd ochiurilor respective teorema a doua a lui Kirchhoff se obțin curenții în laturile 1, 2 și 3.

Ochiul o_1 ; $R_o I_o + R_1 I_1 = E \rightarrow I_1 = \frac{E - R_o I_o}{R_1} = \frac{48 - 2 \cdot 12}{4} = 6 \text{ A}$

Ochiul o_2 ; $I_2 = \frac{E - R_o I_o}{R_2} = \frac{48 - 2 \cdot 12}{6} = 4 \text{ A}$

Ochiul o_3 ; $I_3 = \frac{E - R_o I_o}{R_3} = \frac{48 - 2 \cdot 12}{12} = 2 \text{ A}$

Verificarea rezultatelor se poate face cu teorema întâi a lui Kirchhoff scrisă pentru nodul 1:

$$I_o = I_1 + I_2 + I_3 = 6 + 4 + 2 = 12 \text{ A}$$

3.18. Metode de rezolvare parțială a unui circuit electric de curent continuu

În unele aplicații, se cere determinarea unui curent printr-o latură și nu rezolvarea completă a circuitului electric de curent continuu. Pentru acest scop, se aplică teorema generatorului echivalent de tensiune și generatorului echivalent de curent, descrise în continuare.

3.18.1. Metoda generatorului echivalent de tensiune (Teorema lui Thévenin).

Avantajul metodei generatorului echivalent de tensiune electromotoare, față de metodele prezentate, constă în aceea că rezistența din latura în care se cere determinarea curentului poate fi variabilă (sarcină variabilă) ceea ce se întâlnește în problemele date spre rezolvare.

Circuitul electric examinat se împarte în două, în raport cu două borne date A și B; latura în care este plasată rezistența R_{AB} și restul circuitului electric (Fig.3.95).

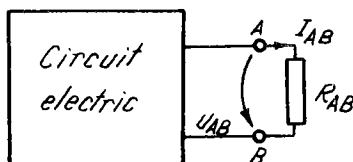


Fig.3.95. Circuit electric cu rezistența R_{AB} legată în exterior.

După teorema generatorului echivalent de tensiune (teorema lui Thévenin), restul circuitului electric poate fi echivalat printr-o singură sursă de tensiune electromotoare și rezistență internă R_{AB0} ; circuitul electric se simplifică și se reduce la schema prezentată în Fig.3.96.

Curentul I_{AB} se calculează cu expresia:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB0}}{R_{AB} + R_{AB0}} \quad (3.89)$$

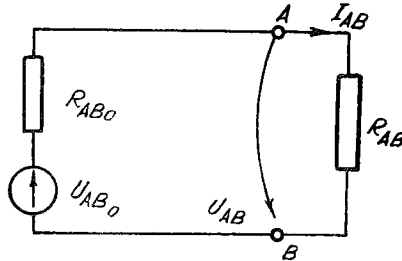


Fig. 3. 96. Circuitul electric pentru metoda generatorului echivalent de tensiune.

Deci, soluția problemei se obține plecînd de la determinarea tensiunii electromotoare U_{AB0} și rezistența internă R_{AB0} .

Conform teoremei lui Thévenin tensiunea electromotoare U_{AB0} este egală cu tensiunea la bornele AB atunci cînd rezistența R_{AB} este dezlegată (regimul de mers în gol).

Rezistența internă a sursei R_{AB0} este rezistența echivalentă a circuitului electric în raport cu bornele A și B atunci cînd circuitul electric este pasivizat (toate sursele sînt presupuse că au tensiunile electromotoare egale cu zero).

Aplicație. Pentru circuitul din Fig. 3. 97 să se determine relația dintre curent și puterea disipată în rezistorul de rezistență R_{AB} (rezistența de sarcină).

Date

- Tensiunile electromotoare

$$E_1 = 232V \quad E_2 = 228V$$

- Rezistențele interne ale generatoarelor;

$$R_{i1} = R_{i2} = 0,4 \, \Omega$$

- Rezistența de sarcină:

$$R_{AB} \text{ variază între } 0 \text{ și } 1 \, \Omega.$$

Se cere:

- relația $I_{AB} = f(R_{AB})$

- Randamentul η .

Curentul se **determină** din:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB0}}{R_{AB} + R_{AB0}}$$

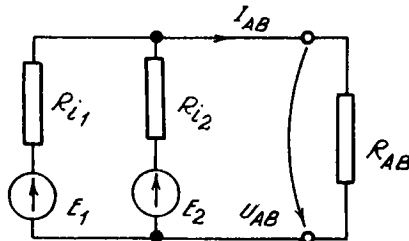


Fig. 3.97. Circuitul electric pentru metoda generatorului echivalent de tensiune.

Pentru calculul lui U_{AB0} se scrie ecuațiile cu a doua teoremă a lui Kirchhoff pe ochiurile 0_1 și 0_2 (Fig. 3.98):

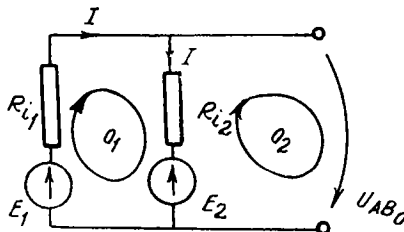


Fig. 3.98. Calculul lui U_{AB0} .

$$\text{Ochiul } o_1 ; \quad R_{i1} \cdot I + R_{i2} \cdot I = E_1 - E_2$$

$$\text{Ochiul } o_2 ; \quad - R_{i2} \cdot I + U_{AB0} = E_2$$

$$\text{Rezultă :} \quad I = \frac{E_1 - E_2}{R_{i1} + R_{i2}} = \frac{232 - 228}{0,4 + 0,4} = 5 \text{ A}$$

și

$$U_{AB0} = E_2 + R_{i2} \cdot I = 228 + 0,4 \cdot 5 = 230 \text{ V}$$

Rezistența internă a sursei echivalente R_{AB0} se determină prin pasivizarea circuitului electric și calculul rezistenței echivalente în raport cu bornele A și B (Fig. 3.99):

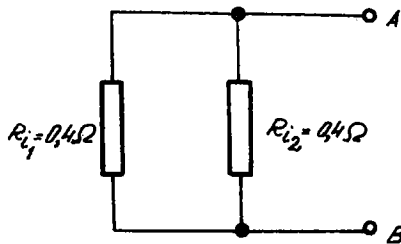


Fig. 3.99. Calculul lui R_{AB0} .

$$R_{AB0} = \frac{R_{i1} R_{i2}}{R_{i1} + R_{i2}} = \frac{0,4 \cdot 0,4}{0,4 + 0,4} = \frac{0,16}{0,8} = 0,2 \Omega$$

Relația $I_{AB} = f(R_{AB})$ se determină din:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB0}}{R_{AB} + R_{AB0}} = \frac{U_{AB0}}{R_{AB0}} \cdot \frac{1}{\frac{R_{AB}}{R_{AB0}} + 1} = \frac{230}{0,2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_{AB}}{R_{AB0}}}$$

$$I_{AB} = 1150 \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_{AB}}{R_{AB0}}} \text{ reprezintă } I_{AB} = f(R_{AB}).$$

Cu ajutorul acestei relații, se calculează curenții pentru diferite valori ale lui R_{AB} (Tabelul 3.7).

Tabelul 3.7

$\frac{R_{AB}}{R_{AB0}}$	0	0,5	1	2	3	5
$R_{AB}(\Omega)$	0	0,1	0,2	0,4	0,6	1,0
$I_{AB}(A)$	1150	766	575	383	287,5	191,5

Determinarea puterii disipate în rezistența de sarcină în funcție de

$$R_{AB} : P = f(R_{AB})$$

$$\text{Din tabelul 3.7 se calculează } P = R_{AB} I_{AB}^2$$

Se întocmește Tabelul 3.8

Tabelul 3.8

$\frac{R_{AB}}{R_{AB0}}$	0	0,5	1	2	3	5
$P(kW)$	0	58,7	66,12	58,7	49,5	36,7

Determinarea randamentului η . Randamentul reprezintă raportul între puterea disipată în rezistența de sarcină (P) și puterea debitată de sursa echivalentă (P_s)

$$\frac{P}{P_s} = \frac{R_{AB} I_{AB}^2}{(R_{AB} + R_{AB0}) I_{AB}^2} = \frac{1}{1 + \frac{R_{AB0}}{R_{AB}}}$$

Randamentul pentru regimurile caracteristice:

$$\begin{aligned} R_{AB} = 0 & \rightarrow \eta = \frac{0}{0 + R_{AB0}} = 0 \\ (\text{scurtcircuitat}) \\ R_{AB} = R_{AB0} & \rightarrow \eta = \frac{R_{AB0}}{R_{AB0} + R_{AB0}} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ sau } 50\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{AB} = \infty & \rightarrow \eta = \frac{1}{1 + \frac{R_{AB0}}{\infty}} = 1 \text{ sau } 100\% \\ (\text{mers în gol}) \end{aligned}$$

Randamentul crește cu creșterea raportului $\frac{R_{AB}}{R_{AB0}}$ și atinge o valoare maximă (100%), teoretic, în regimul de mers în gol.

În Fig. 3.100 s-a reprezentat graficul variației puterii și randamentului în funcție de raportul între rezistența circuitului exterior R_{AB} și rezistența internă a sursei R_{AB0} .

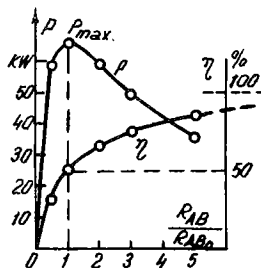


Fig. 3.100. Variația puterii și randamentului.

În practică, se alege regimul de putere maximă sau regimul de randament maxim pentru circuitul din Fig. 3.96 după cum urmează:

Pentru circuitele de putere mică (de ex. aparate electronice) în care pierderea de energie nu este importantă, se alege adesea $R_{AB} = (1 \div 3) R_{AB0}$ obținând un regim aproape de puterea maximă (transfer maxim de putere) în rezistența receptorului R_{AB} .

Randamentul este egal în acest caz cu $50 \div 75\%$.

Pentru circuite de putere medie și ridicată se urmărește obținerea unui randament ridicat și pierderi de energie cât mai mici.

În aceste circuite se alege $R_{AB} = (10 \div 20) R_{AB0}$ sau mai mult, obținându-se randamentul ridicat (care depășește 95%) cu toate că puterea debitată poate să fie de mai multe ori inferioară puterii maxime posibile.

3.18.2. Metoda generatorului echivalent de curent (Teorema lui Norton)

Circuitul electric examinat se împarte ca și la teorema generatorului echivalent de tensiune în două părți (vezi Fig. 3.95).

Conform teoremei generatorului echivalent de curent (teorema lui Norton), restul circuitului electric poate fi echivalat printr-o singură sursă de curent (generator de curent) I_{ABsc} și conductanța internă G_{AB0} .

Circuitul electric se simplifică și schema redusă este prezentată în figura 3.101.

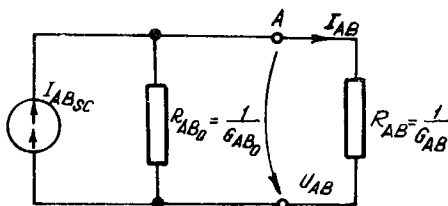


Fig. 3.101. Circuitul electric pentru metoda generatorului echivalent de curent.

Tensiunea U_{AB} de la bornele rezistenței R_{AB} se calculează cu expresia:

$$U_{AB} = \frac{I_{ABsc}}{G_{AB} + G_{AB0}} \quad (3.90)$$

Soluția problemei se obține plecînd de la determinarea curentului debitat de generatorul de curent I_{ABsc} și conductanța internă $G_{AB0} = \frac{1}{R_{AB0}}$.

Conform teoremei lui Norton, curentul I_{ABsc} este egal cu curentul care circulă prin bornele A și B cînd sînt scurtcircuitate.

Conductanța internă G_{AB0} a generatorului de curent este inversă rezistenței interne R_{AB0} și reprezintă conductanța echivalentă a circuitului electric în raport cu bornele A și B (rezistența R_{AB} fiind dezlegată atunci cînd circuitul electric este pasivizat (toate sursele sînt presupuse că au tensiuni electromotoare egale cu zero).

Conductanța G_{AB} , este inversa rezistenței R_{AB} prin care trece curentul I_{AB} adică:

$$G_{AB} = \frac{1}{R_{AB}} \quad (3.91)$$

Curentul I_{AB} se determină aplicînd legea lui Ohm.

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{R_{AB}} \quad (3.92)$$

O consecință importantă a teoremelor lui Norton și Thévenin o constituie echivalarea generatoarelor de curent și de tensiune.

Un circuit electric poate fi echivalat în raport cu două borne A și B oarecare ale sale printr-un generator echivalent de tensiune (cu tensiunea electromotoare U_{AB0} - tensiunea de mers în gol a circuitului în raport cu bornele A și B - și cu rezistența internă R_{AB0} - rezistența echivalentă a circuitului pasivizat în raport cu bornele A și B) sau printr-un generator echivalent de curent (avînd curentul de scurtcircuit I_{ABsc} - curentul de scurtcircuit al circuitului în raport cu bornele A și B - și conductanța echivalentă G_{AB0} a circuitului pasivizat în raport cu bornele A și B) (Fig. 3.102).

Relațiile de echivalență între generatorul de tensiune și generatorul de curent sînt:

$$U_{AB0} = R_{AB0} I_{ABsc} ; \quad I_{ABsc} = G_{AB0} U_{AB0} \text{ și } R_{AB0} = \frac{1}{G_{AB0}} \quad (3.93)$$

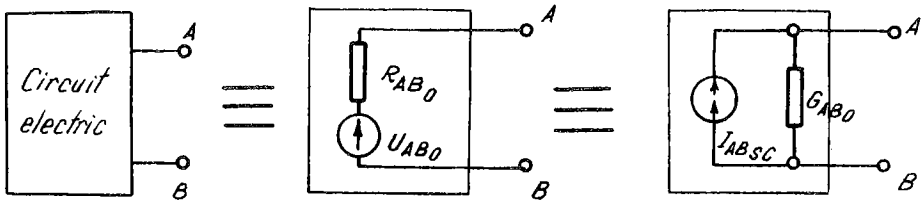


Fig.3.102. Echivalarea circuitului electric.

Aplicație. Să se determine intensitatea curentului electric prin latura AB, tensiunea la bornele ei și puterea disipată în ea (Fig.3.103).

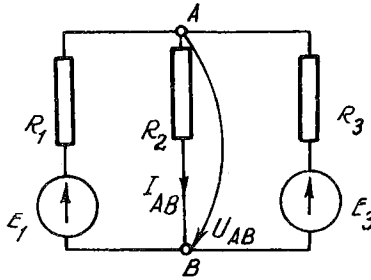


Fig.3.103. Circuit electric pentru metoda generatorului echivalent.

Date.

Tensiuni electromotoare:

$$E_1 = 9 \text{ V}; \quad E_3 = 14 \text{ V}$$

Rezistențele rezistoarelor:

$$R_1 = 2 \, \Omega; \quad R_2 = 1 \, \Omega; \quad R_3 = 3 \, \Omega.$$

Necunoscute:

Curentul I_{AB} . Se aplică teorema lui Norton laturii pasive AB:

$$U_{AB} = \frac{I_{ABsc}}{G_{AB} + G_{AB0}} \quad \text{în care} \quad G_{AB} = \frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{1} = 1 \, \Omega^{-1}$$

Se calculează curentul de scurtcircuit între bornele A și B ($R_{AB} = 0$).
Din Fig. 3.104 se constată formarea unui circuit în care curentul de la A la B se calculează ca sumă a curenților de scurtcircuit,

I_{1sc} și I_{2sc} generați de sursele E_1 și E_2 .

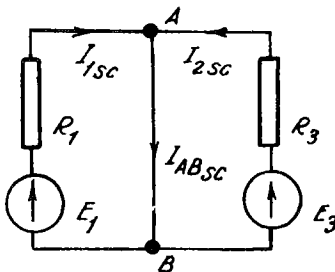


Fig. 3.104. Calculul lui I_{ABsc} .

Avem:

$$I_{ABsc} = I_{1sc} + I_{2sc} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} = \frac{9}{2} + \frac{14}{3} = \frac{55}{6} \, A$$

Conductanța rețelei pasivizate în raport cu bornele A B la mersul în gol (Fig. 3.105) va fi:

$$C_{AB0} = \frac{1}{R_{AB0}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \, \Omega^{-1}$$

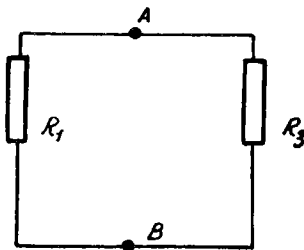


Fig. 3.105. Calculul lui G_{AB0} .

Tensiunea U_{AB} va fi:

$$U_{AB} = \frac{I_{ABsc}}{G_{AB} + G_{AB0}} = \frac{\frac{55}{6}}{1 + \frac{5}{6}} = 5 \text{ V}$$

Curentul prin latura AB va fi:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{R_{AB}} = \frac{5}{1} = 5 \text{ A}$$

Puterea disipată în rezistența de sarcină R_{AB} :

$$P_{AB} = R_{AB} I_{AB}^2 = 1 \cdot 5^2 = 25 \text{ W}$$

3.19. Circuite neliniare de curent continuu

Un circuit electric de curent continuu este neliniar, cînd conține cel puțin un element neliniar.

Un element se consideră a fi neliniar atunci cînd curentul care-l străbate variază în funcție de tensiunea la bornele acestuia, după o curbă (Fig. 3.106 b).

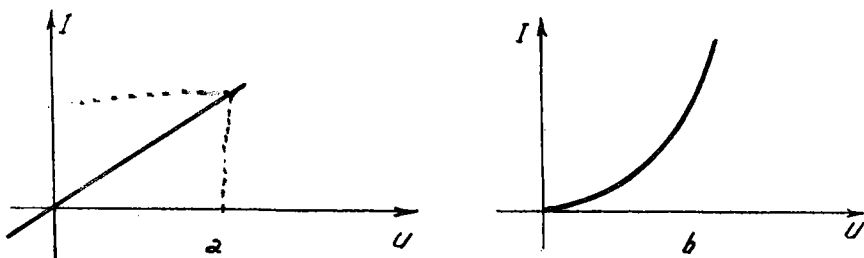


Fig. 3.106. Caracteristici tensiune-curent
a) element liniar; b) element neliniar.

În cazul elementului liniar această dependență a curentului în funcție de tensiunea la borne este o dreaptă (Fig. 3.106 a). Dependența curentului în funcție de tensiune se numește caracteristică volt-amper.

În circuitul electric de curent continuu, pot fi elemente neliniare rezistențele unor elemente care compun circuitul respectiv.

Elementele neliniare se pot grupa în:

- elemente neliniare simetrice pentru care caracteristica volt-ampere este aceeași pentru ambele sensuri ale curentului;

(ex. lămpile cu incandescență); bornele acestor rezistoare nu sînt marcate cu plus și minus;

- elemente neliniare nesimetrice pentru care această caracteristică diferă de la un sens la altul al curentului prin element; (ex. elemente redresoare, stabilizatoare), bornele sînt marcate cu plus și minus.

Pentru rezistorul neliniar se definesc două rezistențe (Fig. 3.107):

rezistența statică $R_{st} = \frac{U}{I}$ și

rezistența dinamică $R_d = \frac{\Delta U}{\Delta I}$.

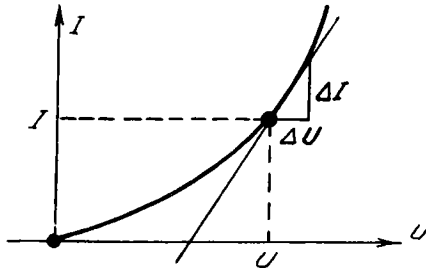


Fig. 3.107. Rezistența statică R_{st} și rezistența dinamică R_d .

Rezistoarele neliniare se reprezintă prin simboluri grafice conform Fig. 3.108 .

Pentru a fi determinat un rezistor neliniar trebuie cunoscută caracteristica volt-ampere dată grafic, analitic sau sub formă de tabel.

Exemple de elemente cu rezistență neliniară sînt prezentate în continuare.

Lămpile cu incandescență sînt rezistoare neliniare simetrice. Rezistența filamentului se modifică odată cu modificarea temperaturii sale, determi-

nată de curentul care trece prin filament. Caracteristicile volt-amper pentru două lămpi sînt prezentate în Fig. 3.109.

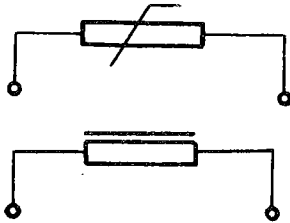


Fig. 3.108. Simboluri grafice pentru rezistoare neliniare.

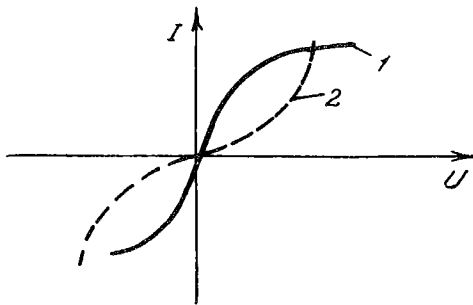


Fig. 109. Caracteristica volt-amper a lămpilor cu incandescență.

Caracteristica 1 este pentru lampa cu filament metalic și indică un coeficient de temperatură pozitiv iar caracteristica 2 este pentru lampa cu filament de cărbune; coeficientul de temperatură este negativ în acest caz.

Termistoarele. Sînt rezistoare neliniare simetrice preparate dintr-un amestec de materiale semiconductoare. Caracteristica volt-amper este prezentată în Fig. 3.110.

În porțiunea A - B, rezistența este negativă.

Varistoarele. Sînt rezistoare neliniare simetrice, obținute din carbura de siliciu și grafit, presată la temperaturi ridicate. Varistorul are caracteristica volt-amper prezentată în Fig. 3.111.

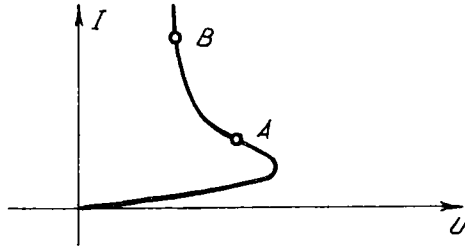


Fig. 3.110. Caracteristica volt-ampere a termistorului.

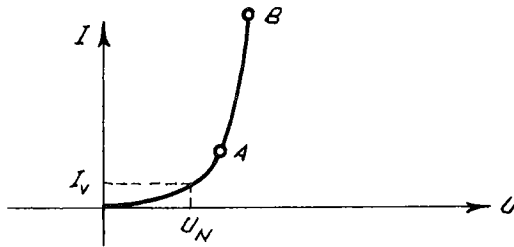


Fig. 3.111. Caracteristica volt-ampere a varistorului.

Se observă o porțiune A - B pentru care tensiunea la borne se păstrează constantă, curentul variind foarte mult.

Varistoarele se utilizează în practică împotriva supratensiunilor (centrale electrice, automatizări etc.).

Intr-un circuit protejat printr-un varistor, la tensiunea nominală curentul este mic prin varistor dar la creșterea tensiunii se ajunge în porțiunea A - B de funcționare când curentul crește foarte mult însă tensiunea nu mai crește.

Dioda electronică este un rezistor neliniar cu caracteristică nesimetrică. Se folosește în redresarea curenților alternativi.

Caracteristica neliniară a diodei electronice poate fi aproximată în porțiunea crescătoare prin relația:

$$I = kU^{3/2} \quad (3.94)$$

Această caracteristică volt-ampere este prezentată în Fig.3.112.

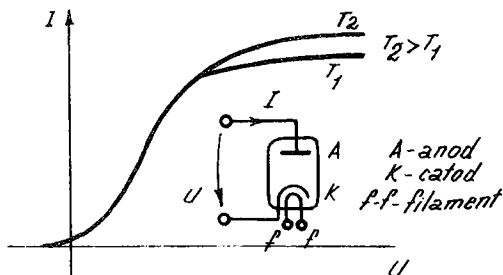


Fig. 3.112. Caracteristica volt-ampere a diodei electronice.

La tensiuni ridicate, caracteristica prezintă o zonă de "saturație" a curentului. Pentru creșterea curentului în această zonă este necesară încălzirea suplimentară a catodului ($T_2 > T_1$).

Diodele semiconductoare. (din siliciu, germaniu, seleniu etc.) sînt rezistoare neliniare cu caracteristica nesimetrică, folosite la redresarea curenților alternativi. Caracteristica volt-ampere a diodei semiconductoare este prezentată în Fig.3.113.

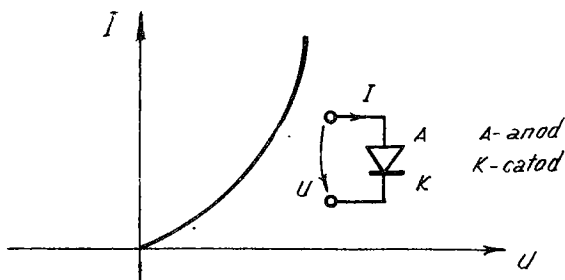


Fig.3.113. Caracteristica volt-ampere a diodei semiconductoare

Se construiesc, în momentul de față, diode care au o caracteristică aparte, motiv pentru care se utilizează la stabilizarea tensiunii (dioda Zener) sau în tehnica frecvențelor înalte (dioda tunel).

Caracteristica volt-ampere este nesimetrică și are forma din Fig.3.114.

Pentru tensiuni pozitive și curenți pozitivi, dioda Zener se comportă ca o diodă obișnuită. În acest caz dioda este polarizată direct.

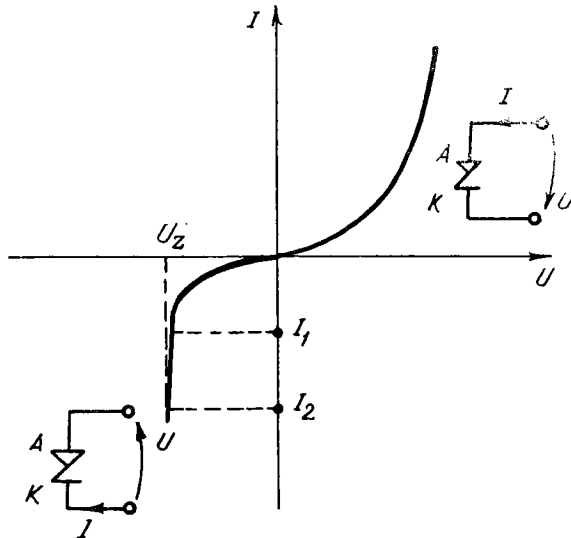


Fig. 3.114. Caracteristica volt-ampere a diodei Zener.

Pentru tensiuni negative și curenți negativi, dioda Zener, la o anumită tensiune - U_Z - denumită și tensiune Zener, intră în conducție, curentul crește foarte mult, tensiunea rămânând constantă și egală cu tensiunea U_Z .

Dioda tunel. Caracteristica volt-ampere a acestei diode este reprezentată în Fig. 3.115. Porțiunea de caracteristică A-B prezintă rezistență negativă.

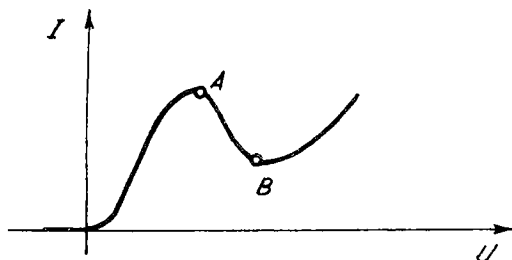


Fig. 3.115. Caracteristica volt-ampere a diodei tunel.

3.19.1. Calculul circuitelor cu elemente neliniare

Calculul circuitelor de curent continuu cu elemente neliniare este mai dificil deoarece aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff, se obțin ecuații neliniare. Rezolvarea acestora nu este simplă, cea mai răspândită metodă fiind metoda grafică.

3.19.2. Legarea în serie a două rezistoare neliniare cu caracteristicile $I = f_1(U_1)$ și $I = f_2(U_2)$ prezentate în Fig. 3.116 se transformă într-un singur rezistor neliniar cu caracteristica echivalentă $I = f(U)$ după următorul procedeu grafic: pentru ordonate date (curentul care parcurge cele două rezistoare neliniare este același) se adună abscisele (tensiunile la bornele celor două rezistoare).

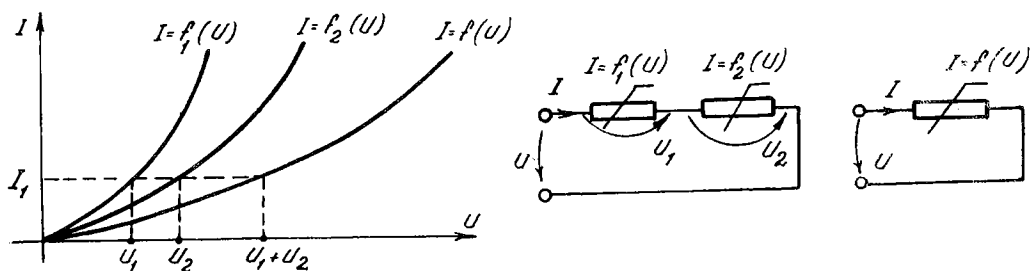


Fig. 3.116. Legarea în serie a două rezistoare neliniare.

În cazul unui circuit neliniar compus dintr-un rezistor neliniar dat prin caracteristica $U_{\text{nel}} = f(I)$ și un rezistor R , se poate folosi de asemenea metoda grafică. În cazul în care tensiunea de alimentare este precizată, de exemplu alimentarea de la o sursă de tensiune electromotoare E (Fig. 3.117), nu mai este necesară determinarea caracteristicii echivalente conectării în serie a celor două rezistoare.

Pentru aceasta, se folosește altă rezolvare grafică prezentată în Fig. 3.118. Se construiește caracteristica volt-ampere $U_{nel} = f(I)$ a elementului neliniar și dreapta $U = E - R I$ cu punctele de intersecție E pe dreapta absciselor și $\frac{E}{R}$ pe dreapta ordonatelor; intersecția acestei drepte cu caracteristica neliniară $U_{nel} = f(I)$ determină soluția ecuației (punctul M).

Acest punct se mai numește și punct de funcționare.

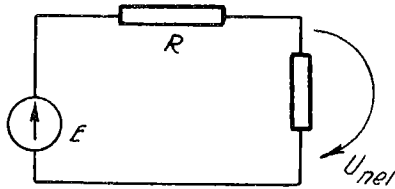


Fig. 3.117. Legarea în serie a unui rezistor liniar cu un rezistor neliniar.

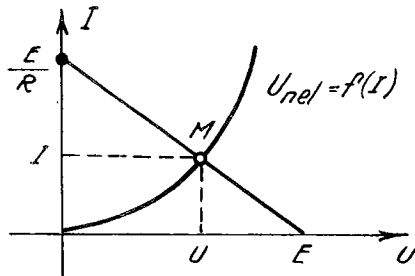


Fig. 3.118. Rezolvarea grafică a circuitului electric (Fig. 3.117).

3.19.3. Legarea în serie a unui rezistor neliniar cu o sursă

Caracteristica volt-ampere echivalentă a acestor elemente de circuit este o caracteristică neliniară. Pentru Fig. 3.119 se scrie pe ochiul o teorema a doua a lui Kirchhoff:

$$U = U_{nel} - E \quad (3.95)$$

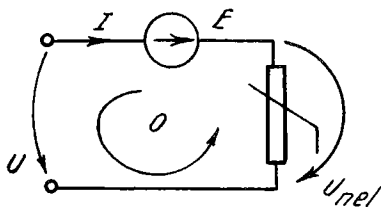


Fig. 3. 119. Legarea în serie a unui rezistor neliniar cu o sursă.

Presupunînd cunoscută caracteristică grafică a elementului neliniar $U_{nel} = f_1(I)$ și valoarea tensiunii electromotoare a sursei E se poate determina prin construcție grafică, caracteristica echivalentă a circuitului neliniar.

(Fig. 3. 120).

$$U = f_1(I) - E = f_2(I) \quad (3. 96)$$

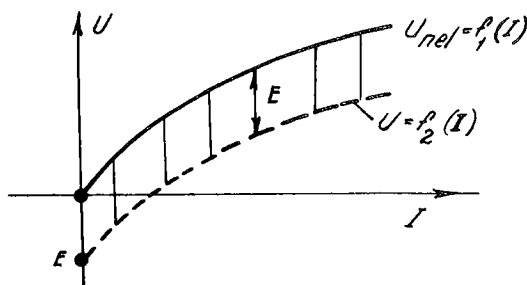


Fig. 3. 120. Caracteristica echivalentă a circuitului neliniar (Fig. 3. 119).

Dacă sursa are sens contrar curentului din circuit, translația caracteristicii are loc cu cantitatea $+E$.

Invers, se poate afirma că orice rezistor neliniar cu o caracteristică ce nu trece prin origine poate fi înlocuit cu un rezistor neliniar avînd caracteristica ce trece prin origine legat în serie cu o sursă.

3.19.4. Echivalarea unui element neliniar cu elemente liniare de circuit

În cazul în care elementul neliniar funcționează între două limite de tensiune determinate de punctele A și B (Fig. 3.121), atunci elementul neliniar se poate înlocui printr-un element liniar înseriat cu o sursă. Avantajul acestei echivalări constă în aceea că circuitul se poate rezolva analitic printr-o metodă prezentată anterior.

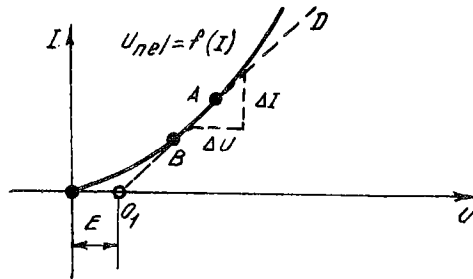


Fig. 3.121. Elementul neliniar funcționează între A și B.

Se determină porțiunea caracteristicii neliniare a rezistorului R_{nel} care urmează a fi liniarizată (porțiunea A-B). Prin aceste două puncte se duce dreapta O_1D care reprezintă caracteristica volt-amper a elementului liniar.

Acesta este un rezistor de rezistență:

$$R = \frac{\Delta U}{\Delta I}$$

Dar caracteristica nu trece prin origine, astfel că rezistorul poate fi înlocuit cu un rezistor a cărui caracteristică trece prin origine legat în serie cu o sursă de tensiune electromotoare E (Fig. 3.122)

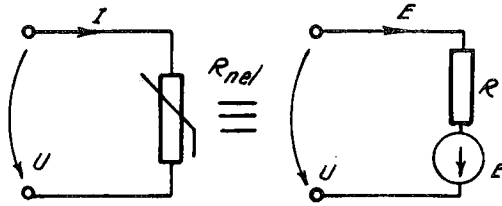


Fig. 3.122. Echivalarea circuitului neliniar cu un circuit linear.

3-19.5. Legarea în paralel a două rezistoare neliniare cu caracteristicile $I_1 = f_1(U)$ și $I_2 = f_2(U)$ prezentate în Fig. 3.123 se transformă într-un singur rezistor neliniar cu caracteristica echivalentă $I = f(U)$ după următorul procedeu grafic: pentru abscise date (tensiunea la bornele rezistoarelor neliniare este aceeași) se adună ordonatele (curenții prin cele două rezistoare neliniare) și se obține caracteristica $I = f(U)$.

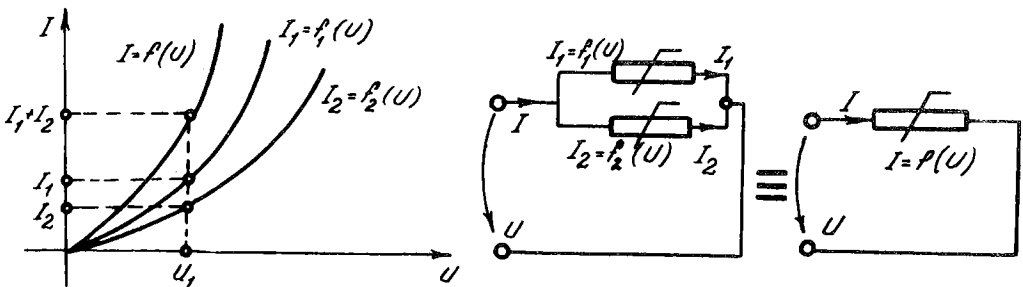


Fig. 3.123. Legarea în paralel a două rezistoare neliniare.

3.19.6. Aplicație. Pentru circuitul electric neliniar din Fig. 3.124 se cere:

a) Calculul curentului anodic I_a , tensiunii anodice U_a și tensiunii la bornele rezistenței liniare U_R .

b) Înlocuirea elementului neliniar (trioda) cu o porțiune de circuit echivalent linear și calcularea curentului I_a când tensiunea U_a variază de la 140V la 170 V.

Date:

- Tensiunea electromotoare $E_a = 300\text{ V}$ și $E_g = 1\text{ V}$
- Rezistența rezistorului $R_a = 115\text{ K}\Omega$
- Caracteristica volt-ampere a triodei pentru tensiune de grilă $E_g = 1\text{ V}$

(Fig. 3.125) $I_a = f(U_a)$.

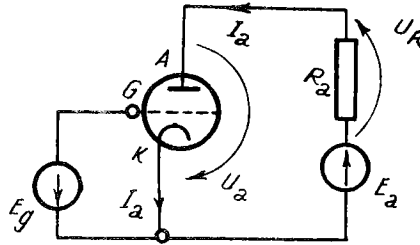


Fig.3.124. Circuit electric neliniar.

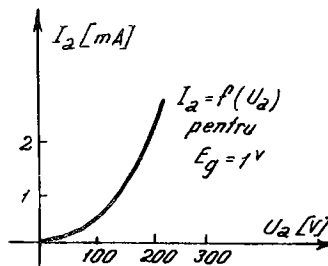


Fig.3.125. Caracteristica volt-ampere a triodei.

Obs. Intre grila G și catodul K ale triodei este legată sursa de tensiune electromotoare $E_g = 1\text{ V}$. Această tensiune aplicată determină o anumită caracteristică $I_a = f(U_a)$ prezentată în Fig.3.125.

Rezolvare. a) Se înlocuiește trioda (porțiunea A - K anod-catod) cu un element neliniar R_L .

Se obține schema echivalentă din Fig.3.126.

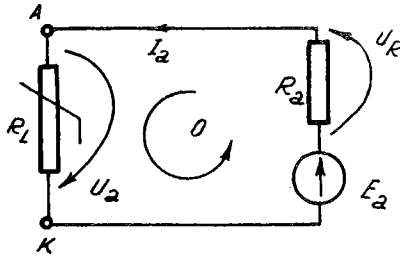


Fig. 3.126. Schema echivalentă a circuitului electric neliniar din Fig. 3.124.

Pe ochiul o, se scrie cu teorema a doua a lui Kirchhoff următoarea ecuație:

$$U_a = E_a - R_a I_a \quad \text{sau}$$

$U_a = 300 - 115 \cdot 10^3 \cdot I_a$ care reprezintă ecuația dreptei M N din Fig. 3.127.

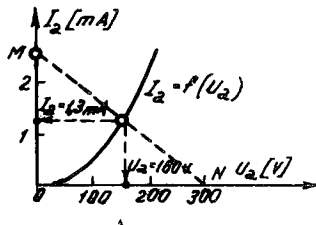


Fig. 3.127. Intersecția $I_a = f(U_a)$ cu dreapta MN.

Pe același grafic s-a redesenat caracteristica $I_a = f(U_a)$. Intersecția acestei caracteristici cu dreapta MN determină soluția. Se obține din grafic:

$$I_a = 1,3 \text{ mA}$$

$$U_a = 160 \text{ V}$$

Tensiunea pe rezistența R_a rezultă:

$$U_R = E_a - U_a = 300 - 160 = 140 \text{ V}$$

b) Pentru determinarea curentului anodic I_a , cînd tensiunea U_a variază de la 140 V la 170 V, se liniarizează caracteristica $I_a = f(U_a)$ pe porțiunea FD (Fig. 3.128).

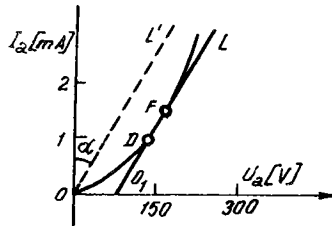


Fig. 3.128. Liniarizarea caracteristicii $I_a = f(U_a)$ pe porțiunea FD.

Punctul D corespunde tensiunii anodice $U_a = 140 \text{ V}$ iar F, tensiunii anodice $U_a = 160 \text{ V}$

Se unește D cu F determinînd dreapta $0_1 L$. Aceasta reprezintă caracteristica unui element liniar care pe porțiunea DF se confundă cu caracteristica triodei $I_a = f(U_a)$. Prin urmare, numai pentru porțiunea DF, triodei i se poate substitui o porțiune de circuit compusă din elemente liniare. În conformitate cu cele prezentate anterior, aceste elemente liniare sînt: o rezistență echivalentă R_e și o sursă de tensiune electromotoare E_e . Valorile acestora se determină din grafic (Fig. 3.127) și este:

$$R_e = \frac{U_a}{I_a} = \frac{120}{2 \cdot 10^{-3}} = 60 \text{ k}\Omega$$

pentru că la o tensiune anodică de $U_a = 120 \text{ V}$ corespunde un curent anodic $I_a = 2 \text{ mA}$ (din dreapta OL' paralelă cu OL).

Tensiunea electromotoare E_e se determină din același grafic și corespunde segmentului 00_1 .

Rezultă: $E_e = 75 \text{ V}$

Circuitul echivalent liniar este prezentat în Fig. 3.129 cu precizarea că circuitul echivalent este liniar pentru valori ale tensiunii U_a cuprinse între 140 și 160 V.

Pe ochiul o, se scrie cu teorema a doua a lui Kirchhoff următoarea ecuație:

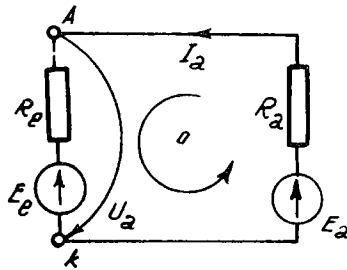


Fig. 3.129. Circuit electric liniar echivalent al circuitului electric din Fig. 3.124.

$$R_e I_a + R_a I_a = E_a - E_e$$

sau

$$I_a = \frac{E_a - E_e}{R_e + R_a} = \frac{300 - 75}{(115 + 60) 10^3} = 1,28 \text{ mA}$$

Rezultatul este foarte apropiat de cel găsit la punctul a) ($I_a = 1,3 \text{ mA}$).

Eroarea care este sub 2% provine din cauza că s-a calculat grafic.

CAPITOLUL 4

ELECTRODINAMICA

4. 1. Cîmpul magnetic în vid

Cîmpul magnetic, asemănător cîmpului electric, a fost constatat experimental în jurul corpurilor magnetizate și în jurul conductoarelor **parcuse** de curent.

Manifestarea cîmpului magnetic se pune în evidență prin acțiunile ponderomotoare (forțe și cupluri) exercitate asupra unor corpuri de probă: mici corpuri magnetizabile (cu proprietăți magnetice) și conductoare parcuse de curent. Corpuri magnetizabile sînt unele minereuri de fier, fierul și aliajele sale, nichelul, cobaltul, anumiți oxizi metalici etc. Acțiunile ponderomotoare depind de proprietățile corpului de probă și de proprietățile cîmpului magnetic.

Cîmp magnetic s-a dovedit tot experimental că există în regiunea din spațiu unde există un cîmp electric variabil în timp. Acest cîmp magnetic este deasemenea variabil în timp. În această regiune a spațiului în care se constată prezența simultană a cîmpului magnetic variabil și a cîmpului electric variabil, spunem că există cîmp electromagnetic.

Deci, cîmpul electric și cîmpul magnetic reprezintă cazuri particulare ale cîmpului electromagnetic.

Pentru a se înțelege mai bine și pentru a se reține mai ușor, se definesc în continuare aceste cîmpuri electrice și magnetice.

Cîmpul electrostatic este o stare limită a cîmpului electromagnetic corespunzătoare situației în care sarcinile electrice sînt invariabile în timp și nu se deplasează în raport cu un sistem de referință.

Cîmpul electric este o stare limită a cîmpului electromagnetic în care sarcinile electrice sînt invariabile în timp dar se deplasează în raport cu un sistem de referință.

Cîmpul magnetostatic este o altă stare limită a cîmpului electromagnetic și este produs de magneții permanenți (minereuri de fier, fierul și aliajele lui, anumiți oxizi metalici etc), în stare de repaus. În această stare, mărimile electrice ale cîmpului sînt nule iar cele magnetice sînt invariabile în timp.

Cîmpul magnetic este de asemenea o stare limită a cîmpului electromagnetic dar este produs de mișcarea ordonată a sarcinilor electrice.

Prin urmare, cîmpul magnetic este produs de magneți permanenți, curenți electrice și de cîmpul electric variabil în timp.

Revenind la explorarea cîmpului magnetic cu ajutorul corpului de probă, trebuie arătat că cel mai potrivit corp de probă este o mică spiră foarte subțire parcursă de curent, numită buclă de curent (Fig.4.1).

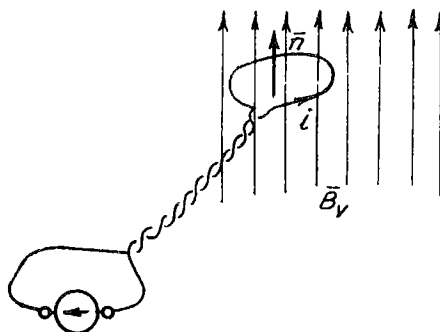


Fig.4.1. Buclă de curent.

Dacă se aduce această buclă de curent în regiunea în care se presupune că există cîmp magnetic, se constată că asupra ei se exercită o acțiune de natură mecanică, un cuplu de forțe C .

Tot din experiență se deduce că acest cuplu are următoarea expresie vectorială: $\vec{C} = \vec{m}_b \times \vec{B}_v$,

(4.1)

în care:

\vec{m}_b reprezintă momentul magnetic al buclei și caracterizează corpul de probă (bucula) din punct de vedere magnetic. La rîndul său, acest moment magnetic este dat de relația:

$$\vec{m}_b = i A \vec{n} \text{ sau scalar } m_b = iA. \quad (4.2)$$

în care:

i reprezintă curentul care străbate bucla;

A - aria buclei;

n - vectorul normal la aria buclei A (v. Fig. 4.1.).

Rezultă că momentul magnetic al buclei de curent este o mărime care se poate exprima prin mărimi cunoscute.

Unitatea de măsură - după cum rezultă din relația de mai sus - este 1 amper - metru pătrat (1 Am^2) în SI.

B_v reprezintă inducția magnetică în vid.

Unitatea de măsură în SI este 1 tesla (1 T). Rezultă:

$$\left[B_v \right] = \frac{[C]}{[i][A]} = \frac{1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}}{1 \text{ A} \cdot 1 \text{ m}^2} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ A} \cdot 1 \text{ m}} = 1 \text{ T} \quad (4.3)$$

4.1.1. Linia de câmp magnetic. Dacă se explorează toate punctele regiunii și se determină astfel câmpul magnetic de inducție B_v , se pot imagina linii care au proprietatea că tangenta lor în orice punct are direcția și sensul vectorului inducției magnetice \vec{B}_v . Ansamblul acestor linii de câmp magnetic formează spectrul câmpului magnetic.

Ca exemplu, se prezintă în Fig. 4.2 spectrul câmpului magnetic produs de curentul electric dintr-un conductor rectiliniu. În Fig. 4.3, se reprezintă spectrul câmpului magnetic produs de curentul care străbate o bobină.

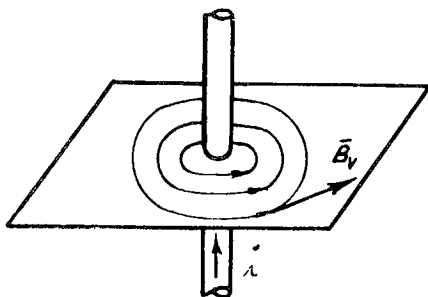


Fig. 4.2. Spectrul câmpului magnetic produs de un conductor produs de curentul i .

Sensul liniilor de câmp magnetic este asociat cu sensul curentului care produce câmpul magnetic după regula burghiului drept.

Spre deosebire de liniile câmpului electric care pleacă de la sarcina negativă și se aseară la sarcina pozitivă, liniile câmpului magnetic sînt linii închise, nu au început și nu au sfîrșit. Din acest motiv câmpul magnetic este un câmp solenoidal.

Câmpul magnetic se numește uniform sau omogen într-o anumită regiune din spațiu dacă inducția sa magnetică este aceeași în fiecare punct din regiunea considerată, adică vectorul \vec{B} are în toate punctele aceeași direcție, același sens și aceeași mărime.

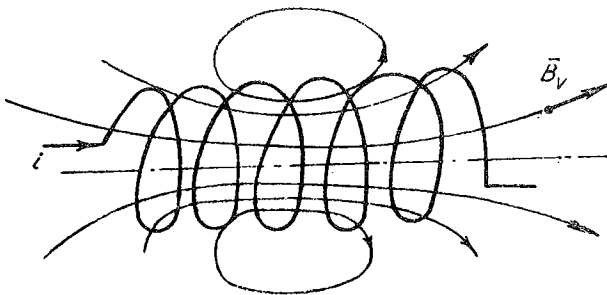


Fig.4.3. Spectrul câmpului magnetic produs de o bobină parcursă de curentul i .

4.1.2. Fluxul magnetic

Se consideră o suprafață S străbătută de un câmp magnetic de inducție \vec{B} (Fig. 4.4).

Se definește fluxul magnetic sau fluxul inducției magnetice în vid \vec{B} prin suprafața S produsul:

$$\Phi_S = B_v A_S \quad (4.4)$$

în care s-a notat:

ϕ_s - fluxul magnetic ;
 B_v - inducția magnetică în vid ;
 A_s - aria suprafeței S.

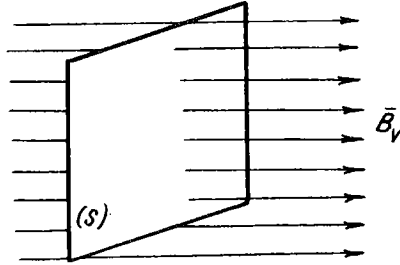


Fig.4.4. Suprafață străbătută de \vec{B}_v .

În cazul în care direcția vectorului inducției B_v formează un unghi α cu normala la suprafața S, atunci fluxul magnetic ϕ_s are expresia:

$$\phi_s = B_v A_s \cos \alpha \quad (4.5)$$

Dacă suprafața S este o suprafață închisă, atunci fluxul magnetic este nul, adică:

$$\phi_{\Sigma} = 0 . \quad (4.6)$$

S-a notat suprafața închisă cu litera grecească Σ (sigma).

Demonstrația se face în cazul unui paralelipiped cu axa paralelă liniilor de câmp magnetic, respectiva vectorului inducției magnetice \vec{B}_v (Fig. 4.5).

Fluxul total prin suprafața Σ reprezintă suma fluxurilor de pe fețele laterale și frontale adică:

$$\begin{aligned} \phi_{\Sigma} &= \phi_{s \text{ lat}} + \phi_{sf1} + \phi_{sf2} = \\ &= 0 - B_v S_{f1} + B_v S_{f2} = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\phi_{\text{lat}} = B_v S_{\text{lat}} \cos \alpha_1 = B_v S_{\text{lat}} \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ deoarece unghiul } \alpha_1$$

dintre normala suprafeței laterale și vectorul \vec{B}_v este $\frac{\pi}{2}$.

$$\phi_{sf1} = B_v S_{f1} \cos \alpha_2 = B_v S_{f1} \cos \pi = - B_v S_{f1}$$

și

$$\phi_{sf2} = B_v S_{f2} \cos \alpha_3 = B_v S_{f1} \cos 0^\circ = B_v S_{f2}$$

deoarece normala la suprafața S_{f1} face unghiul $\alpha_2 = \pi$ cu \vec{B}_v și vectorul \vec{B}_v "intră" în suprafața S_{f1} iar normala la suprafața S_{f2} face un unghi $\alpha_3 = 0^\circ$ cu \vec{B}_v (vectorul \vec{B}_v "iese" din suprafața S_{f2}).

Dar $S_{f1} = S_{f2}$. Deci $\Phi_\Sigma = 0$.

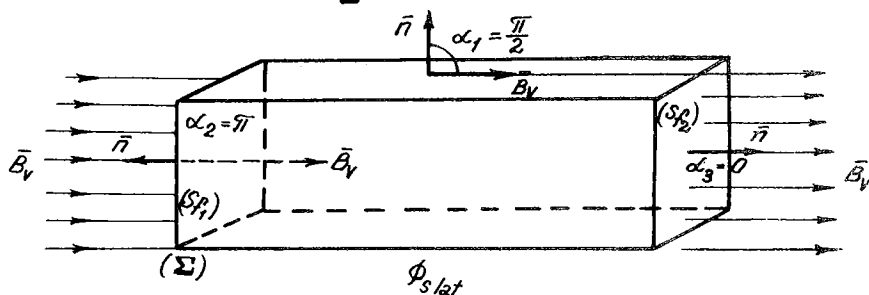


Fig.4.5. Paralelipiped parcurs de \vec{B}_v .

Unitatea de măsură a fluxului magnetic în sistemul internațional SI se numește Weber (1Wb).

$$1\text{Wb} = 1 \text{ T} \cdot 1 \text{ m}^2 \quad (4.8)$$

4.2. Forțe în câmp magnetic

4.2.1. Forța lui Lorentz. (Forța magnetică)

Tot prin experiență s-a constatat că asupra corpului de probă încărcat cu sarcină electrică q , aflat în mișcare cu viteza \vec{v} într-un câmp magnetic, se exercită o forță deosebită de forța gravitațională, mecanică sau electrică. For-

ța aceasta este de natură magnetică și se exprimă printr-o relație vectorială stabilită de Hendrik Antoon Lorentz - fizician olandez (1853 - 1928). Expresia este

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}_v \quad \text{în care:} \quad (4.9)$$

- \vec{F}_m - forța magnetică;
- q - sarcina corpului de probă;
- \vec{v} - viteza corpului de probă;
- \vec{B}_v - inducția magnetică a câmpului magnetic.

Forța magnetică \vec{F}_m , care se mai numește "forța Lorentz", este rezultat al produsului vectorial dintre viteza \vec{v} și inducția magnetică în vid \vec{B}_v ; îndeplinește următoarele:

- este perpendiculară pe planul determinat de vectorii \vec{v} și \vec{B}_v ;
- sensul forței se asociază după regula burghiului drept; conform acestei reguli, se rotește primul vector \vec{v} pînă se suprapune ca orientare peste cel de al doilea vector \vec{B}_v pe drumul cel mai scurt; burghiul va înainta după sensul forței \vec{F}_m (Fig. 4.6); pentru sarcină negativă adică $q < 0$, sensul forței este opus (Fig. 4.7);

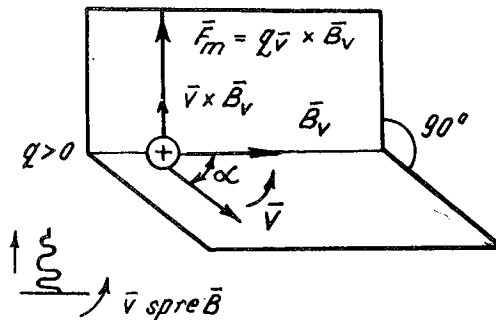


Fig. 4.6. Forța Lorentz (\vec{F}_m) are sensul de înaintare al burghiului ($q > 0$).

- modulul forței este:

$$F_m = |q| \cdot v \cdot B_v \sin \alpha \quad (4.10)$$

unde α este unghiul dintre \vec{v} și \vec{B}_v (Fig. 4.6 și 4.7);

- forța este maximă pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (vectorii \vec{v} și \vec{B}_v sînt perpendiculari între ei):

$$F_{m \max} = |q| v B_v \sin \frac{\pi}{2} = |q| v B_v; \quad (4.11)$$

- forța este nulă pentru $\alpha = 0$ (vectorii \vec{v} și \vec{B} sînt paraleli între ei):

$$F_{m \min} = |q| v B_v \sin 0^\circ = 0, \quad (4.12)$$

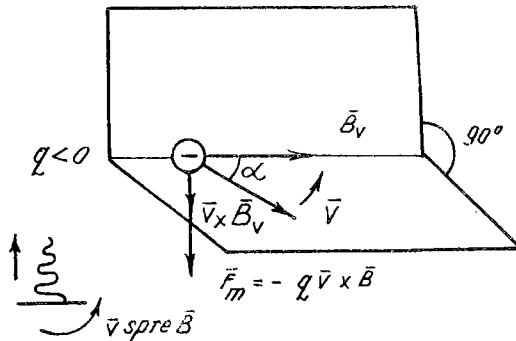


Fig.4.7. Forța Lorentz (\vec{F}_m) este opusă sensului de înaintare al burghiului ($q < 0$).

Aplicație. Un electron cu masa $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg și sarcina electrică $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C pătrunde într-un câmp magnetic uniform de inducție $B_v = 1$ T, cu viteza $v = 10^5$ m/s. Viteza \vec{v} este perpendiculară pe \vec{B}_v .

Se cere:

- Forța lui Lorentz exercitată asupra electronului;
- Traectoria electronului în câmpul magnetic.

Conform expresiei (4.11) forța lui Lorentz este:

$$F_m = q_e v B_v \sin \frac{\pi}{2} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5 \cdot 1,1 = 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ N}$$

Din legea fundamentală a dinamicii

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

rezultă în acest caz:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_o} = \frac{q_e}{m_o} \vec{v} \times \vec{B}.$$

Prin urmare, accelerația este normală pe viteză și modulul constant:

$$a = \frac{|q_e|}{m_o} v B = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \cdot 10^5 \cdot 1 = 1,76 \cdot 10^{16} \text{ m/s}^2.$$

Dacă accelerația este constantă în modul și este perpendiculară pe viteză, atunci mișcarea este circulară uniformă:

$$a = a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{|q_e| v B}{m_o} = r \omega^2$$

Prin urmare, traiectoria este un cerc de rază

$$r = \frac{m_o v}{|q_e| B} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1} = 5,68 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

și viteza unghiulară

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{10^5}{5,68 \cdot 10^{-7}} = 1,76 \cdot 10^{11} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

4.2.2. Forța lui Laplace (Forța electromagnetică)

Dacă într-un câmp magnetic se introduc conductoare parcurse de curenți, se constată apariția unor forțe de natură magnetică ce se exercită asupra acestor conductoare. Ca urmare, conductoarele se deplasează în câmp magnetic.

Fizicianul și matematicianul francez Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827) a formulat expresia acestei forțe de natură magnetică \vec{F}_L ce se exercită asupra unui segment rectiliniu de conductor parcurs de curent;

$$\vec{F}_L = i \vec{l} \times \vec{B}_v \quad (4.13)$$

în care:

i - intensitatea curentului electric care străbate conductorul;

\vec{l} - lungimea segmentului de conductor orientată în sensul curentului

(Fig. 4. 8).

\vec{B}_v - inducția magnetică în vid a unui câmp uniform.

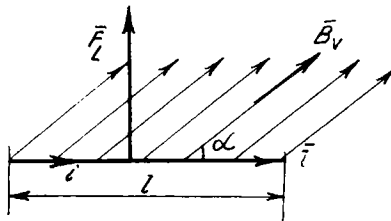


Fig. 4. 8. Forța F_L (Forța Laplace)

Acestei forțe i s-a spus electromagnetică sau "forță Laplace" și este rezultatul produsului vectorial dintre segmentul de conductor orientat parcurs de curent \vec{l} și inducția magnetică în vid \vec{B}_v . Îndeplinește următoarele condiții:

- este perpendiculară pe planul determinat de vectorii \vec{l} și \vec{B}_v ;
- sensul forței se asociază după regula burghiului drept;
- modulul forței este

$$F_L = i B_v l \sin \alpha \quad (4.14)$$

unde α este unghiul dintre \vec{l} și \vec{B}_v (Fig. 4. 8);

- este maximă pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (vectorii \vec{l} și \vec{B}_v sînt perpendiculari între ei)

$$F_{L \max} = i B_v l \sin \frac{\pi}{2} = i B_v l ; \quad (4.14 a)$$

- este nulă pentru $\alpha = 0$ (vectorii \vec{l} și \vec{B}_v sînt paraleli între ei)

$$F_{L \min} = i l B_v \sin 0^\circ = 0 ; \quad (4.14 b)$$

4.2.3. Forța lui Ampère (Forța electrodinamică)

Dacă într-un câmp magnetic creat în jurul unui conductor parcurs de curent, se introduce paralel un alt conductor parcurs de curent, se constată apariția unei forțe de natură magnetică ce se exercită între aceste conductoare (Fig. 4. 9).

Prima dată, această observație a fost făcută de fizicianul francez André Marie Ampère (1775 - 1836) și a determinat următoarea expresie a forței:

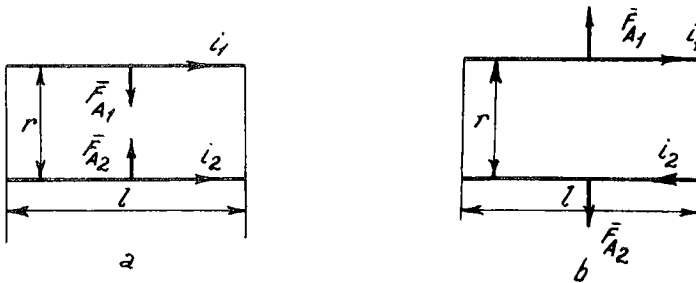


Fig. 4. 9. Forța lui Ampère (F_A).

a) Conductoarele se atrag; b) conductoarele se resping.

$$F_A = \frac{\mu_0}{2l} \frac{i_1 i_2}{r} l \quad (4.15)$$

în care:

i_1 și i_2 reprezintă curenții care străbat conductoarele 1 și 2;

l - lungimea segmentelor conductoarelor 1 și 2 pe care se calculează forța;

r - distanța între cele două conductoare paralele 1 și 2;

μ_0 - constantă universală, numită permeabilitatea absolută a vidului.

În sistemul internațional S I este egală cu:

$$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ henry / metru.}$$

Unitatea de măsură henry se va explica ulterior ; μ_0 se mai numește constanta magnetică absolută a vidului.

Această forță care se numește electrodinamică sau "forța lui Ampere" îndeplinește condițiile:

- este de atracție și pozitivă când $i_1 i_2 > 0$;
- este de respingere și negativă când $i_1 i_2 < 0$.

O altă formulare este următoarea:

Conductoarele parcurse de curenți de același sens se atrag (Fig. 4.9 a) și de sens contrar se resping (Fig. 4.9 b)

Forța lui Ampere a permis definirea unității de intensitate de curent numită amper și notată cu litera A.

Pentru $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$

$$i_1 = i_2 = 1 \text{ A}$$

$$l = 1 \text{ m}$$

și $r = 2 \text{ m}$ (distanța între conductoare) se obține

$$F_A = \frac{4 \pi \cdot 10^{-7}}{2 \pi} \cdot \frac{1^2}{2} = 10^{-7} \text{ N}$$

astfel că amperul se poate defini astfel:

Amperul este intensitatea curentului din fiecare conductor al unei perechi de conductoare paralele situate în vid la distanța de 2 m, atunci când asupra fiecărui metru de lungime a fiecărui conductor se exercită forța de 10^{-7} N .

Multipli și submultipli amperului, folosiți în electrotehnică sînt:

$$1 \text{ kA} = 10^{-3} \text{ A (kiloamper)}$$

$$1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A (miliamper)}$$

$$1 \mu\text{A} = 10^{-6} \text{ A (microamper)}$$

Aplicație. Să se calculeze forța lui Ampere ce se exercită între două conductoare paralele de lungime $l = 1,5 \text{ m}$, situate în vid la distanța $r = 0,5 \text{ m}$, parcurse de curenți avînd intensitățile : $i_1 = i_2 = 10.000 \text{ A}$.

$$F_A = \frac{\mu_0}{2 \pi} i_1 i_2 \frac{l}{r} = \frac{4 \pi \cdot 10^{-7}}{2 \pi} (10^4)^2 \frac{1,5}{0,5} = 60 \text{ N}.$$

4.3. Formula lui Biot - Savart

Prin experiență, Biot și Savart au stabilit o formulă pentru calculul inducției magnetice în vid B_v produsă de un circuit filiform parcurs de curentul continuu i . Pentru conductorul filiform și rectiliniu, inducția magnetică în vid B_v la distanța r este exprimată prin formula lui Biot - Savart:

$$B_v = \frac{\mu_o i}{2 \pi r} \quad (4.16)$$

Formula se poate deduce și din expresiile forței lui Ampère și forței Laplace.

Forța lui Ampère se interpretează și în modul următor: fiecare dintre cele două conductoare produce în jurul său un câmp magnetic care exercită o forță asupra celuilalt conductor (Fig. 4.10).

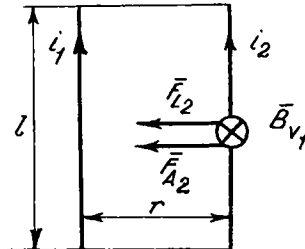


Fig. 4.10. Forțele \vec{F}_{L2} și \vec{F}_{A2} exercitate de conductorul 1 asupra conductorului 2.

Dacă forța lui Ampère \vec{F}_{A2} , exercitată de conductorul 1 asupra conductorului 2, se interpretează ca fiind forța Laplace F_{L2} , rezultată din acțiunea câmpului magnetic al conductorului 1 asupra conductorului 2, atunci se poate scrie în modul:

$$F_{A2} = F_{L2} \text{ sau}$$

$$\frac{\mu_o}{2 \pi} \frac{i_1 i_2}{r} l = B_{v1} i_2 l$$

respectiv
$$B_{v1} = \frac{\mu_o i_1}{2 \mathcal{H} r}$$

și pentru un conductor oarecare filiform și rectiliniu,

$$B_v = \frac{\mu_o i}{2 \mathcal{H} r} \quad (\text{identică cu relația 4.16}).$$

Din expresia vectorială a forței Laplace, s-a văzut că această forță este perpendiculară pe planul determinat de conductor și de inducția magnetică în vid \vec{B}_v , rezultînd deci că vectorul \vec{B}_v este tangent la cercul de rază r , centrul cercului fiind plasat pe axa conductorului 1.

Prin urmare, liniile de cîmp magnetic ale unui conductor rectiliniu și infinit de lung sînt cercuri concentrice cu centrul pe conductor (Fig.4.11).

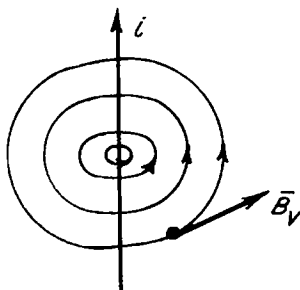


Fig.4.11. Liniile de cîmp magnetic sînt concentrice cu centrul conductorului.

Sensul vectorului \vec{B}_v se asociază cu sensul curentului după regula burghiului drept.

4.4. Intensitatea cîmpului magnetic

Intensitatea cîmpului magnetic în vid \vec{H}_v se definește ca raportul dintre inducția magnetică în vid \vec{B}_v și permeabilitatea vidului μ_o

$$\vec{H}_v = \frac{\vec{B}_v}{\mu_o} \quad (4.17)$$

Unitatea de măsură a intensității câmpului magnetic în sistemul internațional SI este 1 amper/metru (1 A/m).

Aplicație. Să se calculeze intensitatea câmpului magnetic produs de un conductor rectiliniu parcurs de curentul $i = 6,28$ A la distanța $r = 1$ m de axa sa.

$$H = \frac{i}{2 \pi r} = \frac{6,28}{2 \pi \cdot 1} = 1 \text{ A/m}$$

4.5. Tensiunea magnetomotoare. Solenația

Se consideră un câmp magnetic uniform de inducție \vec{B}_v și intensitatea câmpului magnetic \vec{H}_v (Fig. 4.12).

În interiorul câmpului între două puncte A și B se consideră drumul rectiliniu orientat \vec{l}_{AB} .

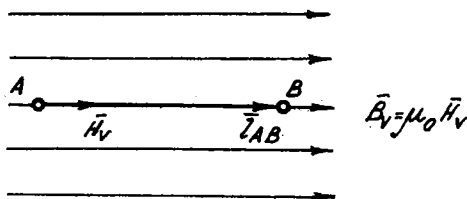


Fig. 4.12. Câmp magnetic uniform \vec{H}_v .

Se numește tensiune magnetică asociată unui drum rectiliniu \vec{l}_{AB} mărimea

$$U_{mAB} = H_v l_{AB} \quad (4.18)$$

Dacă se consideră drumul \vec{l}_{AB} înclinat sub un unghi α față de liniile de câmp (Fig.4.13), atunci tensiunea magnetică

$$U_{mAB} = H_v l_{AB} \cos \alpha. \quad (4.19)$$

Tensiunea magnetică este o mărime algebrică al cărei sens de calcul este cel al vectorului \vec{l}_{AB} . Astfel:

$$U_{mAB} = H_v l_{AB} \cos \alpha = \begin{cases} H l_{AB} & \text{dacă } \alpha = 0 \\ 0 & \text{dacă } \alpha = \frac{\pi}{2} \\ -H l_{AB} & \text{dacă } \alpha = \pi \end{cases} \quad (4.20)$$

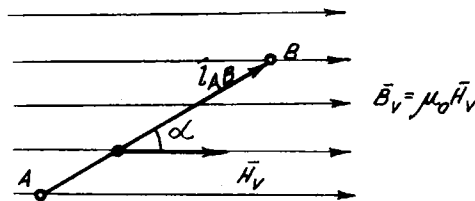


Fig.4.13. Liniile de câmp magnetic \vec{H}_v , înclinate sub unghiul α .

Unitatea de măsură pentru tensiunea magnetică în sistemul internațional SI este 1 amper (1 A)..

Din

$$H_v l = U_m \quad \text{avem}$$

$$1 \text{ A/m} \times 1 \text{ m} = 1 \text{ A}.$$

Tensiunea magnetică se numește tensiune magnetomotoare dacă drumul pe care se calculează este un drum închis; se notează cu U_{mm} .

Solenație. Se numește solenație suma algebrică a curenților înconjurați de o curbă închisă (Fig.4.14).

Între tensiunea magnetomotoare U_{mm} și solenație există o relație determinată prima dată de Ampère, cu următorul enunț: tensiunea magnetomotoare pe orice drum închis este egală cu suma algebrică a intensităților curenților din conductoarele înconjurate de drumul închis:

$$U_{mm} = \sum i_k. \quad (4.21)$$

Pentru N conductoare străbătute de curentul i

$$U_{mm} = Ni . \quad (4.21 a)$$

Relația stabilită de Ampère, cunoscută și sub numele de teorema lui Ampère, este adevărată în curent continuu .

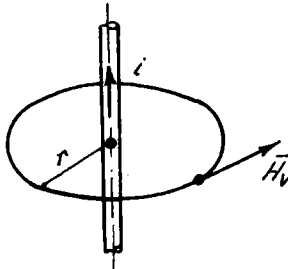


Fig. 4. 14. Solenația din interiorul curbei închise este curentul i .

În cazul în care curenții înconjurați de drumul închis sînt variabili, egalitatea nu mai este adevărată.

Aplicația 1. Să se calculeze intensitatea cîmpului magnetic în vid produs de un conductor filiform, rectiliniu, parcurs de curentul i , într-un punct aflat la distanța d de conductorul respectiv (Fig. 4. 15).

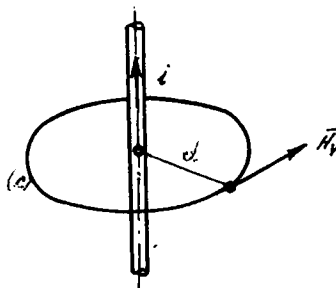


Fig. 4. 15. Intensitatea cîmpului magnetic la distanța d .

Rezolvare.

Se consideră conturul închis de forma unui cerc (c), aflat într-un plan perpendicular pe conductor și concentric cu axa conductorului. Din teorema lui Ampère avem:

$$U_{mm} = Ni$$

Cum în cazul acesta numărul conductoarelor parcurse de curenți este $N = 1$ și cum tensiunea magnetomotoare $U_{mm} = H_v l_c$ în care l_c este drumul închis, respectiv lungimea cercului:

$$l_c = 2 \pi d$$

rezultă

$$H_v 2 \pi d = i$$

sau

$$H_v = \frac{i}{2 \pi d}$$

Intensitatea câmpului magnetic H_v este în orice punct tangent la cerc și de modul constant.

Aplicația 2. Să se calculeze intensitatea câmpului magnetic în vid produsă de un solenoid foarte lung de lungime l format din N spire parcurse de curentul i (Fig. 4.16).

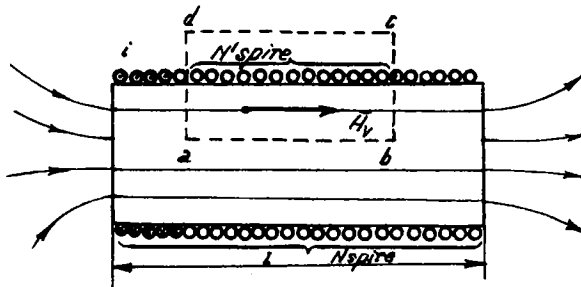


Fig. 4.16. Câmpul magnetic produs de solenoid.

Experimental se constată că în interiorul solenoidului câmpul este uniform adică intensitatea câmpului magnetic în vid \vec{H}_v și inducția magnetică în vid \vec{B}_v sînt orientate în lungul axei solenoidului. În exteriorul solenoidului se constată tot experimental că nu există câmp magnetic.

Aplicînd teorema lui Ampère pe drumul închis a, b, c, d, a (perimetrul unui dreptunghi) care cuprinde N' spire, rezultă:

$$U_{mm} = H_v l_{ab} \cos 0^\circ + H_v l_{bc} \cos \frac{\pi}{2} + 0 l_{cd} + H_v l_{da} \cos \frac{\pi}{2} = H_v l_{ab}$$

$$\text{sau } N' i = H_v l_{ab}$$

Pentru $l_{ab} = l$ avem și $N' = N$.

$$\text{Rezultă } U_{mm} = H_v l$$

și $U_{mm} = Ni$ în care Ni reprezintă solenația solenoidului.

$$\text{Rezultă } H_v l = Ni$$

$$\text{sau } H_v = \frac{Ni}{l}$$

Dacă $N = 1.000$ spire, $l = 0,5$ m și $i = 2$ A rezultă:

$$H_v = \frac{1.000 \cdot 2}{0,5} = 4.000 \text{ A/m.}$$

4.6. Cîmpul magnetic în corpuri

Experimental se constată că atunci cînd circuitul filiform parcurs de curentul continuu i este plasat într-o substanță (nu mai este plasat în vid) inducția magnetică capătă altă valoare. Schimbarea inducției magnetice în prezența substanței sau corpurilor este o consecință a orientării curenților moleculari ai corpului în prezența câmpului magnetic exterior.

Curenții moleculari, reprezintă o ipoteză a fizicianului francez Ampère, conform căreia corpurile plasate într-un câmp magnetic capătă o stare de magnetizare proprie (generează câmp magnetic) ca urmare a acestor curenți mole-

culari sau curenți legați. Aceștia sînt determinați de mișcarea la scară microscopică a electronilor din jurul moleculelor sau atomilor.

În natură există o categorie de corpuri la care curenții moleculari, sub acțiunea unui cîmp magnetic exterior, se ordonează în așa mod în cît intensifică cîmpul magnetic rezultat. Corpurile se numesc paramagnetice și sînt: oxigenul, aluminiul, platina etc.

Există altă categorie de corpuri, care se numesc diamagnetice, la care orientarea curenților moleculari este de așa natură încît slăbesc cîmpul magnetic rezultat. Corpuri cu astfel de proprietate sînt: cupru, argint, bismut, apă etc.

O categorie specială, o constituie corpurile feromagnetice (fier, nichel, cobalt) care se magnetizează foarte puternic în prezența unui cîmp magnetic exterior și care pot să-și păstreze starea de magnetizare și în absența acestui cîmp.

4.6.1. Magnetizarea temporară și permanentă.

Din antichitate, s-au descoperit în Asia mică anumiți oxizi de fier care au proprietatea de a produce cîmp magnetic în jurul lor. Se spune despre aceste corpuri că au o stare de magnetizare permanentă sau că sînt magneți permanenți. Magneții permanenți pot fi produși în mod artificial prin introducerea materialelor feromagnetice într-un cîmp magnetic.

Un corp este magnetizat sau posedă o stare de magnetizare dacă asupra lui acționează forțe sau cupluri cînd este introdus într-un cîmp magnetic.

Starea de magnetizare este de două tipuri: magnetizare permanentă și magnetizare temporară.

Magnetizarea permanentă nu este condiționată de prezența unui cîmp magnetic exterior, aceasta există și în absența cîmpului magnetic.

Magnetizarea temporară există numai în prezența unui cîmp magnetic exterior: în absența acestui cîmp, corpul nu este magnetizat.

Pentru a caracteriza starea de magnetizare a unui corp s-a introdus o mărime vectorială denumită moment magnetic. Se notează cu \bar{m} .

Momentul magnetic \bar{m} poate fi compus din suma a două momente magnetice, unul corespunzător magnetizării permanente \bar{m}_p și altul corespunzător magnetizării temporare \bar{m}_t ;

$$\bar{m} = \bar{m}_p + \bar{m}_t \quad (4.22)$$

în care: \bar{m} - momentul magnetic;

\bar{m}_p - momentul magnetic permanent;

\bar{m}_t - momentul magnetic temporar.

Dacă se introduce într-un câmp magnetic de inducție B_v un mic corp magnetizat de moment \bar{m} , asupra corpului se va exercita o forță și un cuplu (Fig. 4.17).

Expresia matematică a forței fiind mai complicată nu o prezentăm aici. expresia cuplului care ia naștere are însă forma:

$$\bar{C} = \bar{m} \times \bar{B}_v \quad (4.23)$$

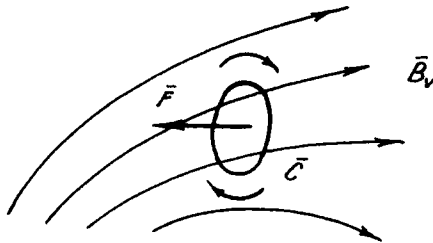


Fig. 4.17. Asupra corpului se exercită o forță și un cuplu.

Unitatea de măsură rezultă din relația (4.23):

$$m = \frac{[C]}{[B_v]} = \frac{[F] [L]}{[B_v]} = \frac{[I] [L] [B_v] [L]}{[B_v]} = [I] [L]^2 \quad (4.23 \text{ a})$$

Rezultă că în sistemul S I unitatea de măsură pentru momentul magnetic este amper-metru pătrat (1 Am^2).

În cazul unui corp de dimensiuni mari, apare un moment magnetic rezultat ca reprezentînd suma vectorială a momentelor magnetice ale micilor corpuri \bar{m} . Notăm această sumă cu $\Delta \bar{m}$.

Dacă se face raportul dintre suma vectorială a momentelor magnetice $\Delta \bar{m}$ și volumul ΔV , se obține o nouă mărime analoagă cu densitatea de volum a corpului. Această mărime se numește intensitatea de magnetizare sau magnetizație.

Se notează cu \bar{M} și este egală cu:

$$\bar{M} = \frac{\Delta \bar{m}}{\Delta V} \quad (4.24)$$

Rezultă că unitatea de măsură a magnetizației \bar{M} este în sistemul internațional SI, 1 amper pe metru (1 A/m).

Magnetizația se poate descompune în componente:

$$\bar{M} = \bar{M}_p + \bar{M}_t \quad (4.25)$$

în care: \bar{M} - magnetizație;

\bar{M}_p - magnetizație permanentă;

\bar{M}_t - magnetizație temporară.

4.6.2. Interpretarea microscopică a magnetizației. După cum s-a prezentat în "Electrostatică", sarcina electrică q poate exista liberă ca sarcină pozitivă sau negativă.

În magnetism, se pare că, nu există sarcini sau mase magnetice separate analoage sarcinilor electrice. Există împreună și totdeauna cei doi poli magnetici: polul "nord" și polul "sud". Încercările de a izola acești poli au rămas fără rezultat. Dacă un magnet permanent este spart (Fig. 4.18), fragmentele rezultate formează la rîndul lor magneți permanenți cu doi poli: nord și sud.

Poli magnetici izolați sau "monopoli" au fost presupuși că există de către P.A.M. Dirac în 1931 dar pînă acum nu s-a reușit totuși izolarea acestora.

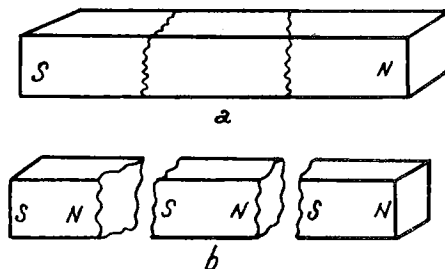


Fig. 4.18. Magnet permanent .
a) întreg; b) spart.

În ceea ce privește magnetizarea corpurilor, Ampère a emis ipoteza că această stare de magnetizare reprezintă rezultatul stărilor de magnetizare microscopice. Conform acestei ipoteze, magnetizarea provine din curenții moleculari care circulă la nivelul moleculelor. Acești curenți moleculari sau legăți se numesc și bucle de curent. Pentru un atom, momentul său magnetic este rezultatul momentelor magnetice datorită mișcărilor electronilor pe orbită și datorită rotirii acestora în jurul axei lor. Orientările acestor momente sînt haotice datorită agitației termice dar sub acțiunea unui cîmp magnetic exterior corpul capătă un moment magnetic rezultat din punct de vedere macroscopic, proporțional cu valoarea intensității cîmpului magnetic din corp \vec{H} .

Matematic, dependența dintre magnetizația temporară \vec{M}_t și intensitatea cîmpului magnetic din corp \vec{H} se scrie:

$$\vec{M}_t = \chi_m \vec{H} \quad (4.26)$$

Aici χ_m - litera grecească se pronunță hi reprezintă susceptivitatea magnetică.

Această constantă poate fi pozitivă sau negativă.

Corpurile pentru care $\chi_m > 0$ se numesc paramagnetice iar cele pentru care $\chi_m < 0$ se numesc diamagnetice.

Moleculele corpurilor paramagnetice au moment magnetic, câmpul magnetic exterior orientînd în direcția lui aceste momente magnetice.

Moleculele corpurilor diamagnetice nu au moment magnetic, câmpul magnetic inducînd un moment magnetic care se opune câmpului exterior.

O clasă specială o formează corpurile feromagnetice.

Acestea se caracterizează printr-o magnetizare foarte intensă la introducerea lor într-un câmp magnetic exterior.

Se compun din zone foarte mici cu moment magnetic, orientate în mod haotic în lipsa câmpului magnetic exterior dacă corpul nu a fost magnetizat anterior.

Introduse într-un câmp magnetic exterior, tot mai multe zone ale corpului se orientează în direcția câmpului pînă ce se atinge o limită denumită limita de saturație.

4.6.3. Intensitatea câmpului magnetic și inducția magnetică în interiorul corpurilor.

Pentru caracterizarea stării magnetice a unui corp se folosesc trei mărimi: inducția magnetică \vec{B} , magnetizația \vec{M} și intensitatea câmpului magnetic \vec{H} . Inducția magnetică în interiorul corpurilor se notează cu \vec{B} spre a fi deosebită de inducția magnetică în vid, notată după cum s-a prezentat anterior cu \vec{B}_v . Analog se folosește notarea intensității câmpului magnetic \vec{H} . În vid se notează cu \vec{H}_v iar în corpuri cu \vec{H} .

Inducția magnetică \vec{B} caracterizează câmpul magnetic din interiorul corpurilor iar magnetizația \vec{M} reprezintă "reacția" corpului la câmpul magnetic în care a fost introdus.

Intensitatea câmpului magnetic \vec{H} , se demonstrează experimental că, are următoarea expresie matematică:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} . \quad (4.27)$$

Această relație se mai scrie și în modul următor:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad (4.28)$$

Dacă corpurile nu posedă o magnetizație temporară \vec{M}_t sau permanentă \vec{M}_p , rezultă că $\vec{M} = 0$ și relația devine:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (4.29)$$

Practic nu există substanță în care $\vec{M} = 0$ și de aceea relația (4.29) este valabilă numai în vid.

Dacă se presupune că $\vec{M}_p = 0$ - corpul nu posedă o magnetizare permanentă - se scrie că:

$$\vec{M}_t = \chi_m \vec{H} . \quad (4.30)$$

$$\text{Rezultă:} \quad \vec{M} = \vec{M}_t = \chi_m \vec{H} . \quad (4.31)$$

Prin înlocuire în (4.28)

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} ; \quad (4.32)$$

mărimea

$$1 + \chi_m = \mu_r \quad (4.33)$$

se numește permeabilitate relativă a corpului.

Dacă se notează:

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (4.34)$$

în care μ se numește permeabilitate absolută a corpului, rezultă:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} . \quad (4.35)$$

Adică, inducția magnetică este proporțională cu intensitatea câmpului magnetic, coeficientul de proporționalitate fiind permeabilitatea absolută a corpului.

Permeabilitatea relativă μ_r poate fi interpretată ca fiind raportul dintre permeabilitatea corpului și permeabilitatea vidului:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (4.36)$$

Din această expresie, rezultă că permeabilitatea relativă μ_r capătă următoarele valori:

$\mu_r = 1$ pentru vid;
 $\mu_r \simeq 1$ (= se citește aproximativ egal) pentru corpuri neferomagnetice;
 $\mu_r \gg 1$ pentru corpuri feromagnetice; în acest caz, valoarea lui μ_r poate fi de ordinul zecilor de mii.

4.6.4. Fluxul magnetic în corpuri introduse în câmp magnetic.

Legea fluxului magnetic

Se definește fluxul magnetic sau fluxul inducției magnetice în corpuri, produsul

$$\Phi_s = B A_s \quad \text{în care:} \quad (4.37)$$

Φ_s - fluxul magnetic;

B - inducția magnetică în corp;

A_s - aria suprafeței S străbătută de liniile de câmp ale inducției B .

Cînd vectorul inducției magnetice în corp \vec{B} formează un unghi α cu normala la suprafața S , atunci fluxul magnetic Φ_s are următoarea expresie:

$$\Phi_s = B A_s \cos \alpha \quad (4.38)$$

La fel ca în cazul câmpului magnetic în vid și în cazul câmpului magnetic în corpuri, fluxul magnetic printr-o suprafață închisă este nul. Demonstrația s-a făcut în paragraful 4.1.2.

Matematic se scrie:

$$\Phi_{\Sigma} = 0$$

în care Σ reprezintă o suprafață închisă de orice formă iar inducția considerată este inducția magnetică în corpuri \vec{B} .

Această expresie $\Phi_{\Sigma} = 0$ reprezintă legea fluxului magnetic cu următorul enunț: fluxul magnetic printr-o suprafață închisă este nul.

Aplicația 1. Să se verifice legea fluxului magnetic pentru suprafața unui cub de latură a , așezat într-un câmp magnetic uniform de inducție \vec{B} (Fig. 4.19)

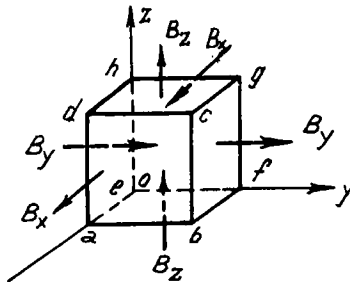


Fig. 4.19. Cub de latură a , așezat în câmp magnetic \vec{B} .

Fie B_x , B_y și B_z proiecțiile pe cele trei axe de coordonate O_x , O_y și O_z , ale inducției magnetice \vec{B} . Componentele sînt constante deoarece s-a considerat câmpul uniform. Se calculează fluxul prin cele șase fețe ale cubului, considerînd cu semnul plus cînd fluxul iese din suprafață și cu semnul minus, cînd intră în această suprafață.

Rezultă

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{cub}} = & B_x A_{abcd} - B_x A_{efgh} + B_y A_{bcgf} \\ & - B_y A_{adeh} + B_z A_{dcgh} - B_z A_{abfe} = 0 \end{aligned}$$

deoarece arile laterale ale cubului sînt egale, adică:

$$A_{abcd} = A_{efgh} = \dots = a^2$$

iar $B_x = B_y = B_z$ pentru că s-a considerat cîmpul uniform.

Aplicația 2. Să se calculeze inducția magnetică a unui cîmp magnetic uniform care printr-o suprafață plană S de arie $A_s = 10 \text{ m}^2$ orientată sub un unghi de 45° față de liniile de cîmp ale inducției, produce un flux $\Phi = 3 \text{ Wb}$

$$\Phi = B A_s \cos \alpha$$

$$\text{rezultă: } B = \frac{\Phi}{A_s \cos \alpha} = \frac{3}{10 \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0,846 \text{ T}$$

4.6.5. Fluxul magnetic dintr-o bobină.

Se consideră o bobină formată din N spire, parcursă de curentul i (Fig.4.20). Acest curent produce un flux prin fiecare suprafață de spiră $S_{\text{spiră}}$, care se numește flux fascicular și se notează cu Φ_f .

Fluxul total Φ_t produs prin suprafața elicoidală S_{elic} compusă din cele N suprafețe de spiră $S_{\text{spiră}}$ va fi :

$$\Phi_t = N \Phi_f \quad (4.39)$$

în care: Φ_t - fluxul total produs în bobina de N spire;

Φ_f - fluxul fascicular produs de o singură spiră a bobinei.

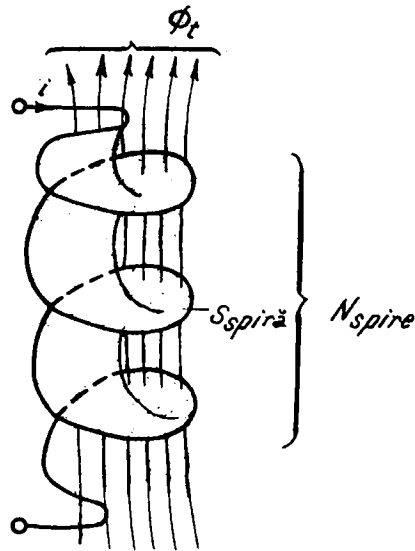


Fig. 4.20. Bobină cu N spire parcursă de curentul i .

4. 6. 6. Feromagnetismul.

În cazul corpurilor magnetice liniare dependența dintre inducția magnetică \vec{B} și intensitatea câmpului magnetic \vec{H} este o linie dreaptă (Fig. 4.21).

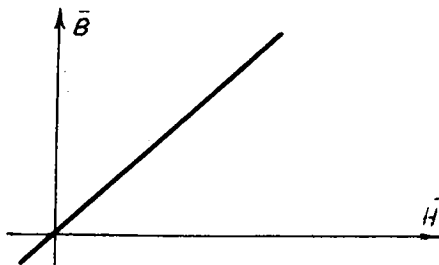


Fig. 4.21. Curba $\vec{B} = f(\vec{H})$ în medii magnetice liniare.

Pentru materialele feromagnetice, dependența dintre inducția \bar{B} și intensitatea cîmpului magnetic \bar{H} nu mai este o dreaptă ci este o curbă denumită și curbă de magnetizare (Fig. 4.22).

Cînd intensitatea cîmpului magnetic \bar{H} oscilează între două valori egale și de sens contrar, punctul curent descrie o curbă de formă simetrică în raport

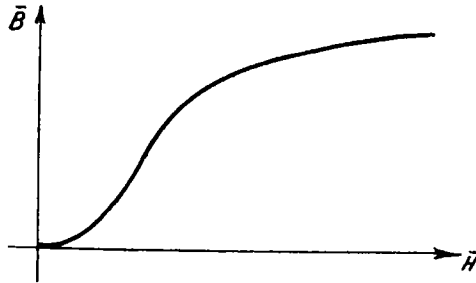


Fig. 4.22. Curba de magnetizare.

cu originea axelor de coordonate denumită ciclu de hysterezis (Fig. 4.23). Se consideră un material feromagnetic care nu a mai fost magnetizat anterior adică inducția și intensitatea cîmpului magnetic sînt nule în absența cîmpului magnetic exterior.

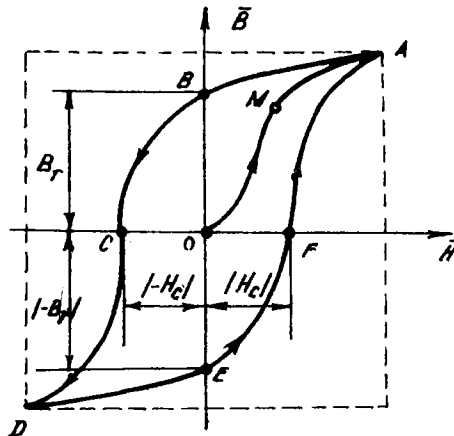


Fig. 4.23. Ciclu de hysterezis.

Dacă se introduce materialul feromagnetic într-un câmp magnetic care poate fi variat - de exemplu în interiorul unei bobine prin care trece un curent electric ce se poate regla - atunci se va constata următoarele:

La început, magnetizarea începe de la zero și se mărește intensitatea curentului într-un sens pe care îl vom considera pozitiv pînă cînd se va atinge un punct de saturație A al materialului feromagnetic. Punctul curent M va descrie curba OA. Dacă se scade câmpul magnetic \bar{H} pînă la anularea lui (curentul devine egal cu zero), punctul curent M va descrie o altă curbă AB astfel încît pentru $\bar{H} = 0$, inducția magnetică va avea o valoare $B_r = OB$ diferită de zero numită inducție remanentă.

Pentru a anula inducția remanentă este necesară o magnetizare în sens contrar, obținută prin câmpul magnetic $[-H_c] = OC$. Punctul M va descrie curba B C.

Continuînd magnetizarea în sens invers, se parcurge porțiunea C D după care urmînd o nouă anulare a câmpului magnetic și o nouă creștere a lui la o valoare pozitivă, se vor descrie porțiunile DE, E F și F A.

Abscisele $OC = OF = H_c$ reprezintă cîmpul magnetic coercitiv iar ordonatele $OE = OB = B_r$ reprezintă inducția magnetică remanentă. Această curbă descrisă de punctul M reprezintă ciclul de hysterezis. După forma acestei curbe, corpurile feromagnetice se împart în moi și dure.

4.6.7. Materiale feromagnetice moi (Fig. 4.24)

Se caracterizează prin aria ciclului de hysterezis mică (pierderi magnetice mici), permeabilitate relativă mare și cîmp coercitiv mic (cca 80 A/m).

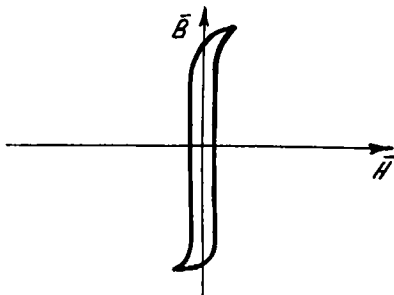


Fig.4.24. Ciclu de hysterezis pentru materiale feromagnetice moi.

Exemple de materiale feromagnetice moi sînt oțelul cu un adaus de 4% siliciu și "permalloy" ul, aliaj de mare permeabilitate (78,5% Ni și 21,5% Fe).

Materialele feromagnetice moi se folosesc la construcția mașinilor și aparatelor electrice deoarece au permeabilitate ridicată și pierderi prin hysterezis mici, ceea ce determină un randament ridicat în funcționare.

4.6.8. Materiale feromagnetice dure (Fig. 4.25).

Sînt caracterizate prin permeabilitate relativă redusă și cîmp coercitiv mare (cca 4000 A/m).

Remanența stabilă mare a acestor materiale le fac utile în construcția magneților permanenți. Materialul feromagnetic dur este oțelul cu un adaus de 1% carbon.

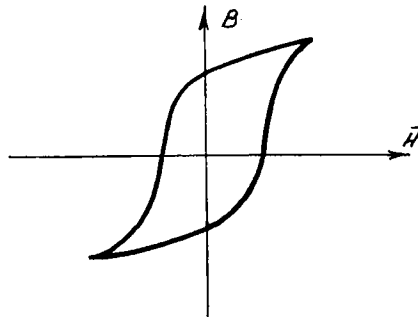


Fig. 4.25. Ciclu de hysterezis pentru materiale feromagnetice dure.

4.6.9. Materiale ferimagnetice

Se mai numesc ferite și sînt soluții solide de oxizi de fier și mangan care au magnetizația permanentă M_p funcție de temperatură și conductivitate electrică scăzută. Se folosesc în calculatoare pentru construcția memoriilor pe bază de inele de ferită sau la construcția miezurilor de antene radio.

4.7. Circuite magnetice

Ansamblurile de bobine cu miez de fier prin care se închid fluxurile magnetice formează circuitele magnetice.

Ca și circuitele de curent continuu, circuitele magnetice au noduri și laturi confecționate în cea mai mare parte din miezuri feromagnetice întrerupte uneori de porțiuni subțiri de aer numite întrefieruri. Surselor de tensiune electromotoare din curent continuu, le corespund în cazul acesta bobinajele înfășurate pe miezuri, parcurse de curenți.

La calculul unui circuit magnetic se cere:

- determinarea fluxurilor magnetice fasciculare când se cunosc solenațiile, permeabilitățile magnetice ale miezurilor feromagnetice și geometria circuitului magnetic;
- determinarea solenațiilor când se cunosc fluxurile magnetice fasciculare, permeabilitățile magnetice și geometria circuitului magnetic;
- probleme combinate.

Pentru simplificarea calculelor circuitului magnetic se admit următoarele ipoteze:

- fluxul de dispersie este zero (reprezintă fluxul care nu se închide prin circuitul feromagnetic ci se închide prin aer); aceasta înseamnă că inducția magnetică în miezul feromagnetic este egală cu inducția magnetică în aer;
- inducția magnetică este uniformă și omoparalelă cu normala la suprafața secțiunii dusă prin miezul feromagnetic;
- intensitatea câmpului magnetic este omoparalelă cu linia mijlocie a laturii circuitului magnetic.

Exemple de circuite magnetice cu aplicații practice sînt transformatoarele și bobinele magnetice.

4.7.1. Reluctanța magnetică

Se consideră o latură dintr-un circuit magnetic (Fig. 4.26).

Se notează cu l lungimea laturii respective și cu μ permeabilitatea magnetică absolută a materialului din care este realizată latura.

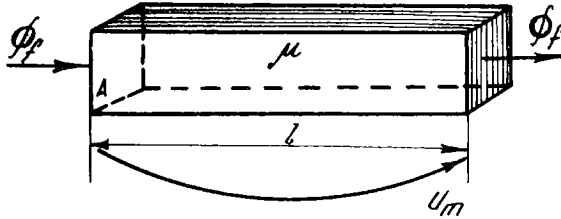


Fig. 4.26. Latură de circuit magnetic.

Fluxul care străbate o secțiune transversală A este fluxul fascicular Φ_f și este același prin oricare secțiune transversală a laturii.

Din cele prezentate anterior, se poate scrie expresia tensiunii magnetice în lungul laturii:

$$U_m = H \cdot l = \frac{B}{\mu} l = \frac{l}{\mu A} \Phi_f \quad (4.40)$$

Aici, intensitatea cîmpului magnetic H s-a exprimat față de inducția magnetică B din latura respectivă prin relația:

$$H = \frac{B}{\mu}.$$

Tot în (4.40) inducția magnetică B în raport cu fluxul fascicular Φ_f s-a înlocuit cu:

$$B = \frac{\Phi_f}{A}$$

Mărimea $\frac{l}{\mu A}$ din expresia (4.40) se numește reluctanța magnetică și se notează:

$$R_m = \frac{l}{\mu A} \quad (4.41)$$

Unitatea de măsură pentru reluctanța magnetică în S I este 1 (Henry)^{-1} sau $\left(\frac{1}{H}\right)$.

4.7.2. Legea lui Ohm pentru o latură de circuit magnetic

Tensiunea magnetică se scrie, după introducerea reluctanței magnetice R_m , astfel:

$$U_m = R_m \Phi_f \quad (4.42)$$

Expresia reprezintă legea lui Ohm pentru o latură de circuit magnetic. Denumirea provine din asemănarea formală cu legea lui Ohm din circuitele de curent continuu; $U = Ri$.

Produsul $R_m \Phi_f$ se mai numește și căderea de tensiune magnetică.

4.7.3. Legea lui Ohm pentru un circuit magnetic închis. Se consideră că latura respectivă formează un circuit magnetic închis pe care este înfășurată o bobină compusă din N spire, parcurse de curentul i (Fig.4.27).

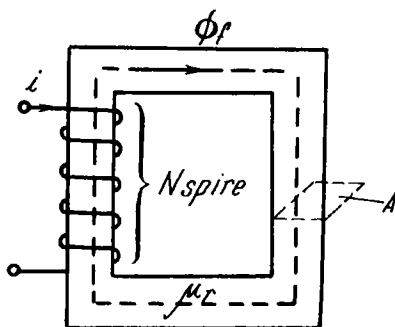


Fig.4.27. Circuit magnetic închis.

Legea lui Ohm pentru circuit închis se scrie:

$$U_{mm} = R_m \Phi_f \quad (4.43)$$

În care U_{mm} reprezintă tensiunea magnetică pe un circuit închis care se numește după cum s-a prezentat anterior tensiune magnetomotoare.

Conform teoremei lui Ampère (4.21 a) tensiunea magnetomotoare este egală cu solenația Ni adică:

$$U_{mm} = Ni \quad .$$

Rezultă $R_m \Phi_f = Ni$

sau $\Phi_f = \frac{Ni}{R_m} \quad . \quad (4.44)$

Aceasta reprezintă legea lui Ohm pentru un circuit magnetic închis prin analogie cu legea lui Ohm din curent continuu ($I = \frac{E}{R}$ în care E reprezintă tensiunea electromotoare și R rezistența totală).

Aplicație. Să se calculeze fluxul fascicular și inducția magnetică B într-o bobină cu circuit magnetic închis avînd lungimea $l = 1$ m, aria secțiunii transversale $A = 0,01$ m² și permeabilitatea magnetică relativă $\mu_r = 500$. Numărul de spire ale bobinei de magnetizare $N = 1\,000$ spire străbătute de curentul $i = 0,5$ A.

Reluctanța magnetică a circuitului magnetic:

$$R_m = \frac{l}{\mu A} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 0,01} = \frac{10^6}{2 \pi} \text{ H}^{-1} \quad .$$

Solenația:

$$Ni = 1\,000 \cdot 0,5 = 500 \text{ Asp.}$$

Fluxul fascicular rezultă:

$$\Phi_f = \frac{Ni}{R_m} = \frac{500}{\frac{10^6}{2 \pi}} = \pi \cdot 10^{-3} \text{ Wb} = \pi \text{ m Wb}$$

Inducția magnetică B rezultă:

$$B = \frac{\Phi_f}{A} = \frac{\pi \cdot 10^{-3}}{0,01} = \pi \cdot 10^{-1} = 0,314 \text{ T}$$

4.7.4. Teoremele lui Kirchhoff pentru circuite magnetice

Teorema întâi a lui Kirchhoff. Această teoremă se referă la un nod de circuit magnetic. Se consideră un nod de circuit magnetic din care se ramifică mai multe laturi (Fig. 4.28)

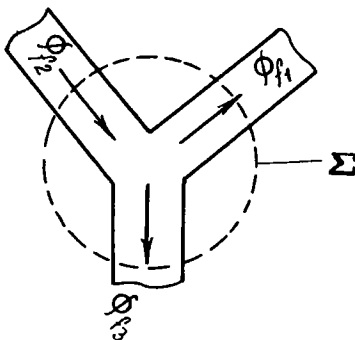


Fig. 4.28. Nod de circuit magnetic.

Se consideră suprafața închisă Σ care înconjoară nodul respectiv. Din legea fluxului magnetic, prezentată anterior, se scrie:

$$\Phi_{\Sigma} = 0.$$

Dar:

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_{f1} - \Phi_{f2} + \Phi_{f3} \quad (4.45)$$

Rezultă $\Phi_{f1} - \Phi_{f2} + \Phi_{f3} = 0$ teorema întâi a lui Kirchhoff cu

următorul enunț:

suma algebrică a fluxurilor magnetice fasciculare din laturile care concurează într-un nod de circuit magnetic este nulă.

Există regula prin care fluxurile care ies din nod se consideră pozitive iar cele care intră se consideră negative.

Aplicație. În nodul din Fig. 4.28, fluxurile fasciculare au valorile : $\Phi_{f1} = 0,1$ Wb și $\Phi_{f2} = 0,3$ Wb. Să se determine fluxul fascicular Φ_{f3} .

$$\text{Din} \quad \Phi_{f1} - \Phi_{f2} + \Phi_{f3} = 0 ,$$

$$\text{Se obține} \quad \Phi_{f3} = \Phi_{f2} - \Phi_{f1} = 0,3 - 0,1 = 0,2 \text{ Wb} .$$

Teorema a doua a lui Kirchhoff. Se consideră un drum închis sau ochi format din laturi de circuit magnetic (Fig. 4.29). Conform teoremei lui Ampère se scrie pe acest ochi de circuit magnetic o:

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 = N_1 i_1 - N_2 i_2 + N_3 i_3$$

dar $H_1 l_1 = U_{m1}$ - tensiunea magnetică prin latura 1,

$$H_2 l_2 = U_{m2}$$

$$\text{și} \quad H_3 l_3 = U_{m3} .$$

Se scrie:

$$U_{m1} + U_{m2} + U_{m3} = N_1 i_1 - N_2 i_2 + N_3 i_3$$

dar $U_{m1} = R_{m1} \Phi_{f1}$; $U_{m2} = R_{m2} \Phi_{f2}$; $U_{m3} = R_{m3} \Phi_{f3}$ - conform legii lui Ohm.

Rezultă:

$$R_{m1} \Phi_{f1} + R_{m2} \Phi_{f2} + R_{m3} \Phi_{f3} = N_1 i_1 - N_2 i_2 + N_3 i_3 \quad (4.46)$$

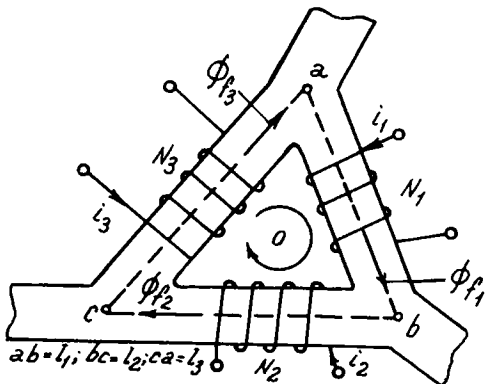


Fig. 4.29. Ochi de circuit magnetic.

Această relație reprezintă teorema a doua a lui Kirchhoff cu enunțul următor:

- suma algebrică a căderilor de tensiune magnetică din laturile unui ochi de circuit magnetic este egală cu suma algebrică a solenațiilor bobinelor din laturile ochiului.

Există regula prin care căderile de tensiune magnetică și solenațiile care se întâlnesc în sens contrar sensului de parcurs se consideră negative.

4.7.5. Analogia cu circuitele electrice. Rezolvarea circuitelor magnetice cu teoremele lui Kirchhoff se aseamănă cu rezolvarea circuitelor electrice de curent continuu. Aceasta permite să se facă următoarea corespondență între mărimile circuitelor magnetice și mărimile circuitelor electrice:

- tensiunea magnetică $U_m \Rightarrow$ tensiunea electrică U ;
- fluxul magnetic fascicular $\Phi_f \Rightarrow$ curent electric I ;
- solenația $Ni \Rightarrow$ tensiunea electromotoare E ;
- reluctanța magnetică $R_m \Rightarrow$ rezistența electrică R ;
- permeabilitatea $\mu \Rightarrow$ conductivitatea σ .

Pe baza acestor analogii, un circuit magnetic poate fi reprezentat printr-o schemă de circuit electric care se rezolvă cu metodele circuitelor electrice de curent continuu.

Aplicație . Se consideră circuitul magnetic din Fig.4.30 în care se dau:

$$l = 12 \text{ cm}$$

$$\Delta = 2 \text{ mm}$$

$$N = 700 \text{ spire}$$

$$i = 10 \text{ A}$$

$$A = 2,5 \text{ cm}^2$$

Se cer fluxurile fasciculare considerînd materialul magnetic liniar cu $\mu = 600 \mu_0$.

Rezolvare

Pentru acest circuit magnetic liniar, se poate reprezenta schema de circuit electric echivalentă din Fig. 4.31.

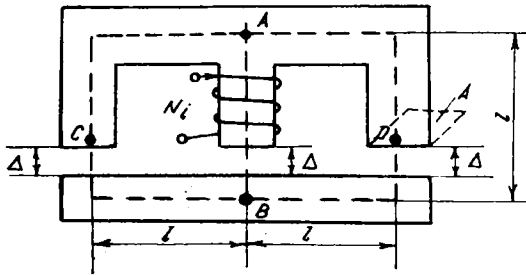


Fig. 4.30.

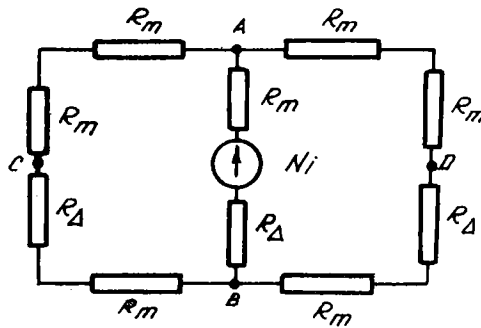


Fig. 4.31.

Schema echivalentă se simplifică prin înlocuirea reluctanțelor legate în serie cu reluctanța echivalentă (Fig. 4.32).

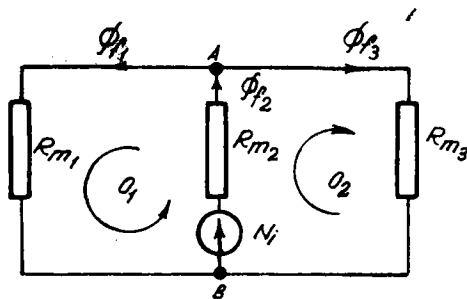


Fig. 4.32.

Se aleg sensuri arbitrare pentru fluxurile fasciculare Φ_{f1} , Φ_{f2} și Φ_{f3} .

Se calculează reluctanțele magnetice din Fig. 4. 31 respectiv reluctanțele magnetice echivalente din Fig. 4. 32.

$$R_m = \frac{1}{\mu A} = \frac{12 \cdot 10^{-2}}{600 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} = \frac{2}{\pi} 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{\Delta} = \frac{\Delta}{\mu_o A} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} = \frac{20}{\pi} 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m1} = R_{m3} = 3 R_m + R_{\Delta} = 3 \frac{2}{\pi} 10^6 + \frac{20}{\pi} 10^6 = \frac{26}{\pi} 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$R_{m2} = R_m + R_{\Delta} = \frac{2}{\pi} 10^6 + \frac{20}{\pi} 10^6 = \frac{22}{\pi} 10^6 \text{ H}^{-1}$$

Se scriu ecuațiile cu teoremele lui Kirchhoff pentru schema echivalentă din Fig. 4. 32.

$$\Phi_{f1} - \Phi_{f2} + \Phi_{f3} = 0 \quad \text{în nodul A}$$

$$R_{m1} \Phi_{f1} + R_{m2} \Phi_{f2} = Ni \quad \text{pe ochiul } o_1$$

$$R_{m2} \Phi_{f2} + R_{m3} \Phi_{f3} = Ni \quad \text{pe ochiul } o_2$$

Rezolvînd sistemul, rezultă valorile fluxurilor fasciculare:

$$\Phi_{f1} = \Phi_{f3} = \pi \cdot 10^{-4} \text{ Wb} \text{ și } \Phi_{f2} = 2 \cdot \pi \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

4. 7. 6. Calculul circuitelor magnetice

1. Calculul geometriei circuitului magnetic

Rezolvarea circuitului magnetic în acest caz, urmărește determinarea secțiunii și lungimii circuitului magnetic.

Se cunoaște mai întâi fluxul magnetic din miezul circuitului. Se adoptă inducția magnetică astfel încît să aibă o valoare corespunzătoare zonei nesaturate sau în apropierea cotului curbei de magnetizare a materialului folosit la realizarea miezului magnetic. Lungimea circuitului magnetic se obține avînd la bază considerente constructive.

2. Calculul solenațiilor. În astfel de circuite magnetice care se cer a fi rezolvate, se cunoaște sau se impune realizarea unei inducții magnetice de o anumită valoare în întrefierul circuitului magnetic.

Circuite magnetice cu întrefier sînt întîlnite frecvent în construcția mașinilor și aparatelor electrice. Se determină solenația necesară pentru a realiza inducția din întrefier, impusă.

Aplicație. Să se determine solenația și intensitatea curentului electric care trece prin bobina electromagnetului din Fig.4.33 pentru a produce o inducție în întrefier $B_0 = 1 \text{ T}$.

Se dau:

- numărul de spire $N = 230$ spire ;
- lungimea medie a liniilor de cîmp în miez $l_m = 15 \text{ cm}$;
- lungimea medie a liniilor de cîmp în armătura mobilă $l_a = 4,5 \text{ cm}$;
- lungimea întrefierurilor $\Delta = 0,04 \text{ mm}$;
- secțiunea miezului armăturii și întrefierului este constantă $A = 2 \text{ cm}^2$.

Electromagnetul este realizat din oțel electrotehnic turnat.

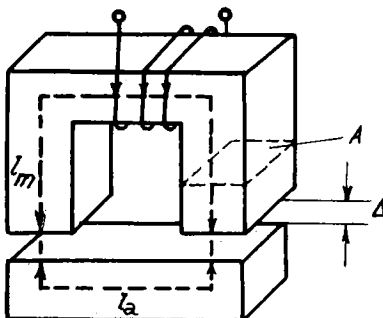


Fig.4.33. Electromagnet

Se determină mai întâi, din curba de magnetizare pentru oțel turnat (Fig. 4.34), intensitatea cîmpului magnetic H . Dacă se neglijează dispersia, inducția în fier B este egală cu inducția în întrefier B_0 . Rezultă din Fig. 4.34 că pentru $B = 1 \text{ T}$ corespunde o intensitate a cîmpului magnetic $H = 560 \text{ A/m}$.

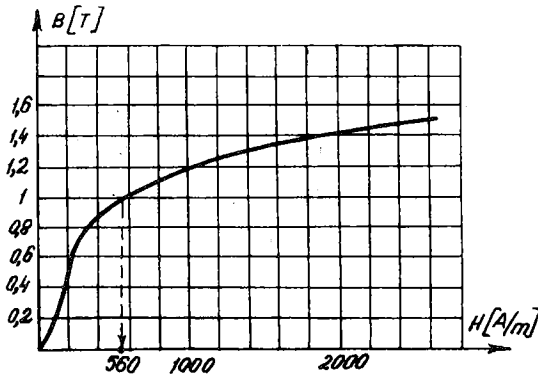


Fig. 4.34. Curbă de magnetizare pentru oțel turnat.

Din teorema lui Ampère

$$U_{mm} = Ni$$

se obține

$$Hl_m + Hl_a + 2 H_0 \Delta = Ni$$

în care H_0 este intensitatea cîmpului magnetic în întrefier și egală cu:

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{1}{4 \pi \cdot 10^{-7}}$$

Prin înlocuire se obține solenația Ni:

$$Ni = 560 [15 + 4,5] \cdot 10^{-2} + 2 \frac{1}{4 \pi \cdot 10^{-7}} \cdot 0,04 \cdot \pi \cdot 10^{-3} = 310,5 \text{ Asp.}$$

Intensitatea curentului electric va fi:

$$i = \frac{Ni}{N} = \frac{310,5}{230} = 1,35 \text{ A.}$$

3. Calculul inducției magnetice în întrefier

Pentru a rezolva astfel de probleme, trebuie să se cunoască:

- curba de magnetizare a materialului din care este confecționat circuitul magnetic;

- solenația;

- dimensiunile geometrice ale circuitului magnetic.

Din curba de magnetizare se deduce și se reprezintă grafic caracteristica de magnetizare a circuitului magnetic.

Aceasta este o curbă $B_0 = f(Ni)$ (Fig. 4. 35)

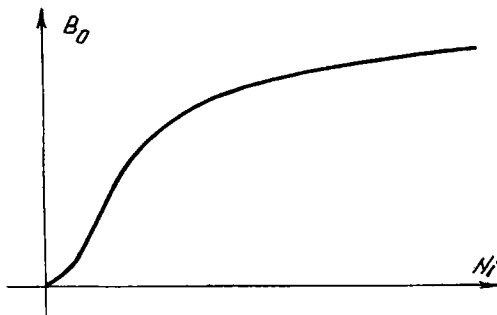


Fig. 4. 35. Caracteristica de magnetizare.

Ca formă este asemănătoare curbei de magnetizare a materialului magnetic.

Odată determinată caracteristica de magnetizare, problema este aproape rezolvată; pentru valoarea cunoscută din problemă a solenației, se obține inducția magnetică în întrefier B_0 . Problema se consideră astfel terminată.

De reținut este deosebirea dintre curba de magnetizare a materialului magnetic și caracteristica de magnetizare a circuitului magnetic. Curba de magnetizare reprezintă grafic dependența $B = f(H)$ pentru un material feromagnetic anumit. Caracteristica de magnetizare reprezintă însă dependența dintre inducția magnetică în întrefier B_0 sau fluxul magnetic în întrefier Φ_0 și solenația Ni necesară creerii acestei inducții B_0 într-un circuit magnetic neomogen $[B_0 = f(Ni) \text{ sau } \Phi_0 = f(Ni)]$.

Aplicație . Să se determine inducția magnetică din întrefierul electro-magnetului prezentat în Fig.4.33 dacă se micșorează de două ori curentul care străbate bobina electromagnetului.

Această problemă este inversa problemei de la punctul 2; se cere de-terminarea inducției magnetice în întrefier atunci când se cunoaște solenația.

Cum se procedează? Din curba de magnetizare (Fig.4.34) la o valoa-re aleasă a inducției magnetice B, corespunde o anumită valoare pentru inten-sitatea cîmpului magnetic H.

Odată cunoscută intensitatea H, se poate calcula tensiunea magneto-motoare U_{mm} care conform teoremei lui Ampère ($U_{mm} = Ni$) reprezintă chiar solenația Ni.

Se adoptă un șir de valori pentru inducția magnetică B și se calculea-ză conform acestui procedeu solenațiile corespunzătoare. Valorile se trec în-tr-un tabel și se folosesc pentru reprezentarea grafică a caracteristicii de magnetizare.

În fine, pentru o solenație fixată prin problemă, se determină inducția magnetică din miezul magnetic, egală cu inducția magnetică din întrefier B_o , cerută prin problemă.

În cazul aplicației, se aleg valori ale inducției magnetice ($B = B_o$) : 0,25; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,75; 0,9; 1 Tesla.

Din curba de magnetizare (Fig.4.34) la o inducție magnetică $B = B_o = 0,25$ T , corespunde pentru intensitatea cîmpului magnetic o valoa-re $H = 120$ A/m.

Solenația Ni se determină din:

$$Ni = H_{lm} + H_{la} + 2 H_o \Delta \quad \text{sau}$$

$$Ni = H (l_m + l_a) + 2 \frac{B_o}{\mu_o} \Delta \quad \text{în care } H_o = \frac{B_o}{\mu_o}$$

sau

$$Ni = H (15 + 4,5) 10^{-2} + \frac{2 \cdot 0,04 \pi \cdot 10^{-3}}{4 \pi \cdot 10^{-7}} B_o =$$

$$= 0,195 H + 200 B_o$$

respectiv $Ni = 0,195 \cdot 120 + 200 \cdot 0,25 = 73,4$ Asp.

Asemănător, se calculează și pentru celelalte valori:

$$B_o = (0,3 \div 1) T .$$

Rezultatele se notează în tabelul 4.1.

Tabelul 4.1.

$B_o (T)$	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,75	0,9	1
$H(A/m)$	120	135	165	185	220	275	400	570
$0,195 H$	23,4	26,4	32,2	36	43	54	78	111
$200 B_o$	50	60	80	100	120	150	180	200
$Ni(Asp)$	73,4	86,4	112,2	136	163	204	258	311

Cu ajutorul datelor din tabelul 4.1. se reprezintă grafic caracteristica de magnetizare a circuitului (Fig. 4.36).

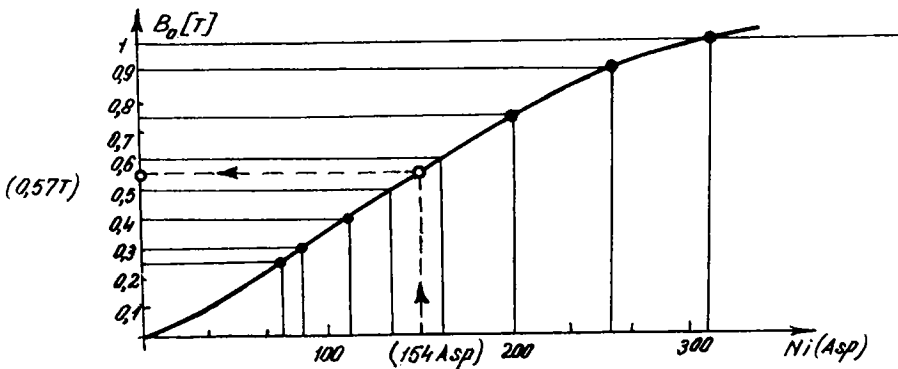


Fig. 4.36.

La curentul i micșorat de două ori, adică:

$$\frac{i}{2} = \frac{1,35}{2} = 0,67 A$$

corespunde solenația:

$$Ni = 230 \cdot 0,67 \cong 154 Asp.$$

Din caracteristica de magnetizare (Fig.4.36) pentru o solenație $N_i = 154$ Asp. corespunde o inducție magnetică în întrefier:

$$B_o = 0,57 \text{ T}.$$

4.8. Bobine electrice

Dispozitivele care realizează câmpuri magnetice în interiorul lor cînd sînt parcurse de curenți electrici, sînt bobinele electrice (Fig.4.37).

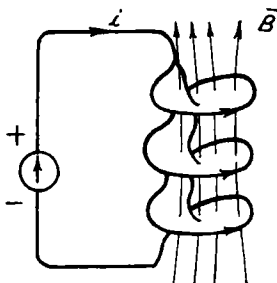


Fig.4.37. Bobină electrică.

În firele electrice de legătură ale diverselor instalații, câmpul magnetic creat de curenții din aceste fire este mai puțin intens.

Pentru a caracteriza "capacitatea" unei bobine de a da naștere unui flux magnetic atunci cînd este parcursă de un curent electric, se introduce o mărime denumită inductivitate:

$$L = \frac{\Phi_t}{i} \quad (4.47)$$

în care: Φ_t este fluxul total prin bobină și i este curentul care străbate bobina.

4.8.1. Inductivitatea unei bobine

Se consideră o bobină de lungime l cu N spire, parcurse de curentul i , înfășurate pe un miez magnetic de permeabilitate relativă μ_r (Fig. 4.38).

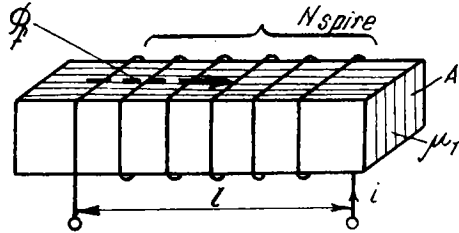


Fig. 4.38. Solenoid.

Inductivitatea bobinei este

$$L = \frac{\Phi_t}{i}$$

în care fluxul total

$$\Phi_t = N \Phi_f, \quad (4.48)$$

Φ_f fiind fluxul fascicular.

Dar fluxul fascicular conform (4.44) este

$$\Phi_f = \frac{Ni}{R_m}$$

în care R_m reprezintă reluctanța magnetică

$$R_m = \frac{l}{\mu A} = \frac{l}{\mu_o \mu_r A} \quad \text{conform (4.41)}$$

Deci

$$\Phi_f = \frac{Ni}{\frac{l}{\mu_o \mu_r A}} = \mu_o \mu_r Ni \frac{A}{l}$$

iar inductivitatea rezultă

$$L = \frac{\Phi_t}{i} = \frac{N \Phi_f}{i} = \frac{\mu_o \mu_r N i \frac{A}{l} N}{i}$$

sau

$$L = \mu_o \mu_r N^2 \frac{A}{l} \quad (4.49)$$

Inductivitatea este o mărime independentă de flux și de curent. Este proporțională cu pătratul numărului de spire, cu permeabilitatea și cu aria secțiunii miezului și invers proporțională cu lungimea acestuia.

Unitatea de măsură în S I pentru inductivitate se numește henry (1H).

$$1 \text{ henry} = \frac{1 \text{ weber}}{1 \text{ amper}} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = 1 \text{ H}$$

cu submultiplul milihenry $1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ H}$.

Aplicația 1. Pe un circuit magnetic (Fig. 4.39) din oțel electrotehnic turnat (curba de magnetizare în Fig. 4.40), de lungime medie $l_{\text{med}} = 30 \text{ cm}$, se află o înfășurare compusă din două părți identice de lungime $l = 80 \text{ mm}$ fiecare și număr de spire $N_1 = N_2 = 540$ spire.

Secțiunea circuitului magnetic este un pătrat cu latura de 2 cm . Să se calculeze inductivitatea bobinei cu circuit magnetic și fără circuit magnetic. Inducția magnetică este egală cu $1,35 \text{ T}$. Linia mediană a înfășurării este un pătrat de latură egală cu 3 cm .

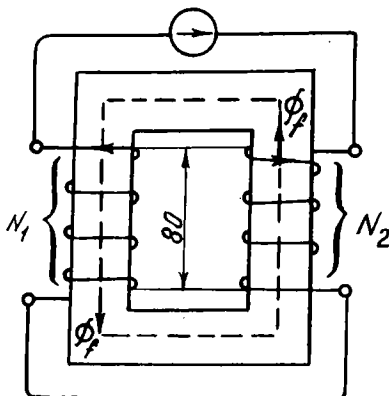


Fig. 4.39.

Cele două părți ale înfășurării sînt legate în așa fel încît curentul care le parcurge, i, generează un flux adițional.

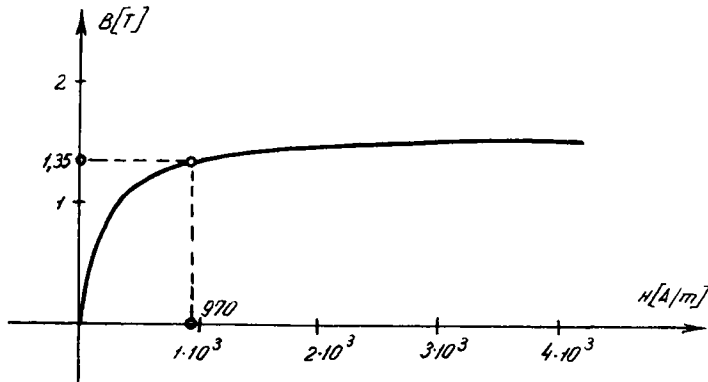


Fig. 4.40.

Rezolvare

a) Fluxul magnetic Φ_f al circuitului magnetic este indicat în Fig. 4.39. Conform datelor problemei, fluxul magnetic este același în cele două înfășurări. Din acest motiv se poate considera o singură înfășurare cu număr de spire:

$$N = N_1 + N_2 = 540 + 540 = 1080 \text{ spire}$$

b) Calculul inductivității cu circuit magnetic.

Prin definiție, inductivitatea

$$L = \frac{\Phi_t}{i} = \frac{N \Phi_f}{i}$$

$$\text{Dar } \Phi_f = BA$$

$$\text{iar } i = \frac{H l_{\text{med}}}{N}$$

$$\text{Rezultă : } L = \frac{B N^2 A}{H l_{\text{med}}} .$$

Dependența dintre B și H se obține din curba de magnetizare (Fig. 4.40)

Pentru o inducție magnetică în fier $B = 1,35 \text{ T}$, corespunde o intensitate a câmpului magnetic $H = 970 \text{ A/m}$.

Se înlocuiește în expresia inductivității L și se obține:

$$L = \frac{1,35 \cdot 4 \cdot 10^{-4} (1080)^2}{970 \cdot 0,3} = 2,17 \text{ H}$$

c) Calculul inductivității în lipsa circuitului magnetic. Se consideră bobinele înfășurate una în prelungirea celeilalte în vederea simplificării calculelor. Folosind relația

$$L = \mu_o \mu_r N^2 \frac{A}{l}$$

se obține:

$$L = 4 \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot (1080)^2 \frac{9 \cdot 10^{-4}}{0,8 + 0,8} = 8,26 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

S-a luat permeabilitatea relativă pentru aer $\mu_r = 1$ iar secțiunea bobinei $A = (3 \cdot 10^{-2})^2 = 9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

Aplicația 2. Inductivitatea unui solenoid cu miez de fier este $L = 0,5 \text{ H}$. Dacă se scoate miezul, inductivitatea devine $L_o = 0,025 \text{ H}$. Să se calculeze permeabilitatea relativă μ_r .

Inductivitatea cu miez de fier este:

$$L = \mu_o \mu_r N^2 \frac{A}{l}$$

$$\text{Fără miez de fier} \quad L_o = \mu_o N^2 \frac{A}{l}$$

$$\text{Rezultă} \quad \frac{L}{L_o} = \mu_r = \frac{0,5}{0,025} = 200$$

4.8.2. Inductivități proprii și mutuale

Se consideră două bobine înfășurate pe un miez de permeabilitate relativă μ_r și secțiune A (Fig. 4.41). Lungimea fiecărei bobine este l iar numărul de spire este N_1 respectiv N_2 . Bobinele sînt parcurse de curenții i_1 și i_2 . Fluxurile fasciculare care apar în miezul magnetic determinate de curenții i_1 și i_2 din cele două bobine sînt Φ_{f1} respective Φ_{f2} .

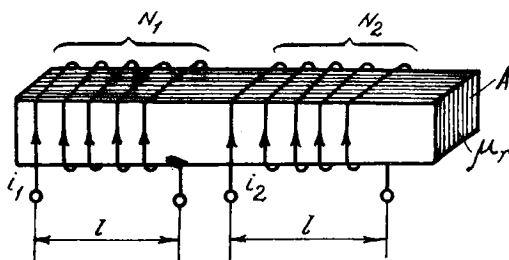


Fig. 4.41. Două bobine înfășurate pe un miez magnetic.

Dacă $i_1 \neq 0$ și $i_2 = 0$ adică bobina N_1 este parcursă de curent, dar prin bobina N_2 nu trece curent, există numai fluxul fascicular Φ_{f1} .

În acest caz fluxurile totale prin cele două bobine vor fi :

$$\text{Bobina } N_1 \quad \Phi_{11} = N_1 \Phi_{f1} \quad (4.50)$$

$$\text{Bobina } N_2 \quad \Phi_{21} = N_2 \Phi_{f1} \quad (4.51)$$

Dacă $i_1 = 0$ și $i_2 \neq 0$, bobina N_2 va fi parcursă de curent iar prin bobina N_1 nu va trece curent.

Fluxurile totale vor fi:

$$\text{Bobina } N_1 \quad \Phi_{12} = N_1 \Phi_{f2} \quad (4.52)$$

$$\text{Bobina } N_2 \quad \Phi_{22} = N_2 \Phi_{f2} \quad (4.53)$$

Cu aceste precizări, se pot defini inductivitățile proprii ale bobinelor.

Inductivitatea proprie a bobinei N_1 va fi:

$$L_{11} = \frac{\Phi_{11}}{i_1} \quad (4.54)$$

și inductivitatea proprie a bobinei N_2

$$L_{22} = \frac{\Phi_{22}}{i_2} . \quad (4.55)$$

Se introduce și noțiunea de inductivitate mutuală. În cazul celor două bobine, vom avea:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_2} ; \quad (4.56)$$

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} . \quad (4.57)$$

Inductivitățile mutuale se măsoară ca și cele proprii în henry (H).

Se demonstrează cu $L_{12} = L_{21}$. O altă notație folosită pentru inductivitatea mutuală este M.

Deci se poate scrie:

$$L_{12} = L_{21} = M \quad (4.58)$$

De asemenea, se poate demonstra că în cazul unui cuplaj perfect

$$L_{11} L_{22} = L_{12}^2 = M \quad (4.59)$$

$$\text{sau} \quad M = \sqrt{L_{11} \cdot L_{22}} \quad (4.60)$$

4.8.3. Coeficient de cuplaj

În cazul în care intervine fenomenul de dispersie, cuplajul nu mai este perfect și relația (4.60) se exprimă cu ajutorul unui coeficient k cuprins între zero și unu : ($0 \leq k \leq 1$).

$$M = k \sqrt{L_{11} L_{22}} \quad (4.61)$$

Coeficientul k se numește coeficient de cuplaj; cînd cuplajul este perfect

$k = 1$ și

$$M = \sqrt{L_{11} L_{22}} .$$

Cînd bobinele nu sînt cuplate magnetic, $k = 0$ și

$$M = 0 .$$

Aplicația 1. Două bobine cuplate magnetic au inductivitățile proprii

$L_{11} = 0,05 \text{ H}$ și $L_{22} = 0,2 \text{ H}$. Coeficientul de cuplaj al celor două bobine este $k = 0,3$. Se cere determinarea inductivității mutuale M .

$$M = k \sqrt{L_{11} L_{22}} = 0,3 \sqrt{5 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-1}} = 0,3 \cdot 10^{-1} = 0,03 \text{ H}.$$

Aplicația 2. Pe un tor din material amagnetic ($\mu = \mu_0$) sînt plasate

două înfășurări cu număr de spire $N_1 = 2000$ și $N_2 = 4000$ (Fig. 4.42). Diametrul liniei mijlocii a torului este $D = 10 \text{ cm}$ iar secțiunea transversală a torului este un patrat cu aria $A = 4 \text{ cm}^2$.

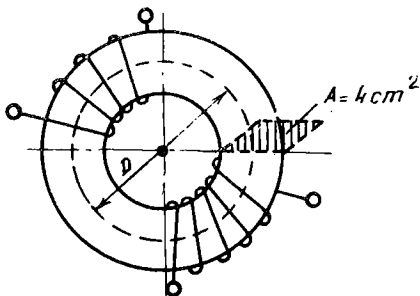


Fig. 4.42. Tor cu două înfășurări.

Să se calculeze inductivitatea mutuală M a celor două înfășurări și coeficientul de cuplaj k .

Spirele celor două înfășurări sînt dispuse ordonat pe miezul magnetic. Fluxul magnetic creat de curentul din oricare din cele două bobine traversează toate spirele celeilalte înfășurări.

Inductivitatea mutuală este:

$$M = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{N_2 \Phi_{f1}}{i_1} \quad (4.62)$$

în care Φ_{21} este fluxul magnetic total care traversează a doua bobină, creat însă de curentul din prima bobină i_1 . Φ_{f1} este fluxul fascicular creat de curentul i_1 în prima bobină. Curentul i_1 trecînd prin prima bobină dă naștere unei inducții magnetice

$$B = \mu_o H = \mu_o \frac{N_1 i_1}{l_{med}}$$

în care : $N_1 i_1$ reprezintă solenația primei bobine și $l_{med} = \pi D$ reprezintă lungimea liniei mijlocii a torului.

Fluxul magnetic prin miezul torului va fi:

$$\Phi_{f1} = B A = \mu_o \frac{N_1 i_1}{l_{med}} A = \mu_o \frac{N_1 i_1 A}{\pi D}$$

Rezultatele obținute cu ajutorul acestei formule vor fi cu atît mai precise cu cît diametrul D va fi mai mare în raport cu dimensiunile transversale ale torului.

Introducînd expresia lui Φ_{f1} în (4.62) rezultă

$$M = \frac{N_2 \Phi_{f1}}{i_1} = \mu_o \frac{N_1 N_2}{\pi D} A ;$$

înlocuind :

$$M = 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{2.000 \cdot 4.000}{\pi \cdot 0,1} 4 \cdot 10^{-4} = 12,8 \cdot 10^{-3} \text{ H} =$$

$$12,8 \text{ m H.}$$

Coeficientul de cuplaj.

În expresia:
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

se înlocuiește
$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\pi D} A$$

$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{\pi D} A \text{ și } L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{\pi D} A .$$

Se obține
$$k = \frac{\mu_0 \frac{N_1 N_2}{\pi D} A}{\sqrt{\mu_0 \frac{N_1^2}{\pi D} A \mu_0 \frac{N_2^2}{\pi D} A}} = 1$$

Cuplajul este perfect.

4. 9. Legea inducției electromagnetice

Apariția unei tensiuni electromotoare într-un circuit, ca urmare a modificării în timp a câmpului magnetic, a fost descoperită în 1831 de fizicianul englez Michael Faraday (1791 - 1867).

Fenomenul s-a numit fenomenul inducției electromagnetice.

Experiența demonstrează că efectul de inducție poate apare în două forme: prin modificarea în timp a câmpului, respectiv fluxului magnetic, sau prin schimbarea poziției conductorului electric în câmpul magnetic-constant în timp.

Tensiunea electromotoare se induce în orice fel de circuit dar pentru a fi pusă în evidență prezenta sa, se folosește un conductor electric închis printr-un instrument de măsură, un galvanometru. Tensiunea electromotoare indusă generează un curent electric pus în evidență de galvanometru. Acest curent se numește curent electric indus.

Experimental se procedează astfel:

a) Variația în timp a fluxului magnetic (Fig. 4.43)

Dacă se apropie sau se depărtează un magnet permanent sau un electromagnet alimentat în curent continuu-de o spirală conductoare fixă, legată la un

galvanometru, acul indicator al acestuia va devia într-un sens sau în celălalt sens ceea ce indică prezența în circuit a unui curent electric.

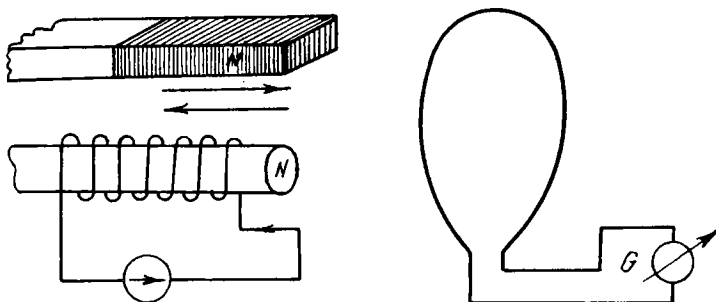


Fig. 4.43. Variația în timp a fluxului magnetic.

b) Schimbarea poziției conductorului electric în câmp magnetic

(Fig.4.44). În acest caz, circuitul electric se compune din trei conductoare pe care se deplasează cu viteza \vec{v} un alt conductor.

Pe conturul închis, desenat punctat în figură, se va naște un curent indus dacă planul șinelor formează un unghi diferit de zero cu liniile câmpului magnetic omogen de inducție \vec{B} .

Se poate imagina și altă experiență; dacă se consideră două bobine vecine cuplate magnetic și printr-o bobină trece un curent variabil în timp se constată că în bobina doua apare o tensiune electromotoare indusă. Această realizare se întâlnește în practică la transformatorul electric.

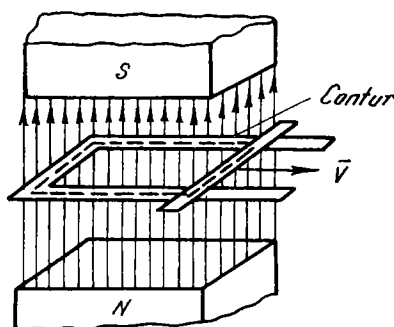


Fig.4.44. Schimbarea poziției conductorului electric.

Generalizînd observațiile experimentale, se poate preciza că la orice suprafață mărginită de un contur, străbătută de un flux magnetic variabil în timp, se constată că în lungul conturului apare o tensiune electromotoare indusă. Tensiunea electromotoare indusă este diferită de zero indiferent dacă conturul este realizat dintr-un material conductor sau nu; cînd conturul este realizat dintr-un material izolant curentul este zero.

Măsurări exacte demonstrează că tensiunea electromotoare indusă este proporțională cu scăderea în timp a fluxului care străbate circuitul de măsură.

Se scrie astfel:

$$e = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} . \quad (4.63)$$

Enunțul este următorul:

Tensiunea electromotoare indusă în lungul unui contur este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic prin orice suprafață care se sprijină pe contur.

Fluxul Φ și tensiunea electromotoare e au sensuri de referință asociate după regula burghiului drept (Fig. 4.45).

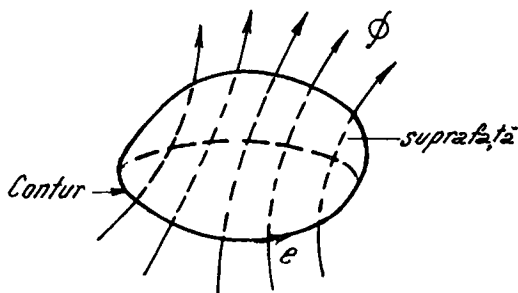


Fig. 4.45. Sensul fluxului Φ și al tensiunii electromotoare se asociază după regula burghiului drept.

4. 9. 1. Regula lui Lenz

Referitor la sensul curentului indus H.F.E. Lenz în 1833 a formulat următoarea regulă:

Curentul indus are un astfel de sens încît, prin cîmpul magnetic pe care-l produce, se opune variației în timp a fluxului magnetic inductor.

Din experiențele prezentate, s-a concluzionat că variația fluxului magnetic se produce datorită variației în timp a cîmpului magnetic sau datorită mișcării conturului în cîmp magnetic constant sau pe ambele căi.

În primul caz, se manifestă fenomenul de inducție electromagnetică prin transformare iar în cazul al doilea avem fenomenul de inducție electromagnetică prin mișcare.

4. 9. 2. Inducția magnetică prin transformare

Se consideră două bobine cuplate magnetic, plasate pe același miez magnetic. (Fig. 4.46, a).

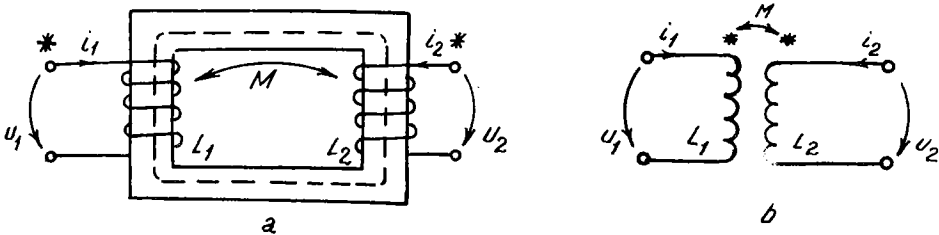


Fig. 4.46. Bobine cuplate magnetic.

a) plasate pe miezul magnetic. b) reprezentare în scheme electrice.

Inductivitățile proprii ale celor două bobine sînt:

$$L_{11} = L_1 \quad \text{și} \quad L_{22} = L_2 \quad (4.64)$$

Inductivitatea mutuală dintre bobine este:

$$L_{12} = L_{21} = M \quad (4.65)$$

Bobinele sînt parcurse de curenții i_1 și i_2 , variabili în timp. Cei doi curenți vor genera fluxurile magnetice Φ_1 și Φ_2 care vor avea același sens în miezul magnetic.

Expresia matematică va fi:

$$\Phi_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 = L_1 i_1 + M i_2 \quad (4.66)$$

$$\Phi_2 = L_{12} i_1 + L_{22} i_2 = M i_1 + L_2 i_2 \quad (4.67)$$

Tensiunile electromotoare induse în spire vor fi:

$$e_1 = - \frac{\Delta \Phi_1}{\Delta t} \quad \text{și} \quad e_2 = - \frac{\Delta \Phi_2}{\Delta t} \quad (4.68)$$

Dacă se înlocuiește cu expresiile fluxurilor Φ_1 și Φ_2 de mai sus, se obține:

$$e_1 = - L_1 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} - M \frac{\Delta i_2}{\Delta t} = e_{11} + e_{12} \quad (4.69)$$

$$e_2 = - M \frac{\Delta i_1}{\Delta t} - L_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t} = e_{21} + e_{22} \quad (4.70)$$

Tensiunile electromotoare e_{11} și e_{22} generate de curenții variabili în timp din cele două bobine se numesc tensiuni electromotoare de autoinducție.

Tensiunile electromotoare e_{12} și e_{21} stabilite în cele două bobine și generate de curentul variabil din cealaltă bobină, se numesc tensiuni electromotoare de inducție mutuală. Dacă u_1 și u_2 sînt tensiunile la bornele bobinelor și dacă se neglijează căderile de tensiune din rezistențele electrice ale celor două bobine, atunci se poate scrie:

$$u_1 = - e_1 \quad \text{și} \quad u_2 = - e_2 \quad (4.71)$$

Bobinele cuplate magnetic se reprezintă în schemele electrice ca în Fig. 4.46 b. Steluțele indică pentru fiecare bobină, borna de intrare a curentului pentru care cîmpurile magnetice au același sens în circuitul magnetic comun (borne polarizate).

Acest ansamblu de două bobine înfășurate pe un miez magnetic comun constituie un transformator electric.

Raportul tensiunilor la bornele înfășurărilor reprezintă raportul de transformare:

$$\frac{u_1}{u_2} = n. \quad (4.72)$$

Se demonstrează că raportul de transformare este egal cu raportul numărului de spire:

$$n = \frac{N_1}{N_2} = \frac{u_1}{u_2} \quad (4.73)$$

4.9.3. Inducția magnetică prin mișcare

Fenomenul de inducție magnetică se constată și în cazul în care se deplasează conductorul într-un câmp magnetic uniform și omogen. După cum s-a prezentat anterior, pe un sistem de trei conductoare fixe în câmpul magnetic se deplasează alunecînd pe acestea al patrulea conductor (Fig.4.47). Câmpul magnetic uniform de inducție \vec{B} este perpendicular pe planul șinelor.

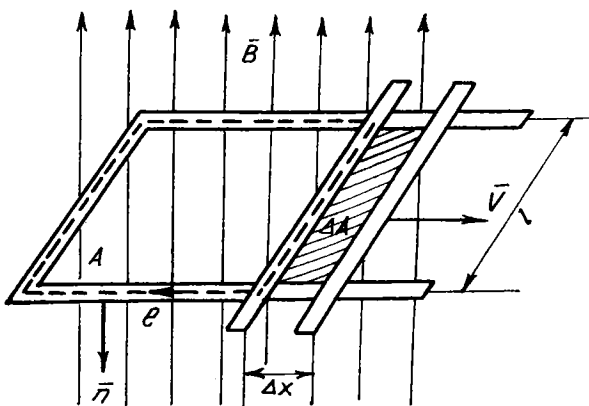


Fig. 4.47. Deplasarea conductorului electric cu viteza \vec{v} în câmp magnetic.

Suprafața A, străbătută de inducția magnetică \vec{B} , se modifică în timp.

Astfel, la timpul t , suprafața este A iar la timpul $t + \Delta t$, suprafața a devenit $A + \Delta A$. Această creștere a suprafeței s-a produs în urma deplasării conductorului mobil pe distanța Δx . Odată cu creșterea suprafeței cu ΔA , corespunzător va crește și fluxul magnetic de la valoarea Φ la timpul t , la valoarea $\Phi + \Delta \Phi$ corespunzător timpului $t + \Delta t$.

Se poate scrie că:

$$\Delta \Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} (A + \Delta A) - \vec{B} \cdot \vec{n} A = \vec{B} \cdot \vec{n} \Delta A \quad (4.74)$$

În această expresie, \vec{n} reprezintă vectorul de orientare al suprafeței A.

Fiind vector unitar, modulul său va fi: $|\vec{n}| = 1$.

Cum \vec{B} și \vec{n} sînt antiparalele rezultă:

$$\Delta \Phi = B \cdot 1 \cdot \Delta A \cos 180^\circ = -B \Delta A \quad (4.75)$$

dar $\Delta A = l \Delta x$

cum $\Delta x = v \cdot \Delta t$ rezultă

$$\Delta A = l v \Delta t$$

sau

$$\Delta \Phi = -B l v \Delta t \quad (4.76)$$

Înlocuind pe $\Delta \Phi$ în expresia legii inducției electromagnetice $\left(e = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right)$ se obține:

$$e = - \frac{-B l v \Delta t}{\Delta t} \quad \text{sau}$$

$$e = B l v. \quad (4.77)$$

Notă: Dacă inducția \vec{B} formează cu vectorul viteză \vec{v} unghiul α , atunci

$$e = B l v \sin \alpha. \quad (4.78)$$

În conturul format din conductoarele fixe și conductorul mobil (linie punctată), se naște un curent.

Acest curent generează la rândul său un câmp magnetic care se opune câmpului inductor respectiv creșterii fluxului magnetic.

4.9.4. Aplicație. Se consideră un cadru compus din N spire și de formă pătrată care se rotește cu viteza unghiulară ω într-un câmp magnetic uniform de inducție magnetică \vec{B} (Fig. 4.48).

Să se determine relația dintre tensiunea electromotoare indusă și unghiul de rotație α al cadrului mobil.

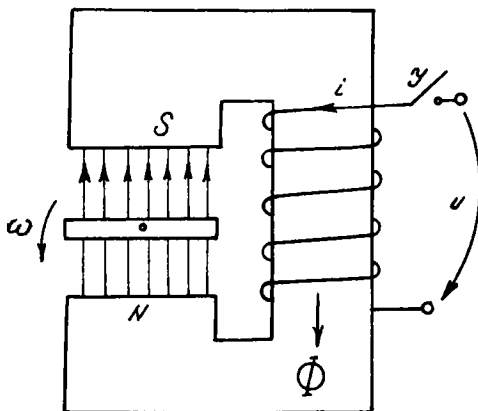


Fig.4.48. Cadru cu N spire se rotește într-un câmp magnetic uniform.

Să se reprezinte grafic această relație.

Date:

- latura cadrului $l = 25 \text{ cm}$;
- viteza unghiulară $\omega = 314 \text{ rad/s}$;
- inducția magnetică $B = 0,05 \text{ T}$;
- numărul de spire al cadrului mobil $N = 20$ spire.

Rezolvare. Cadrul se compune din $N=20$ contururi pătrate care se află în condiții identice în raport cu câmpul magnetic.

Aceasta permite determinarea tensiunii electromotoare induse într-un contur și apoi multiplicarea cu $N = 20$ pentru aflarea t.e.m induse în cadru.

Intr-o poziție oarecare a cadrului mobil, pe care am notat-o cu b (Fig. 4. 49), în conductorii 1 și 2 ai cadrului, paraleli cu axa de rotație OO_1 , se induc tensiunile electromotoare:

$e_1 = e_2 = B v l \sin \alpha$, în care unghiul α este format de inducția magnetică \vec{B} și viteza \vec{v} .

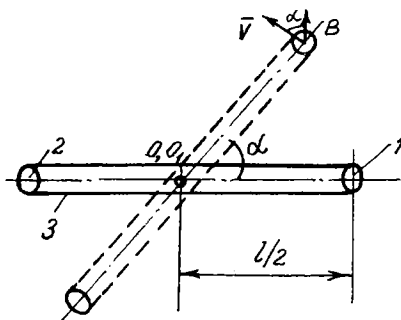


Fig. 4. 49. Poziția b (punctată) a cadrului mobil.

Tensiunile electromotoare e_1 și e_2 au sensurile determinate de regula burghiului drept (Fig. 4. 50) și sînt aditive.

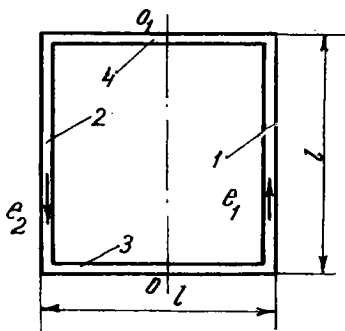


Fig. 4. 50. Sensurile tensiunilor electromotoare e_1 și e_2 .

În laturile 3 și 4 nu se induc tensiuni electromotoare deoarece nu taie liniile de câmp magnetic, astfel că:

$$e_3 = e_4 = 0.$$

Se obține tensiunea electromotoare într-un contur:

$$\begin{aligned} e_c &= e_1 + e_2 = 2 B v l \sin \alpha = 2 B \omega \frac{1}{2} l^2 \sin \alpha \\ &= B l^2 \omega \sin \alpha = B A \omega \sin \alpha \end{aligned} \quad (4.78)$$

Dar $B A$ reprezintă valoarea maximă a fluxului care trece prin contur adică

$$\Phi_m = B A ,$$

Se obține:

$$e_c = \Phi_m \omega \sin \alpha .$$

Pentru cadrul întreg

$$e = N e_c = N \Phi_m \omega \sin \alpha . \quad (4.79)$$

Tensiunea maximă indusă în cadrul E_m se obține pentru $\sin \alpha = 1$ adică pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Rezultă

$$E_m = N \Phi_m \omega \sin \frac{\pi}{2} = N \Phi_m \omega = N B A \omega \quad (4.80)$$

sau: $e = E_m \sin \alpha$, respectiv $\alpha = \omega t$;

se obține:

$$e = E_m \sin \omega t. \quad (4.81)$$

Înlocuind cu datele problemei, rezultă:

$$E_m = N \Phi_m \omega = N B A \omega = 20 \cdot 0,05 \cdot 0,25^2 \cdot 314 =$$

$$\text{Graficul} \quad = 19,6 \text{ V}$$

$$e = E_m \sin \alpha = 19,6 \sin \alpha = 19,6 \sin \omega t \quad (4.82)$$

se reprezintă pe baza datelor din Tabelul 4.2, determinate cu relația (4.82) pentru diferite valori ale unghiului α .

Tabelul 4.2

$\alpha = \omega t$	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0
$e \text{ (V)}$	0	9,8	17	19,6	17	9,8	0

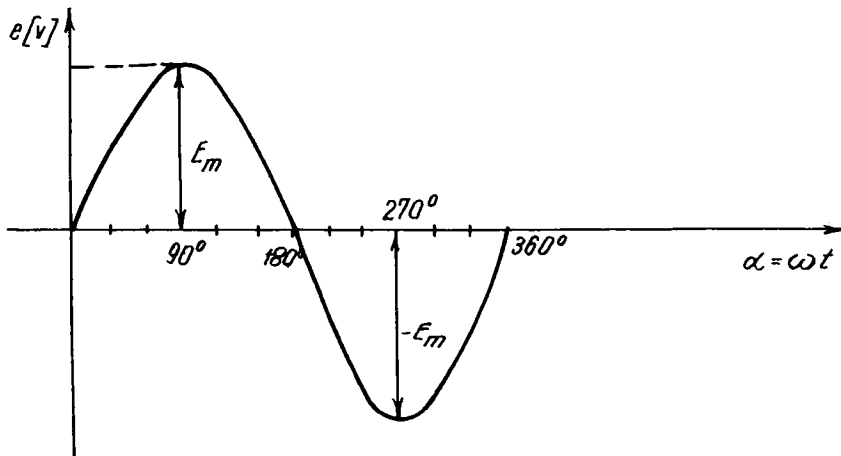


Fig. 4. 51.

Datele din Tabelul 4.2 corespund semiunde pozitive. Pentru semiunda negativă (α cuprins între 180 și 360°), valorile tensiunii electromotoare e din Tabel vor fi negative.

4.10. Curenți turbionari

Intr-o piesă metalică masivă plasată într-un câmp magnetic variabil sau când piesa se deplasează într-un câmp magnetic constant, se induc tensiuni electromotoare. Aceste tensiuni vor genera curenți electrici cunoscuți sub numele de curenți turbionari sau curenți Foucault (fig. 4.52).

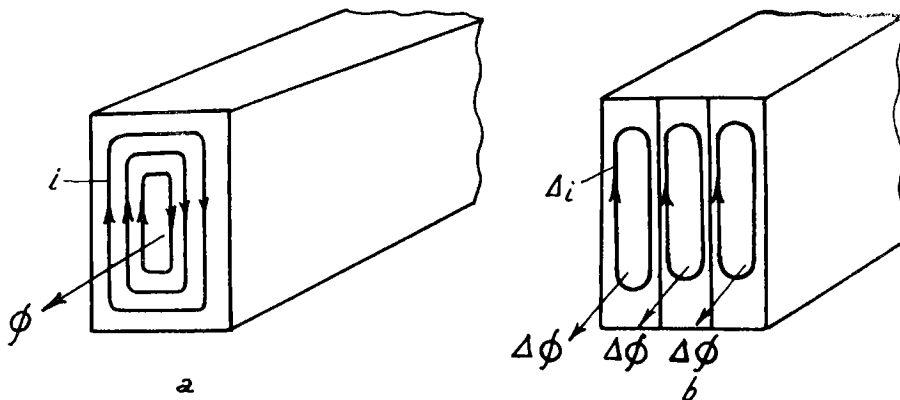


Fig. 4.52. Curenți turbionari induși: a. într-o piesă metalică; b. în tole metalice.

În aplicațiile tehnice, acești curenți sînt întîlniți în părțile magnetice ale mașinilor și aparatelor electrice. Din cauza pierderilor prin efectul Joule, se urmărește micșorarea acestor curenți turbionari. Se îmbrățăsc astfel parametrii de funcționare.

Tot în tehnică se întîlnesc aplicații utile ale curenților turbionari. Astfel, tratamentele termice prin curenți de înaltă frecvență, topirea metalelor în cuptoare de inducție, frînele electromagnetice sînt exemple de astfel de aplicații utile.

În aparatele electrice și în mașinile electrice se micșorează curenții prin reducerea secțiunii miezului magnetic respectiv prin confecționarea miezurilor magnetice din tole de 0,35 sau 0,5 mm izolate între ele cu lac sau hîrtie. Pentru a diminua și mai mult valoarea curenților induși, tola se realizează din fier silicios cu cca 4% siliciu. Prezența siliciului provoacă creșterea rezistivității electrice a materialelor magnetice fără ai diminua calitățile magnetice.

O altă cale de diminuare a curenților induși în miezurile magnetice la frecvențe medii constă în confecționarea miezului din pulberi feromagnetice presate împreună cu un material liant electroizolant.

Pierderile prin efect caloric al curenților turbionari se determină cu expresia:

$$P_{Fe} = G_{Fe} (fB\Delta)^2 \quad (W/kg) \quad (4.83)$$

în care:

f este frecvența de variație a câmpului magnetic în Hz;

B - valoarea maximă a inducției magnetice în T;

Δ - grosimea tolelor în m;

G_{Fe} - coeficient de pierderi cuprins între 2,2 și 4,8, corespunzător calității tolelor.

4.11. Efectul Hall

Asupra corpurilor conductoare și semiconductoare plasate într-un câmp magnetic, se constată efecte galvanometrice.

Astfel, în 1856, W. Thomson descoperă primul efect galvanometric; modificarea rezistenței electrice a unor conductoare în prezența câmpului magnetic. Aplicația practică a acestui efect o constituie măsurarea inducției magnetice cu ajutorul spiralei de bismut.

Totuși, cel mai important efect galvanometric îl constituie efectul Hall descoperit în 1879 de fizicianul E.H.Hall. Efectul constă în apariția unei tensiunii - tensiunea Hall - între două puncte ale unei plăci conductoare sau semiconductoare prin care trece un curent electric când este plasată într-un câmp magnetic, de inducție \vec{B} . (fig. 4.53). Plăcuța se mai numește și sondă Hall.

La plăcuțele semiconductoare, efectul Hall este mult mai pronunțat.

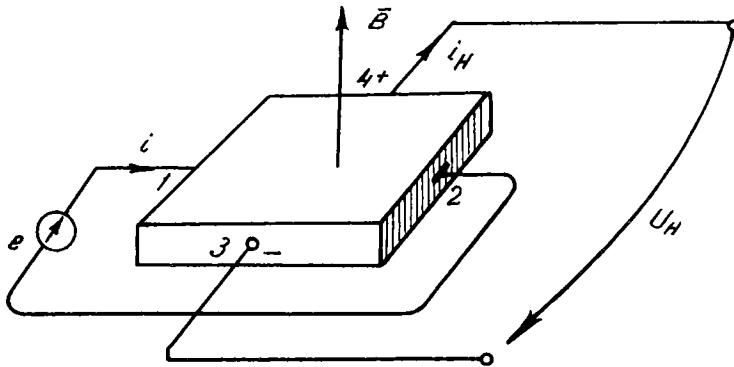


Fig. 4.53. Sondă Hall

Pentru a fi utilizată mai ales la măsurarea inducției \vec{B} - sonda Hall este prevăzută cu doi electrozi plăți 1 și 2 pentru curentul de comandă i și doi electrozi punctuali 3 și 4 pentru preluarea tensiunii Hall - U_H și care se poate măsura apoi cu un instrument de măsură.

Se demonstrează că tensiunea Hall:

$$U_H = K_H i B \quad (4.84)$$

în care:

K_H reprezintă constanta Hall și depinde de natura materialului sondei și dimensiunile sale geometrice;

i - curentul de comandă;

B - inducția magnetică.

4.12. Energia din câmpul magnetic

S-a constatat că în câmpul magnetic se exercită forțe asupra sarcinilor electrice, curenților electrice sau asupra corpurilor magnetizate. Aceste forțe pot efectua în lucru mecanic atunci când corpurile se deplasează în câmpul magnetic. Cum orice sistem capabil să efectueze lucru mecanic posedă energie, se poate afirma că în câmpul magnetic este localizată energie.

Problema este să determinăm expresia acestei energii magnetice.

În acest scop se va studia circuitul electric din fig. 4.54. și se va determina energia magnetică acumulată de bobina L .

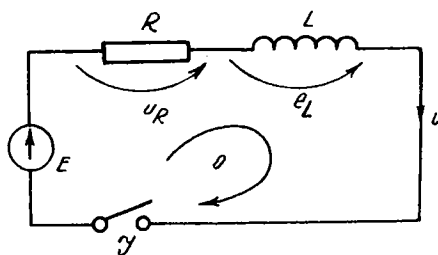


Fig. 4.54. Circuit electric pentru determinarea energiei magnetice.

Cînd se închide întreruptorul γ , curentul i crește în timp de la valoarea zero pînă la valoarea

$$I = \frac{E}{R}$$

care este constantă.

La un moment t , se scrie pe ochiul o cu teorema a doua a lui Kirchhoff ecuația:

$$u_R = E + e_L \quad (4.85)$$

în care $u_R = Ri$ reprezintă căderea de tensiune la bornele rezistorului R și

$$e_L = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} \quad (4.86)$$

este tensiunea electromotoare indusă prin transformare deoarece curentul care trece prin bobina cu inductivitatea proprie L este variabil.

Se scrie:

$$E = Ri + L \frac{\Delta i}{\Delta t} \quad (4.87)$$

în care Δi este variația curentului i în timpul foarte scurt Δt .

Dacă se înmulțește ecuația de mai sus în $i \Delta t$ se obține:

$$Ei \Delta t = Ri^2 \Delta t + Li \Delta i. \quad (4.88)$$

Dar

$$Li \Delta i = L \frac{\Delta i^2}{2} = \Delta \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) \quad (4.89)$$

Demonstrație:

$$\Delta i^2 = (i + \Delta i)^2 - i^2 = i^2 + 2i \Delta i + (\Delta i)^2 - i^2 \simeq 2i \Delta i$$

sau:

$$i \Delta i = \frac{\Delta i^2}{2}$$

S-a neglijat $(\Delta i)^2$ care este foarte mic în comparație cu $2i \Delta i$.

Deci

$$Ei \Delta t = Ri^2 \Delta t + \Delta \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$$

Termenul $Ei \Delta t$ reprezintă energia cedată rezistenței R și bobinei L în timpul Δt .

Energia cedată rezistenței R este $Ri^2 \Delta t$. Aceasta se transformă în căldură prin efect Joule.

Termenul $\Delta (\frac{1}{2} Li^2)$ reprezintă variația energiei localizate în câmpul magnetic în intervalul de timp Δt când curentul crește de la valoarea i la $i + \Delta i$.

Se notează cu:

$$\Delta W_m = \Delta (\frac{1}{2} Li^2) \quad (4.90)$$

sau

$$W_m = \frac{1}{2} Li^2 \quad (4.91)$$

Dar considerînd expresia fluxului dintr-o bobină

$$\Phi = Li \quad (4.92)$$

se obțin următoarele expresii echivalente ale energiei localizate în câmpul magnetic al bobinei:

$$W_m = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \Phi i = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} \quad (4.93)$$

Expresiile energiei localizată în câmpul magnetic sînt valabile pentru orice fel de bobină. Energia magnetică a oricărei bobine depinde numai de valoarea fluxului magnetic și intensitatea curentului la un moment dat.

Aplicație

Să se determine energia magnetică localizată într-o bobină cu inducțivitatea proprie $L = 0,1$ H, străbătută de curentul $I = 10$ A.

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} 0,1 \cdot 10^2 = 5 \text{ J}$$

4.13. Densitatea de volum a energiei magnetice

Expresia densității de volum a energiei magnetice se va determina într-un caz particular, cazul unui solenoid lung de lungime l , aria secțiunii transversale a miezului A , permeabilitatea magnetică μ și numărul de spire al solenoidului N .

În expresia energiei magnetice (4.93)

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}$$

se înlocuiește

$$\Phi = N \Phi_f = N B A$$

și

$$L = \mu \frac{N^2 A}{l} \quad \text{vezi (4.49).}$$

Deci:

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{N^2 B^2 A^2}{\mu \frac{N^2 A}{l}} = \frac{B^2}{2 \mu} Al = \frac{B^2}{2 \mu} V \quad (4.94)$$

în care $V = Al$ reprezintă volumul solenoidului.

Dacă se raportează energia magnetică W_m la volumul V , se obține densitatea de volum a energiei magnetice.

Aceasta reprezintă de altfel energia magnetică din unitatea de volum
Adică

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu} . \quad (4.95)$$

Dar

$$B = \mu H .$$

Prin înlocuire se obțin expresiile echivalente:

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{B H}{2} = \mu \frac{H^2}{2} \quad (4.96)$$

Precizări:

a. Pentru inducție $B = \text{const.}$, densitatea energiei magnetice este cu
atît mai mare cu cît μ este mai mic. De exemplu, în cazul electromagnetului
din fig. 4.33. densitatea energiei magnetice în întrefier

$$w_{m\Delta} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (4.96 \text{ a})$$

este mai mare ca densitatea energiei magnetice din fier:

$$w_{m \text{ Fe}} = \frac{B^2}{2\mu} \quad (4.96 \text{ b})$$

deoarece permeabilitatea magnetică a miezului de fier μ este mai mare ca
permeabilitatea magnetică a întrefierului μ_0 , timp în care inducția magnetică în
miez este egală cu inducția magnetică în întrefier.

Acesta este un motiv pentru care în calcule, energia magnetică localizată în miezul de fier se neglijează în raport cu energia magnetică localizată în întrefier.

b. În câmpul magnetic se localizează mai multă energie în raport cu câmpul electric.

4.14. Forța în câmpul magnetic

Expresia forței care ia naștere în câmpul magnetic se va determina în cazul particular al unui electromagnet (fig. 4.55). Se va determina forța cu care electromagnetul acționează asupra armăturii mobile.

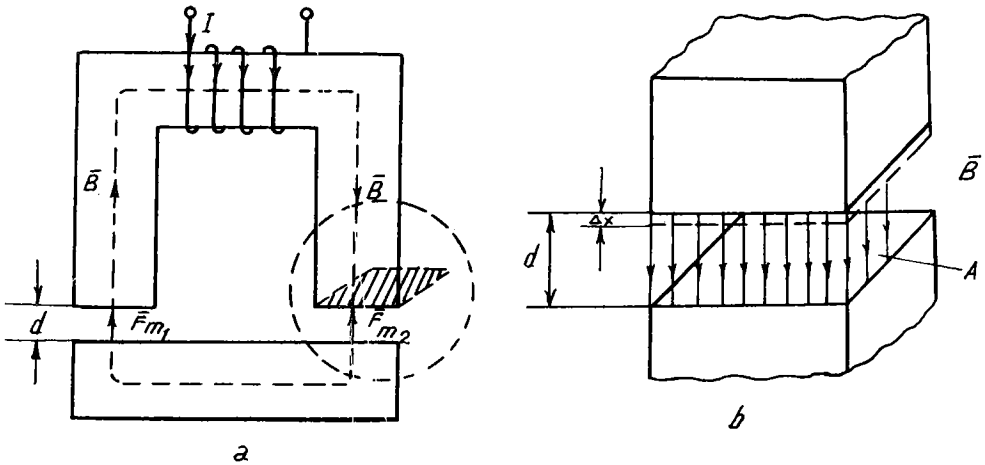


Fig. 4.55. Forța din câmpul magnetic al unui electromagnet.

Se notează cu d distanța dintre armătura mobilă și armătura fixă (întrefierul).

Lucrul mecanic elementar efectuat pe distanța Δx (fig. 4.55 b) se realizează pe seama energiei localizată în câmpul magnetic din întrefierul d . Această energie va scădea odată cu micșorarea întrefierului:

$$\Delta x \sum_{k=1}^n F_{rk} = - \Delta W_m = - (W_{m\text{final}} - W_{m\text{inițial}}) \quad (4.97)$$

S-a notat cu F_{mk} - forța portantă a polului k iar n numărul de poli.
In acest caz $n = 2$.

Calculul energiei magnetice W_m .

In expresia (4.93):

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}$$

Se va înlocui fluxul magnetic Φ cu expresia

$$\Phi = N \Phi_f = N B A \quad (4.98)$$

iar inductivitatea electromagnetului va fi

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{N \Phi_f}{i} = \frac{N B A}{i} \quad (4.99)$$

Dar

$$Nl = H_{Fe} l_{Fe} + H_o d$$

respectiv

$$i = \frac{H_{Fe} l_{Fe} + 2 H_o d}{N} \quad (4.100)$$

In această expresie, intensitățile câmpului magnetic sînt:

$H_{Fe} = \mu B$ - intensitatea câmpului magnetic în fier;

$H_o = \mu_o B$ - intensitatea câmpului magnetic în întrefier;

l_{Fe} - lungimea medie a liniei de câmp magnetic în fier.

Se fac înlocuirile în expresia (4.99) și se obține:

$$L = \frac{N B A}{\frac{H_{Fe} l_{Fe} + 2 H_o d}{N}} = \frac{N^2 B A}{\frac{B}{\mu} l_{Fe} + 2 \frac{B}{\mu_o} d} \quad (4.101)$$

sau:

$$L = \frac{N^2 A}{\frac{l_{Fe}}{\mu} + 2 \frac{d}{\mu_o}} \quad (4.102)$$

Dar permeabilitatea magnetică în fier μ este mult mai mare ca permeabilitatea magnetică în vid μ_o .

Din acest motiv:

$$\frac{l_{Fe}}{\mu} \ll \frac{d}{\mu_o}$$

și se neglijează $\frac{l_{Fe}}{\mu}$.

Rezultă:

$$L = \mu_o \frac{N^2 A}{2 d} \quad (4.103)$$

Dacă se înlocuiește (4.98) și (4.103) în expresia energiei magnetice rezultă:

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{N^2 B^2 A^2}{\frac{\mu_o N^2 A}{2 d}} = \frac{B^2}{\mu_o} A d \quad (4.104)$$

Variația energiei ΔW_m va fi conform (4.97)

$$\begin{aligned}\Delta W_m &= W_{m \text{ final}} - W_{m \text{ inițial}} = \\ &= \frac{B^2}{\mu_o} A (d - \Delta x) - \frac{B^2}{\mu_o} A d = - \frac{B^2 A}{\mu_o} \Delta x\end{aligned}\quad (4.105)$$

S-a considerat $W_m = W_{m \text{ inițial}}$.

Pentru $k = 2$ poli (electromagnetul din fig. 4.55) expresia (4.97) devine:

$$(F_{m1} + F_{m2}) \Delta x = - (W_{m \text{ final}} - W_{m \text{ inițial}}) = - \Delta W_m \quad (4.106)$$

Cum

$$F_{m1} = F_{m2} = F_m$$

Rezultă:

$$2 F_m \Delta x = \frac{B^2 A}{\mu_o} \Delta x$$

sau

$$F_m = \frac{B^2}{2 \mu_o} A \quad (4.107)$$

F_m reprezintă forța portantă a electromagnetului dezvoltată pe unul din polii celor două armături (fixă și mobilă).

Aplicație

Să se determine inducția magnetică de sub polul unui electromagnet capabil să dezvolte o forță $F_m = 5\,000\text{ N}$, avînd aria secțiunii $A = 3\text{ dm}^2$.

Din

$$B = \sqrt{\frac{2 \mu_0 F_m}{A}}$$

rezultă

$$B = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-2}}} = 0,647\text{ T}$$

CAPITOLUL 5

CURENTUL ALTERNATIV SINUSOIDAL

Descoperirea de Michael Faraday, în 1831, a fenomenului inducției electromagnetice, a determinat dezvoltarea rapidă și multiplă a aplicațiilor electricității în tehnică.

Astfel, în 1832, francezul Hippolyte Pixii (1808-1835) inventează primul generator de curent alternativ monofazat. Generatorul consta dintr-un magnet permanent care se rotea în fața polilor unui electromagnet fix. La sugestia lui A.M. Ampère, inventatorul H. Pixii adaugă mașinii un comutator care permite obținerea unui curent electric pulsatoriu.

Urmează după aceea o serie de invenții și aplicații care aveau ca scop producerea, transportul și utilizarea energiei electromagnetice. Mărimile alternative sinusoidale: tensiunea și curentul erau potrivite acestui scop.

Mărimile electromagnetice variabile în timp sînt întâlnite în domeniul electrocomunicațiilor. Dezvoltarea acestui domeniu are la bază teoria câmpului electromagnetic, fundamentată de fizicianul englez James Clark Maxwell în lucrarea sa "Tratat despre electricitate și magnetism", apărută în 1873. Confirmarea experimentală a teoriei lui Maxwell a fost făcută mai târziu, în 1887, de fizicianul german Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894).

Acesta a demonstrat prima oară că electricitatea se poate transmite și fără conductoare, prin intermediul undelor electromagnetice.

Primele încercări de generare și detectare a undelor electromagnetice aparțin tot lui H.R. Hertz; în acest scop a creat aparatele denumite "oscilatorul" și "rezonatorul" lui Hertz.

Mai târziu, în 1894, inginerul electrician rus Aleksandr Stepanovici Popov (1859-1905) emite ideea că undele electromagnetice - denumite și hertziene - ar putea fi folosite pentru transmiterea semnalelor la distanță în electrocomunicații. Chiar în 1895 la Societatea de Fizică din Petersburg, A.S. Popov prezintă „detectorul de furtuni”, primul receptor de unde electromagnetice.

Aplicațiile curenților alternativi se întâlnesc acum în multe domenii tehnice și industriale. Principalul avantaj al curentului alternativ rămâne însă producerea sa simplă.

5.1. Generarea tensiunii electromotoare alternative sinusoidale. Curentul alternativ sinusoidal.

Tensiunea electromotoare alternativă sinusoidală se obține prin fenomenul de inducție electromagnetică, realizată în generatoare de tensiune alternativă instalate în centralele electrice. Principiul de funcționare al unui generator de tensiune alternativă a fost prezentat în subcapitolul 4.9. „Legea inducției electromagnetice”(aplicație).

S-a demonstrat că tensiunea electromotoare indusă în cadru este:

$$e = NBA \omega \sin \omega t \quad (\text{V}) \quad (5.1)$$

în care:

N - numărul de spire al cadrului;

B - inducția magnetică (T);

A - suprafața cadrului (m^2);

ω - viteza unghiulară (rad/s).

Valoarea maximă a t.e.m. reprezintă mărimea:

$$E_m = NBA \omega \quad (5.2)$$

și nu depinde de forma geometrică a cadrului. Se măsoară în volți.

Tensiunea indusă se poate scrie:

$$e = E_m \sin \omega t \quad (5.3)$$

Valoarea instantanee reprezintă valoarea tensiunii electromotoare la un moment dat. In acest caz este e .

Curentul alternativ sinusoidal. Dacă se leagă capetele cadrului la două inele care alunecă pe două perii P_1 și P_2 , legate la rîndul lor cu un circuit exterior în care se află rezistența de sarcină R_s (fig. 5.1), atunci prin circuitul format, va trece curentul sinusoidal:

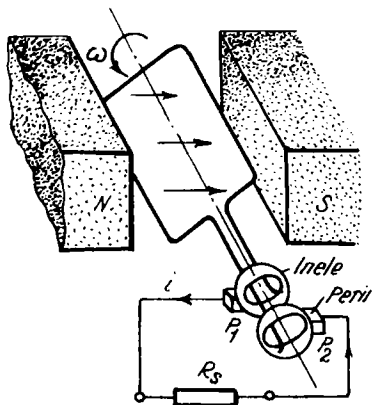


Fig. 5.1. Generator de tensiune alternativă.

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_m}{R} \sin \omega t . \quad (5.4)$$

R reprezintă rezistența totală a circuitului formată din rezistența cadrului, rezistența de contact la perii, rezistența firelor de legătură și rezistența de sarcină R_s .

Dacă se notează cu

$$I_m = \frac{E_m}{R}$$

valoarea maximă a curentului, vom avea expresia valorii instantanee:

$$i = I_m \sin \omega t \quad (5.5)$$

Aplicație

Un cadru dreptunghiular se rotește cu $n = 120$ rot /minut într-un câmp magnetic uniform cu inducția magnetică $B = 0,8$ T. Cadrul este o bobină formată din $N = 25$ spire. Suprafața cadrului este $A = 4 \text{ cm}^2$ și rezistența sa $r = 0,1 \Omega$.

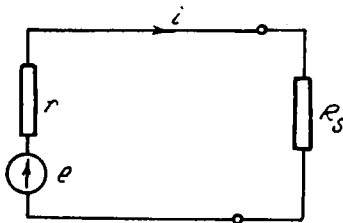


Fig. 5.2.

Se cere:

a. Expresia tensiunii electromotoare induse.

În

$$e = E_m \sin \omega t$$

se înlocuiește:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 2\pi \times 120 \frac{\text{rot}}{\text{min}} \times \frac{1}{60} \frac{\text{min}}{\text{s}} = 4\pi \text{ rad/s}$$

și

$$E_m = NBA \omega = 25 \times 0,8 \times 4 \cdot 10^{-4} \times 4\pi = 0,1 \text{ V}$$

Rezultă:

$$e = 0,1 \sin 4\pi t \text{ (V)}.$$

b. Curentul care trece prin circuit (fig. 5.2) avînd rezistența de sarcină:

$$R_s = 9,9 \Omega.$$

Se neglijează rezistența de contact la perii și a firelor de legătură.

$$i = \frac{e}{r + R_s} = \frac{0,1}{0,1 + 9,9} \sin 4\pi t \quad (\text{A})$$

sau

$$i = 10 \sin 4\pi t \quad (\text{mA})$$

5.1.1. Mărime periodică. Perioadă. Frecvență. Pulsație.

Mărimea variabilă ale cărei valori se repetă după intervale egale de timp se numește mărime periodică.

Tensiunea electromotoare $e = E_m \sin \omega t$ și curentul $i = I_m \sin \omega t$ sînt mărimi periodice (fig. 5.3).

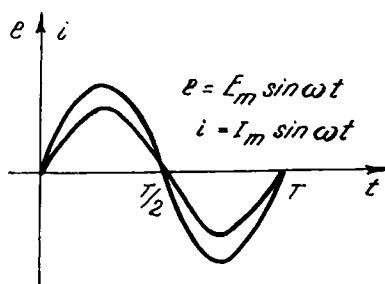


Fig. 5.3. Tensiunea electromotoare e și curentul i sînt mărimi periodice.

După intervale egale de timp, curentul respectiv tensiunea capătă aceleași valori.

Mărimile sinusoidale sînt mărimi periodice. Se întîlnesc mărimi variabile în timp, periodice, și de o altă formă. În electronică, există curentul în dinți de fierăstrău (fig. 5.4).

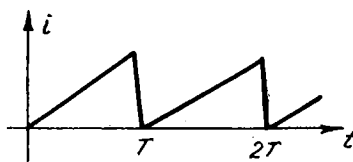


Fig. 5.4. Curent în dinți de fierăstrău.

În tehnică de calcul, se folosește tensiune cu variație dreptunghiulară în timp (fig. 5.5).

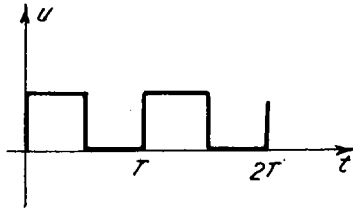


Fig. 5.5. Tensiune cu variație dreptunghiulară în timp.

Perioadă. Intervalul minim de timp după care se repetă, în aceeași ordine, valorile mărimii periodice, se numește perioadă. Se notează cu T .

Unitatea de măsură pentru perioadă este secunda (s).

Frecvență unei mărimi periodice este raportul dintre un număr întreg de perioade și intervalul de timp corespunzător acestui număr.

$$f = \frac{n}{nT} = \frac{1}{T} \text{ sau } f = \frac{1}{T} \quad (5.6)$$

Unitatea de măsură pentru frecvență în SI se numește hertz (Hz).

Rețelele electrice de transmitere și distribuție a energiei electrice în curent alternativ au frecvența standard de $50 Hz$. Există și frecvență de $60 Hz$ în alte țări.

Pulsația sau frecvența unghiulară se definește prin relația matematică:

$$\omega = 2\pi f \quad (5.7)$$

în care:

f - frecvența.

Unitatea de măsură în SI este radian/secundă (rad/s).

Intre pulsația ω , frecvența f și perioada T există relațiile:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} ; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} ; \quad \omega T = 2\pi \quad (5.8)$$

Folosind aceste relații, expresia tensiunii electromotoare sau a curentului se poate scrie sub formele (se prezintă pentru t.e.m.):

$$e = E_m \sin \omega t = E_m \sin 2\pi ft = E_m \sin \frac{2\pi}{T} t \quad (5.9)$$

5.1.2. Valoarea medie. Mărime alternativă. Valoarea efectivă.

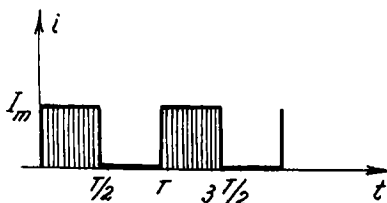
Valoare medie a mărimii periodice reprezintă raportul dintre suma algebrică a suprafețelor determinate de curba care descrie mărimea periodică și perioada corespunzătoare acestei mărimi.

Se notează cu literă mare și indice "med" (Exemplu: U_{med}).

Mărime alternativă este mărimea periodică a cărei valoare medie este nulă.

Aplicația 1

Să se calculeze valoarea medie a curentului electric, mărime periodică de perioada T , reprezentată sub formă grafică în fig. 5.6.



Valoarea instantanee a curentului electric i variază astfel:

$$i = I_m \quad \text{pentru } t \in (0, \frac{T}{2}),$$

$$i = 0 \quad \text{pentru } t \in (\frac{T}{2}, T).$$

Valoarea medie a curentului se calculează pe o perioadă T :

$$I_{med} = \frac{I_m \frac{T}{2} + 0 \frac{T}{2}}{T} = \frac{I_m}{2}$$

Aplicația 2

Să se calculeze valoarea medie a tensiunii electrice, mărime periodică de perioadă T , reprezentată sub formă grafică în fig. 5.7.

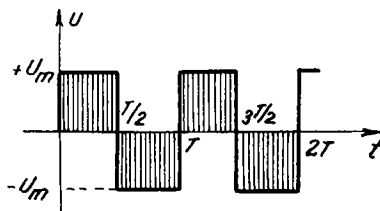


Fig. 5.7.

Valoarea instantanee a tensiunii electrice u variază astfel:

$$u = U_m \quad \text{pentru } t \in (0, \frac{T}{2}),$$

$$u = 0 \quad \text{pentru } t = 0; \frac{T}{2}; T,$$

$$u = -U_m \quad \text{pentru } t \in (\frac{T}{2}, T).$$

Valoarea medie a tensiunii electrice se calculează pe o perioadă T :

$$U_{\text{med}} = \frac{U_m \frac{T}{2} - U_m \frac{T}{2}}{T} = \frac{0}{T} = 0$$

Mărime alternativă sinusoidală este mărimea alternativă a cărei variație în timp este de formă sinusoidală.

Exemplu: curentul alternativ sinusoidal a cărei valoare instantanee i variază sinusoidal în timp

$$i = I_m \sin \omega t.$$

Valoarea medie a mărimii alternative sinusoidale în timpul unei perioade este nulă.

Demonstrație.

În fig. 5.8 este reprezentată grafic variația sinusoidală în timp a valorii instantanee a curentului:

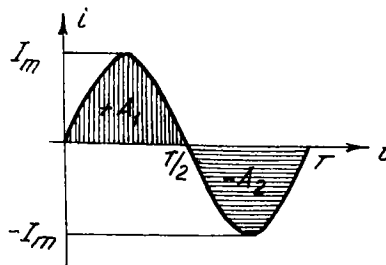


Fig. 5.8. Variația sinusoidală a lui i : $i = I_m \sin \omega t$

$$i = I_m \sin \omega t$$

Se notează cu $+A_1$ suprafața pozitivă mărginită de curba $i = I_m \sin \omega t$ și axa absciselor cuprinsă între 0 și $\frac{T}{2}$.

Se notează cu $-A_2$, suprafața negativă mărginită de aceeași curbă și axa absciselor cuprinsă între $\frac{T}{2}$ și T .

Din motive de simetrie $A_1 = A_2 = A$ dar au semne contrare.

Conform definiției, valoarea medie a curentului pe o perioadă este:

$$I_{\text{med}} = \frac{+A_1 - A_2}{T} = \frac{+A - A}{T} = \frac{0}{T} = 0 \quad (5.10)$$

NOTA:

Cu toate că rețelele de distribuție și folosire a energiei electromagnetice sînt de curent alternativ sinusoidal, uzual, sînt numite rețele de curent alternativ.

Aplicația 1

Să se calculeze valoarea medie a tensiunilor electrice, funcțiuni periodice de perioadă T , în raport cu timpul. Forma grafică este prezentată în fig. 5.9 și fig. 5.10.

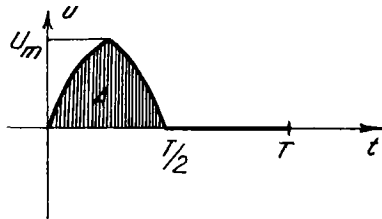


Fig. 5.9.

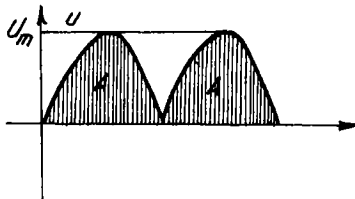


Fig. 5.10.

a. Valoarea instantanee a tensiunii electrice u variază astfel:

$$u = U_m \sin \frac{2\pi}{T} t \quad \text{pentru } t \in \left(0, \frac{T}{2}\right),$$

$$u = 0 \quad \text{pentru } t \in \left(\frac{T}{2}, T\right).$$

Valoarea medie se calculează pe perioada T .

$$U_{\text{med}} = \frac{\text{suprafața } A}{T}$$

Se demonstrează că suprafața A este:

$$\text{suprafața } A = \frac{T U_m}{\pi}$$

Rezultă:

$$U_{\text{med}} = \frac{\frac{T U_m}{\pi}}{T} = \frac{U_m}{\pi}$$

b. Valoarea instantanee a tensiunii electrice u variază astfel:

$$u = U_m \left| \sin \frac{2\pi}{T} t \right|$$

NOTA:

Scrierea între bare semnifică:

Pentru oricare valoare a lui t , $\left| \sin \frac{2\pi}{T} t \right|$ reprezintă valoarea absolută a lui $\sin \frac{2\pi}{T} t$ și este mereu pozitivă.

Valoarea medie se calculează pe perioada T :

$$U_{\text{med}} = \frac{2 \times \text{supraf. } A}{T} = \frac{2 \frac{T U_m}{\pi}}{T} = \frac{2 U_m}{\pi}$$

Valoarea efectivă a mărimii periodice. La valoarea efectivă a unei mărimi periodice, s-a ajuns din considerente energetice. În acest scop s-a definit mai întâi valoarea efectivă a unui curent periodic. Aceasta este numeric egală cu intensitatea unui curent continuu care, străbătând același rezistor ca și curentul periodic, face să se dezvolte aceeași cantitate de căldură în timp de o perioadă.

Matematic se scrie:

$$RI^2T = R \sum_{(T)} i^2 \Delta t \quad \text{sau} \quad I = \sqrt{\frac{\sum_{(T)} i^2 \Delta t}{T}} \quad (5.11)$$

Prin $\sum_{(T)} i^2 \Delta t$ se înțelege că suma este efectuată în intervalul de timp egal cu o perioadă;

I - reprezintă valoarea efectivă a curentului periodic;

R - rezistența electrică a rezistorului;

i - valoarea instantanee a mărimii periodice, în intervalul Δt ;

T - perioada.

În aplicațiile practice noțiunea de valoare efectivă (se mai numește și eficace) se extinde asupra curenților și tensiunilor.

Se notează cu literă mare de tipar (Ex.: U sau I).

Aplicația 1

Să se calculeze valoarea efectivă a următoarelor tensiuni electrice, funcțiuni periodice de perioadă T , în raport cu timpul (fig. 5.11 și fig. 5.12).

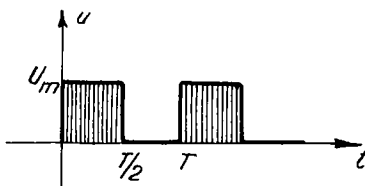


Fig. 5.11.

- Valoarea instantanee a tensiunii electrice u variază astfel:

$$u = U_m \quad \text{pentru } t \in \left(0, \frac{T}{2}\right),$$

$$u = 0 \quad \text{pentru } t \in \left(\frac{T}{2}, T\right).$$

Valoarea efectivă (sau eficace) a tensiunii electrice se calculează pe o perioadă T :

$$U = \sqrt{\frac{\sum_{(T)} u^2 \Delta t}{T}} = \sqrt{\frac{U_m^2 \frac{T}{2} + 0 \frac{T}{2}}{T}} = \sqrt{\frac{U_m^2}{2}}$$

sau

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

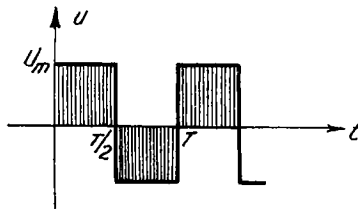


Fig. 5.12.

- Valoarea instantanee a tensiunii electrice u variază astfel:

$$u = U_m \quad \text{pentru } t \in \left(0, \frac{T}{2}\right),$$

$$u^* = -U_m \quad \text{pentru } t \in \left(\frac{T}{2}, T\right).$$

Valoarea efectivă a tensiunii electrice se calculează pe o perioadă T :

$$U = \sqrt{\frac{\sum_{(T)} u^2 \Delta t}{T}} = \sqrt{\frac{U_m^2 \frac{T}{2} + (-U_m)^2 \frac{T}{2}}{T}} = \sqrt{U_m^2} = U_m$$

Valoarea efectivă a mărimii sinusoidale. Se demonstrează că valoarea efectivă a unei mărimi alternative sinusoidale (Ex.: curentul alternativ sinusoidal) are următoarea expresie:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (5.12)$$

în care:

I - reprezintă valoarea efectivă a curentului alternativ sinusoidal;

I_m - reprezintă valoarea maximă a curentului sinusoidal.

Factor de formă al unei mărimi periodice. Se definește factorul de formă ca raportul dintre valoarea efectivă și valoarea medie a unei mărimi periodice.

Se notează cu K_f .

$$K_f = \frac{\text{valoare efectivă}}{\text{valoare medie}} \quad (5.13)$$

Ex. pentru un curent periodic:

$$K_f = \frac{I}{I_{med}} .$$

Factor de vîrf al unei mărimi periodice. Se definește factorul de vîrf ca raportul dintre valoarea maximă și valoarea efectivă a unei mărimi periodice.

Se notează cu K_v :

$$K_v = \frac{\text{valoare maximă}}{\text{valoare efectivă}} \quad (5.14)$$

5.1.3. Caracteristicile mărimilor sinusoidale

Expresia mărimii sinusoidale. Ex. pentru curent:

$$i = I_m \sin(\omega t + \vartheta) \quad (5.15)$$

În fig. 5.13 este reprezentată sub formă grafică.

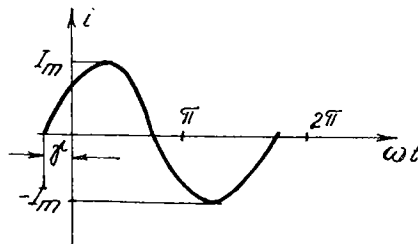


Fig. 5.13. Reprezentarea grafică a mărimii sinusoidale: $i = I_m \sin(\omega t + \vartheta)$

Valoarea maximă I_m . Cea mai mare valoare instantanee. Se mai numește amplitudine.

Fază reprezintă argumentul sinusului adică unghiul $\omega t + \vartheta$. Unitatea de măsură: radian (rad).

Fază inițială reprezintă valoarea fazei la momentul inițial ($t = 0$). În cazul respectiv, faza inițială este unghiul ϑ . Notății folosite:

α - faza inițială a unei tensiuni electromotoare;

β - faza inițială a unei tensiuni electrice;

ϑ - faza inițială a unui curent electric.

Valoarea medie a mărimii sinusoidale, într-un interval de timp egal cu o perioadă, este nulă.

$$I_{\text{med}} = 0 \quad (5.16)$$

Pentru o semiperioadă:

$$I_{\text{med}} = \frac{2 I_m}{\pi} \quad (5.16 \text{ a})$$

Valoarea efectivă a mărimii sinusoidale este:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (5.17)$$

Din acest motiv, expresia mărimii sinusoidale,

$$i = I_m \sin (\omega t + \varphi)$$

se scrie:

$$i = \sqrt{2} I \sin (\omega t + \varphi) \quad (5.18)$$

Pulsatia mărimii sinusoidale este mărimea:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (5.19)$$

Din acest motiv, expresia mărimii sinusoidale se pune și sub forma:

$$i = \sqrt{2} I \sin (2\pi f t + \varphi) \quad (5.20)$$

sau

$$i = \sqrt{2} I \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi \right) \quad (5.20 \text{ a})$$

Factorul de formă al mărimii sinusoidale este:

$$K_f = \frac{I}{I_{med}} = \frac{\frac{I_m}{\sqrt{2}}}{\frac{I_m}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad (5.21)$$

NOTA:

Factorul de formă K_f s-a calculat pentru o semiperioadă; pentru o perioadă nu are sens.

Factorul de vîrf al mărimii sinusoidale este:

$$K_v = \frac{I_m}{I} = \frac{I_m}{\frac{I_m}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \quad (5.22)$$

Defazajul dintre două mărimi sinusoidale de aceeași pulsație ω :

$$i_1 = \sqrt{2} I_1 \sin (\omega t + \varphi_1)$$

și

$$i_2 = \sqrt{2} I_2 \sin (\omega t + \varphi_2)$$

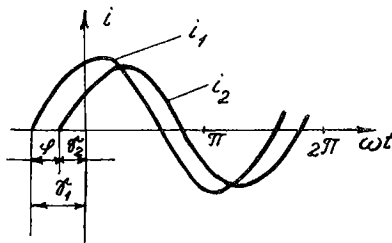


Fig. 5.14. Defazajul dintre două mărimi sinusoidale.

este egal cu diferența fazelor celor două mărimi (fig. 5.14):

$$\varphi = (\omega t + \varphi_1) - (\omega t + \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (5.23)$$

Se spune că, mărimea i_1 este defazată înaintea mărării i_2 cu un unghi φ , respectiv mărimea i_2 este defazată în urma mărării i_1 cu același unghi.

Distingem:

a. Mărimi în fază. Defazajul este zero: $\varphi = 0$ (fig. 5.15 a).

b. Mărimi în cuadratură. Defazajul este $\frac{\pi}{2}$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (fig. 5.15 b).

c. Mărimi în opoziție. Defazajul este π ; $\varphi = \pi$ (fig. 5.15 c).

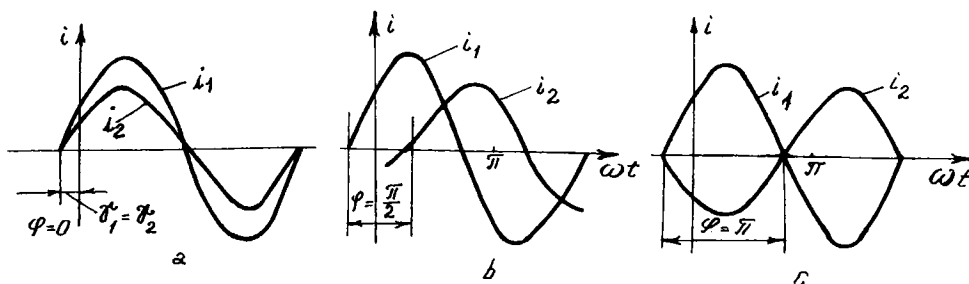


Fig. 5.15. Defazajul dintre două mărimi sinusoidale: a. mărimi în fază; $\varphi = 0$; b. mărimi în cuadratură: $\varphi = \frac{\pi}{2}$; c. mărimi în opoziție: $\varphi = \pi$.

Aplicația 1.

Valoarea instantanee a curentului electric dintr-un circuit are expresia:

$$i = 5 \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{6} \right) \quad (\text{A}) \text{ și frecvența } f = 50 \text{ Hz.}$$

Să se determine caracteristicile:

a. valoarea efectivă;

b. faza inițială;

c. valorile instantanee pentru $\omega t = 0$ și $\omega t = \frac{\pi}{6}$;

d. timpul t_0 (sau momentul) la care valoarea instantanee este maximă.

a. Expresia mărimii sinusoidale în forma generală este:

$$i = I \sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi)$$

Prin comparație, rezultă valoarea efectivă:

$$I = 5 \text{ A ,}$$

b. Faza inițială:

$$\varphi = - \frac{\pi}{6}$$

c. Valorile instantanee:

$$\text{Pentru } \omega t = 0 ; \quad i = 5 \sqrt{2} \sin \left(- \frac{\pi}{6} \right) = -5 \sqrt{2} \frac{1}{2} = -5 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ A}$$

$$\text{Pentru } \omega t = \frac{\pi}{6} ; \quad i = 5 \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = 0$$

$$\text{d. Din } i = I_m \sin (\omega t + \varphi)$$

rezultă că:

$$i = I_m \text{ pentru } \omega t_o + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

În acest caz:

$$\omega t_o - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ sau } t_o = \frac{2\pi}{3\omega}$$

sau

$$t_o = \frac{2\pi}{3 \frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{3}$$

Dar

$$T = \frac{1}{f}$$

Rezultă:

$$t_o = \frac{1}{3 f} = \frac{1}{3 \cdot 50} = \frac{1}{150} \text{ s} = 6,77 \text{ ms}$$

Aplicația 2.

Valoarea instantanee a curentului electric dintr-un circuit are expresia:

$$i = 10 \sqrt{2} \sin 100 \pi t \text{ (A)}$$

Să se determine caracteristicile:

- a. valoarea maximă sau amplitudinea;
- b. perioada;
- c. faza inițială.

Expresia curentului sinusoidal în forma generală este:

$$i = I_m \sin (2 \pi f t + \varphi) \quad (\text{A})$$

- a. Prin comparație rezultă valoarea maximă:

$$I_m = 10 \sqrt{2} \text{ A}$$

- b. Perioada este:

$$T = \frac{1}{f}$$

Dar

$$2 f = 100 \text{ sau } f = 50 \text{ Hz}$$

· rezultă:

$$T = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ s} = 20 \text{ ms}$$

c. Faza inițială:

$$\varphi = 0$$

Aplicația 3

Semnalul electric vizualizat pe ecranul unui osciloscop este o tensiune sinusoidală.

Din indicațiile instrumentului de măsură rezultă că amplitudinea semnalului este 140 mV iar perioada 100 μs (microsecunde) ($1 \mu\text{s} = 10^{-6} \text{ s}$).

Se cere:

- a. valoarea efectivă a semnalului;
- b. frecvența;
- c. pulsația.

Expresia mărimii sinusoidale este:

$$u = U_m \sin (\omega t + \beta)$$

sau

$$u = \sqrt{2} U \sin (\omega t + \beta)$$

a. Valoarea efectivă a semnalului este:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{140}{\sqrt{2}} \approx 100 \text{ mV}$$

b. Frecvența:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^6}{100} = 10^4 \text{ Hz} = 10 \text{ KHz}$$

c. Pulsația:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^4 = 6,28 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$$

Aplicația 4

În fig. 5.16 sînt redată sub formă grafică, două tensiuni sinusoidale de valori instantanee u_1 și u_2 .

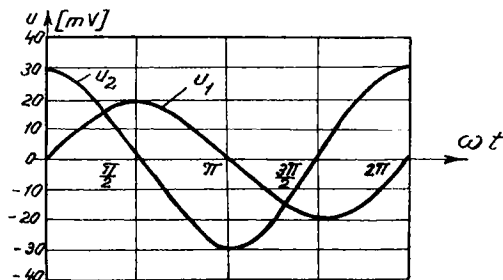


Fig. 5.16.

Să se determine:

- expresiile mărimilor sinusoidale;
- valorile efective;
- defazajul.

a. Expresiile mărimilor sinusoidale:

$$u_1 = 20 \sin \omega t$$

$$u_2 = 30 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

b. Valorile efective:

$$U_1 \sqrt{2} = 20 \rightarrow U_1 = \frac{20}{\sqrt{2}} \text{ V}$$

$$U_2 \sqrt{2} = 30 \rightarrow U_2 = \frac{30}{\sqrt{2}} \text{ V}$$

c. Defazajul:

$$\varphi = (\omega t + \varphi_1) - (\omega t + \varphi_2) = (\omega t + 0^\circ) - (\omega t + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Cele două tensiuni sînt în cuadratură; tensiunea electrică u_2 este defazată înaintea tensiunii u_1 cu $\frac{\pi}{2}$.

Se poate spune și: tensiunea electrică u_1 este defazată în urma tensiunii u_2 cu $\frac{\pi}{2}$.

5.1.4. Precizări în legătură cu caracteristicile mărimilor sinusoidale.

În tehnică se utilizează în mod curent valoarea efectivă a curenților și a tensiunilor. Dacă nu se fac precizări, valoarea unui curent alternativ sau unei tensiuni alternative reprezintă totdeauna valoarea sa efectivă. Exemplu: curentul nominal al unui receptor este 10 A sau tensiunea rețelei de curent alternativ este 220 V; reprezintă valori efective.

În cazul instrumentelor de măsură în curent alternativ, scala se gradează în valori efective.

Sînt instrumente de măsură al căror echipaj mobil se deplasează proporțional cu valoarea medie a mărimii de măsurat (instrumentele magnetoelectrice). Echipajul mobil la alte instrumente (instrumente electrodinamice) deviază proporțional cu valoarea efectivă a mărimii măsurate.

În ambele cazuri, după cum s-a mai precizat, gradarea scalei se face în valori efective.

5.2. Reprezentarea mărimilor sinusoidale

Circuitele electrice de curent alternativ sînt circuitele în care curenții și tensiunile sînt mărimi variabile în timp, de formă sinusoidală.

Astfel, dacă generatoarele de tensiune și de curent din circuit au tensiuni electromotoare și curenți care variază sinusoidal în timp cu aceeași frecvență, atunci în circuitul respectiv vor circula curenți și se vor stabili tensiuni cu variație sinusoidală în timp avînd aceeași frecvență ca sursele.

Pentru rezolvarea cît mai simplă și rapidă a circuitelor de curent alternativ, s-au imaginat reprezentări ale mărimilor sinusoidale care vor fi tratate în continuare.

5.2.1. Reprezentarea în instantaneu

Mărimile sinusoidale se reprezintă în instantaneu sub forma expresiei:

$$i = I_m \sin (\omega t + \varphi) \text{ (exemplu pentru curent)}$$

Utilizarea acestor mărimi, reprezentate în instantaneu, la rezolvarea circuitelor, conduce la calcule extrem de complicate.

Se folosesc totuși la exprimarea datelor respectiv a rezultatelor dintr-o problemă.

5.2.2. Reprezentarea carteziană

Este o reprezentare grafică într-un sistem de coordonate carteziene în plan, avînd în abscisă valorile timpului t sau valorile unghiului ωt , iar în ordonată valoarea instantanee a mărimii sinusoidale respective (fig. 5.17).

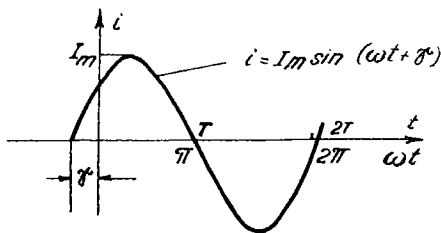


Fig. 5.17. Reprezentarea carteziană a mărimii sinusoidale:

$$i = I_m \sin \omega t$$

Este folosită mai puțin în calcule, se utilizează însă pentru o prezentare mai sugestivă a mărimilor sinusoidale din probleme respectiv la afișarea acestor mărimi pe ecranul osciloscoapelor. Se pot determina și calcula caracteristicile mărimilor sinusoidale:

- valoarea maximă, frecvență, perioadă, defazaj etc.

5.2.3. Reprezentarea în complex

Se vor preciza noțiunile matematice referitoare la numerele complexe.

- Număr imaginar. Numărul $\sqrt{-1} = j$ este un număr imaginar. S-a notat unitatea imaginară $\sqrt{-1}$ cu j pentru a nu se confunda cu simbolul i al curentului. (Ex.: Numărul $\sqrt{-5}$ se scrie $5j$ deci $\sqrt{-5} = \sqrt{5} j$).

- Număr complex. Este suma dintre un număr real și un număr imaginar.

$$\underline{c} = a + jb \quad (5.24)$$

în care:

\underline{c} - număr complex;

a - număr real sau partea reală;

jb - număr imaginar sau partea imaginară.

Pentru a deosebi o mărime complexă de o mărime reală, se folosește sublinierea (Ex.: \underline{c}).

Intr-o ecuație, în care există numere complexe, partea reală a membrului drept este egală cu partea reală a membrului stâng și partea imaginară a membrului drept este egală cu partea imaginară a membrului stâng.

- Reprezentarea grafică a numărului complex. Numărul complex se reprezintă grafic în planul complex. În acest plan, axa absciselor se numește axă reală și se indică prin unitatea reală $+1$. Axa ordonatelor se numește axă imaginară și se indică prin unitatea imaginară $+j$.

Un număr complex se reprezintă în planul complex printr-un punct. În fig. 5.18 numărul complex \underline{c} este reprezentat prin punctul C numit afixul numărului complex \underline{c} .

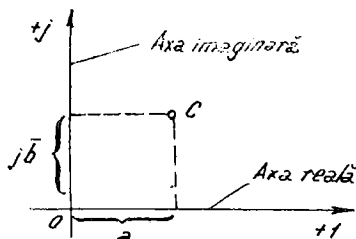


Fig. 5.18. Reprezentarea numărului complex \underline{c} .

Abscisa lui C este partea reală a numărului complex \underline{c} iar ordonata este partea imaginară a numărului complex \underline{c} .

Un număr complex se reprezintă în planul complex și printr-un segment de dreaptă orientat de la origine spre afixul numărului complex. Se numește în acest caz fazor. Pentru numărul complex \underline{c} , s-a reprezentat grafic în fig. 5.19 fazorul \vec{OC} .

Se obișnuiește ca numărul complex \underline{c} , afixul C și fazorul \vec{OC} să se noteze cu \underline{c} .

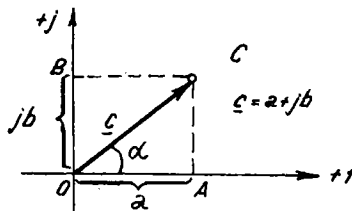


Fig. 5.19. Fazorul \vec{OC} .

Numărul real și pozitiv:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (5.25)$$

se numește modulul numărului complex \underline{c} și se notează cu $|\underline{c}|$.

Argumentul numărului complex este unghiul

$$\alpha = \arctg \frac{b}{a} \quad (5.26)$$

Se notează cu $\arg \{ \underline{c} \}$

Reprezentarea analitică a numărului complex. Numărul complex se reprezintă analitic în două forme: forma trigonometrică și forma exponențială.

Forma trigonometrică. Din triunghiul dreptunghic AQC (fig. 5.19) se scrie:

$$a = r \cos \alpha \quad \text{și} \quad b = r \sin \alpha$$

Înlocuind, numărul complex \underline{c} se scrie sub forma trigonometrică:

$$\underline{c} = r (\cos \alpha + j \sin \alpha) \quad (5.27)$$

Forma exponențială. Se demonstrează următoarea relație:

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha \quad (5.28)$$

Tot prin înlocuire se obține forma exponențială a numărului complex \underline{c} :

$$\underline{c} = r e^{j\alpha} \quad (5.29)$$

Adunarea și scăderea numerelor complexe. Numerele complexe se adună sau se scad, adunând respectiv scăzând părțile reale separat și părțile imaginare separat.

Adunare:

$$\underline{c}_1 + \underline{c}_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) \quad (5.30)$$

Scădere:

$$\underline{c}_1 - \underline{c}_2 = (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2) \quad (5.31)$$

Înmulțirea numerelor complexe. Forma exponențială a numerelor complexe înlesnește efectuarea operației; se înmulțesc modulele și se adună argumentele:

$$\underline{c}_1 \underline{c}_2 = (r_1 e^{j\alpha_1}) (r_2 e^{j\alpha_2}) = r_1 r_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (5.32)$$

Împărțirea numerelor complexe: În cazul împărțirii, se împart modulele și se scad argumentele:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1 e^{j\alpha_1}}{r_2 e^{j\alpha_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} \quad (5.33)$$

Conjugatul numărului complex. Dacă numărul complex este:

$$\underline{c} = a + jb = re^{+j\alpha}$$

atunci conjugatul lui \underline{c} este:

$$\underline{c}^* = a - jb = re^{-j\alpha} \quad (5.34)$$

Se observă că:

$$\underline{c} \underline{c}^* = re^{+j\alpha} re^{-j\alpha} = r^2 = a^2 + b^2 \quad (5.35)$$

Aplicația 1

Se dă numărul complex:

$$\underline{c} = 10 e^{j \frac{\pi}{6}}$$

Să se reprezinte sub formă trigonometrică și să se reprezinte grafic:

$$10 e^{j \frac{\pi}{6}} = 10 \cos \frac{\pi}{6} + j 10 \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Dar: } \cos \frac{\pi}{6} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,86$$

$$\text{și } \sin \frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0,5$$

Deci forma trigonometrică este:

$$10 e^{j \frac{\pi}{6}} = 10 \cos 30^\circ + j 10 \sin 30^\circ = 8,6 + j 5$$

Numărul complex este reprezentat grafic în fig. 5.20.

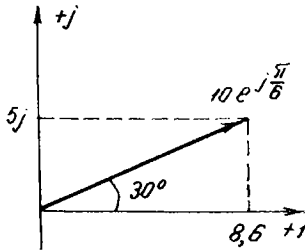


Fig. 5.20.

Aplicația 2

Să se reprezinte în formă exponențială numărul complex și să se reprezinte grafic:

$$\underline{c} = 2 + j2$$

Modulul:

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2,84$$

Argumentul:

$$\alpha = \arctg \frac{2}{2} = 45^\circ = 0,79 \text{ radiani}$$

Forma exponențială va fi:

$$2 + j2 = 2,84 e^{j 45^\circ} = 2,84 e^{j 0,79}$$

Sub formă grafică, numărul complex este reprezentat în fig. 5.21.

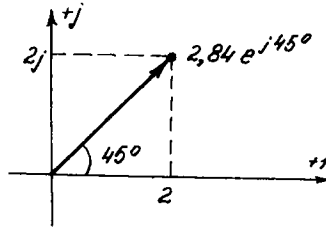


Fig. 5.21.

Aplicația 3

Să se calculeze: $e^{j\frac{\pi}{2}}$, $e^{-j\frac{\pi}{2}}$ și $e^{\pm j\pi}$. Să se reprezinte grafic.

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j$$

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} - j \sin \frac{\pi}{2} = -j$$

$$e^{+j\pi} = \cos \pi + j \sin \pi = -1$$

$$e^{-j\pi} = \cos \pi - j \sin \pi = -1$$

Reprezentările grafice în planul complex sînt indicate în fig. 5.22.

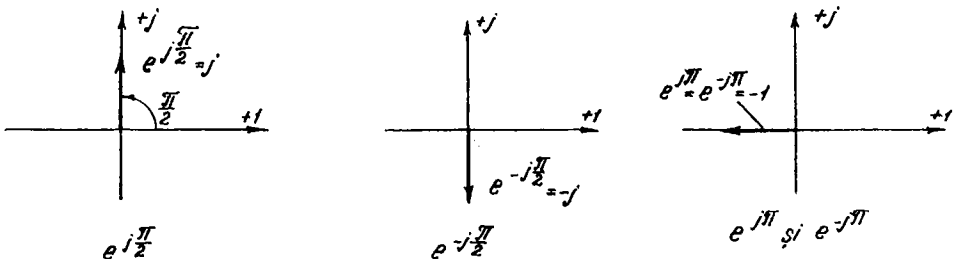


Fig. 5.22.

Aplicația 4

Să se înmulțească numărul complex $\underline{c} = 5j$, cu termenii: $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$; $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ și $-1 = e^{j\pi}$.

\underline{c} sub formă exponențială este:

$$\underline{c} = 5 e^{j\frac{\pi}{2}}$$

a. Înmulțirea cu $e^{j\frac{\pi}{2}}$:

$$\underline{c} e^{j\frac{\pi}{2}} = 5 e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = 5 e^{j\pi}$$

b. Înmulțirea cu $e^{-j\frac{\pi}{2}}$:

$$\underline{c} e^{-j\frac{\pi}{2}} = 5 e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = 5$$

c. Înmulțirea cu $e^{j\pi}$:

$$\underline{c} e^{j\pi} = 5 e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\pi} = 5 e^{j\frac{3\pi}{2}} = 5 e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Reprezentările grafice în planul complex sînt indicate în fig. 5.23.

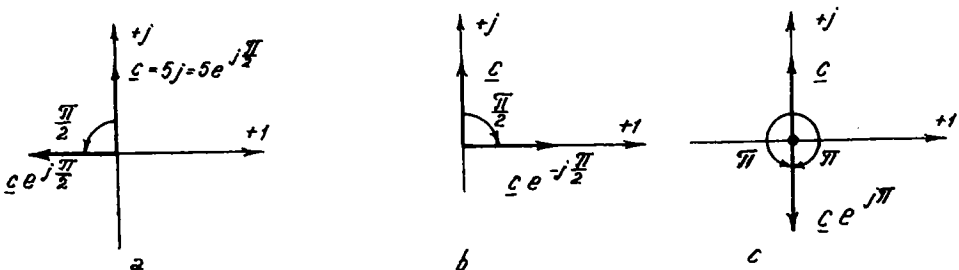


Fig. 5.23.

Se constată că înmulțirea fazorului \underline{c} cu $e^{j\frac{\pi}{2}}$ înseamnă rotirea acestuia cu unghiul $\frac{\pi}{2}$ în sens antiorar (înainte).

Dacă se înmulțește fazorul \underline{c} cu $e^{-j\frac{\pi}{2}}$, rotirea are loc în sens orar cu unghiul $\frac{\pi}{2}$ (înapoi).

Cînd se înmulțește \underline{c} cu $e^{j\pi}$, rotirea se face cu unghiul π pe oricare din cele două sensuri: orar sau antiorar.

Mărimi sinusoidale reprezentate în complex. O mărime sinusoidală este complet determinată cînd se cunoaște: frecvența, valoarea efectivă și faza inițială.

Frecvența este o mărime cunoscută; mai trebuie precizate celelalte două pentru a cunoaște complet mărimea sinusoidală.

Dacă valoarea instantanee a curentului electric i este descrisă de o sinusoidă în timp prin expresia:

$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \varphi),$$

se spune că i este precizat cînd se cunoaște valoarea efectivă I și faza inițială φ .

Dar și un număr complex \underline{c} sub forma exponențială:

$$\underline{c} = r e^{j\alpha}$$

este precizat cînd se cunoaște modulul r și argumentul α .

Dacă o mărime sinusoidală este complet determinată cînd se cunoaște perechea de numere reale: valoarea efectivă și faza inițială, respectiv un număr complex este complet determinat cînd se cunoaște tot o pereche de numere reale: modulul și argumentul, atunci se poate stabili o corespondență între aceste mărimi.

Corespondența trebuie înțeleasă ca o posibilitate de înlocuire a mărimii sinusoidale cu o mărime complexă respectiv a mărimii complexe cu o mărime sinusoidală.

Înlocuirea se numește reprezentarea în complex a mărimilor sinusoidale. Această reprezentare se face sub două forme:

- fazorială (grafică);
- analitică (trigonometrică sau exponențială).

Cum se procedează:

În reprezentarea în complex a mărimii sinusoidale (Ex. curentul electric):

$$i = \sqrt{2} I \sin (\omega t + \vartheta)$$

se asociază numărul complex \underline{I} al cărui modul este egal cu valoarea efectivă și al cărui argument este egal cu faza inițială.

Correspondența se scrie astfel:

$$\begin{array}{ccc} i = \sqrt{2} I \sin (\omega t + \vartheta) & & \\ \downarrow & \swarrow & \nearrow \\ \underline{I} = I e^{j\vartheta} & & \end{array} \quad (5.36)$$

Reprezentat în planul complex, \underline{I} se numește fazor.

Trecerea de la o mărime sinusoidală la mărimea complexă asociată, respectiv de la mărimea complexă la mărimea sinusoidală, se face conform relației (5.36).

Pentru a fi reprezentate în complex, mărimile sinusoidale dintr-un circuit electric trebuie să fie de aceeași frecvență.

Ce avantaj are reprezentarea în complex a mărimilor sinusoidale? Avantajul constă în aceea că operațiile matematice complicate de rezolvare a circuitelor electrice se înlocuiesc cu operații algebrice sau grafice mult mai simple.

Aplicația 1

Să se reprezinte în complex curentul electric:

$$i = 2\sqrt{2} \sin (100\pi t - \frac{\pi}{6}) \quad (A)$$

Reprezentarea în complex:

$$\underline{I} = 2 e^{-j\frac{\pi}{6}} = 2 (\cos \frac{\pi}{6} - j \sin \frac{\pi}{6}) = 2 (\frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2}) = \sqrt{3} - j$$

În fig. 5.24 este reprezentat fazorul \underline{I} .

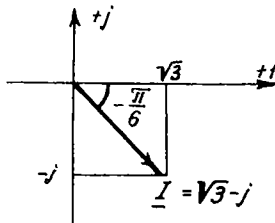


Fig. 5.24.

Aplicația 2

Să se scrie expresia instantanee a curentului electric pentru care reprezentarea în complex este:

$$\underline{I} = 10 (1 + \sqrt{3}j)$$

Sau:

$$\underline{I} = 20 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j \right) = 20 \left(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Sub formă exponențială:

$$\underline{I} = 20 e^{j \frac{\pi}{3}}$$

Expresia curentului în instantaneu:

$$i = 20 \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right)$$

5.3. Elemente ideale de circuit în regim sinusoidal

Circuitele electrice de curent alternativ sînt circuitele în care curenții și tensiunile variază sinusoidal în timp.

Elementele de circuit care intră în compunerea unui circuit electric de curent alternativ sînt: elemente de circuit pasive și elemente de circuit active. Acestea sînt elemente dipolare.

Elementele dipolare pasive sînt: rezistorul, bobina și condensatorul iar elementele de circuit active sînt: sursa de tensiune și sursa de curent.

Se vor prezenta, în continuare, elementele ideale de circuit.

5.3.1. Elemente de circuit pasive

Un element dipolar pasiv, avînd o tensiune u la borne, absoarbe curentul i . Puterea primită pe la borne este:

$$p = u i \quad (5.37)$$

S-a notat cu litere mici, tensiunea, curentul și puterea. Acestea sînt valorile instantanee ale mărimilor electrice respective.

Rezistorul ideal este elementul de circuit dipolar pasiv la bornele căruia, tensiunea este proporțională cu intensitatea curentului care străbate acest element. Energia primită pe la borne se transformă în căldură prin efecte electrolorice.

Ecuția caracteristică a rezistorului este:

$$u_R = R i \quad (5.38)$$

Factorul de proporționalitate (R) este rezistența electrică a rezistorului (fig. 5.25).

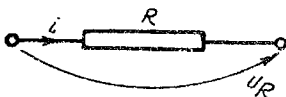


Fig. 5.25. Tensiunea la bornele rezistorului R este proporțională cu curentul i : $u_R = R i$

Tensiunea la borne u_R urmărește instantaneu variația în timp a curentului.

Mărimea u_R se mai numește cădere de tensiune rezistivă.

Dacă prin rezistorul R , circulă curentul sinusoidal:

$$i = I \sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi)$$

tensiunea la borne rezultă:

$$u_R = Ri = RI \sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi) \quad (5.39)$$

Valoarea efectivă a tensiunii este:

$$U_R = RI$$

iar faza inițială este φ , adică tensiunea la bornele rezistorului este înfază cu curentul i .

Reprezentarea în instantaneu a mărimilor electrice va fi:

- Curentul electric:

$$i = I \sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi)$$

- Tensiunea electrică:

$$u_R = U_R \sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi) \quad (5.40)$$

în care:

$$U_R = RI$$

Reprezentarea carteziană. În fig. 5.26 sînt reprezentate: curentul electric i și tensiunea electrică la bornele rezistorului u_R .

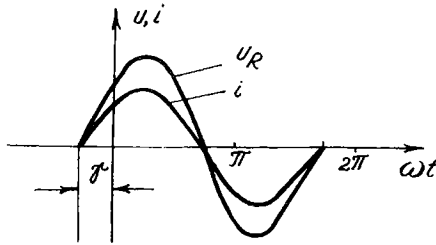


Fig. 5.26. Reprezentarea carteziană a curentului i și a tensiunii u_R la bornele rezistorului R .

Reprezentarea în complex. În complex, curentul electric va fi:

$$\underline{I} = I e^{j\varphi} \quad (5.41)$$

și tensiunea electrică:

$$\underline{U}_R = U_R e^{j\varphi} \quad (5.42)$$

Relația dintre \underline{U}_R și \underline{I} va fi:

$$\underline{U}_R = R \underline{I} \quad (5.43)$$

În fig. 5.27 a, s-a reprezentat rezistorul R și s-au indicat mărimile electrice complexe \underline{U}_R și \underline{I} iar în fig. 5.27 b este reprezentată diagrama fazorială.



Fig. 5.27. a. reprezentarea simbolică în complex a rezistorului R ; b. diagrama fazorială.

Bobina ideală. Este elementul dipolar pasiv de circuit pentru care tensiunea sinusoidală de la borne este defazată cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea curentului sinusoidal care străbate elementul respectiv. Energia primită pe la borne o acumulează sub formă de energie magnetică.

Dacă curentul electric sinusoidal este:

$$i = I\sqrt{2} \sin \omega t$$

tensiunea la bornele bobinei va fi:

$$u_L = U_L \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (5.44)$$

în care valoarea efectivă a tensiunii este

$$U_L = \omega L I \quad (5.45)$$

în care:

L este inductivitatea bobinei,

Mărimea

$$X_L = \omega L \quad (5.46)$$

se numește reactanță inductivă.

Unitatea de măsură în SI este ca pentru rezistența electrică ohmul (Ω).

Simbolul bobinei ideale și mărimile electrice: tensiunea la borne și curentul prin bobină - valori instantanee - s-au reprezentat în fig. 5.28.



Fig. 5.28. Simbolul bobinei L .

Referitor la comportarea bobinei ideale într-un circuit electric, se fac următoarele precizări:

a. Curentul sinusoidal este defazat în urma tensiunii cu un unghi egal cu $\frac{\pi}{2}$ radiani.

b. Valoarea efectivă a curentului electric sinusoidal este egală cu valoarea efectivă a tensiunii sinusoidale împărțită la reactanța inductivă a bobinei.

$$I = \frac{U_L}{\omega L} \text{ sau } I = \frac{U_L}{X_L} \quad (5.47)$$

c. În curent continuu, reactanța inductivă a bobinei este nulă ($X_{L_{cc}} = \omega L = 2\pi fL = 0$ deoarece în curent continuu $f = 0$). Prin urmare, bobina ideală în curent continuu este un scurtcircuit. Bobina reală este caracterizată prin inductivitatea L și prin rezistența electrică R_L . În acest caz, bobina reală se comportă în curent continuu ca un rezistor cu rezistență electrică R_L .

d. În curent alternativ cu frecvență ridicată, bobina ideală întrerupe circuitul.

e. Reactanța inductivă are sens în curent alternativ; valoarea acesteia este determinată de frecvența circuitului electric; inductivitatea nu depinde de regimul de frecvență.

Reprezentarea mărimilor electrice pentru bobina ideală.

Reprezentarea în instantaneu a mărimilor electrice va fi:

- Curentul electric:

$$i = I \sqrt{2} \sin \omega t$$

- Tensiunea electrică

$$u_L = U_L \sqrt{2} \sin (\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (5.48)$$

în care:

Reprezentarea carteziană. Pentru curentul electric sinusoidal care străbate bobina ideală și tensiunea electrică la bornele bobinei, graficul în coordonate carteziene este prezentat în fig. 5.29.

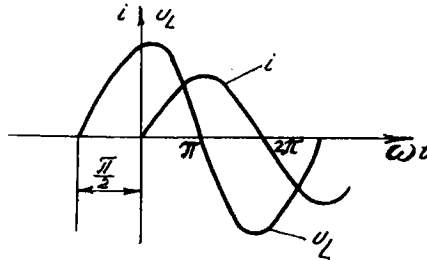


Fig. 5.29. Reprezentarea carteziană a curentului i și a tensiunii u_L la bornele bobinei L .

Reprezentarea în complex. În complex, curentul electric sinusoidal va fi:

$$\underline{I} = I e^{j0^\circ} \text{ sau } \underline{I} = I \quad (5.49)$$

și tensiunea electrică sinusoidală la bornele bobinei va fi:

$$\underline{U}_L = U_L e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Dar:

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

Deci:

$$\underline{U}_L = j U_L = j X_L I = j X_L \underline{I} .$$

Rezultă:

$$\underline{U}_L = j \omega L \underline{I} . \quad (5.50)$$

În fig. 5.30 a s-a reprezentat bobina ideală L și s-au indicat mărimile electrice complexe \underline{U}_L și \underline{I} .

În fig. 5.30 b s-a redat diagrama fazorială pentru mărimile electrice complexe \underline{U}_L și \underline{I} .

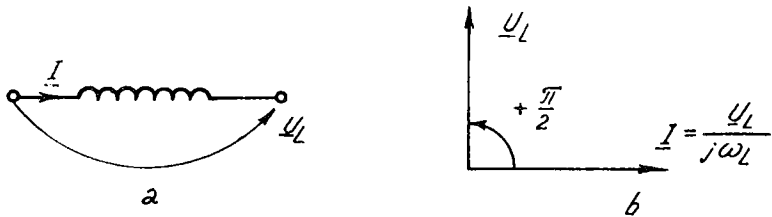


Fig. 5.30. a. reprezentarea simbolică în complex a bobinei L ; b. diagrama fazorială.

Condensatorul ideal. Este elementul dipolar pasiv de circuit pentru care tensiunea sinusoidală de la borne este defazată cu $\frac{\pi}{2}$ în urma curentului sinusoidal absorbit de elementul respectiv. Energia primită pe la borne o acumulează sub formă de energie electrică.

Dacă curentul electric sinusoidal este

$$i = I \sqrt{2} \sin \omega t,$$

tensiunea electrică la bornele condensatorului ideal va fi

$$u_c = U_c \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (5.51)$$

în care valoarea efectivă a tensiunii este

$$U_c = \frac{I}{\omega C} \quad (5.52)$$

în care C este capacitatea condensatorului ideal.

Mărimea

$$X_c = \frac{1}{\omega C} \quad (5.53)$$

se numește reactanță capacitivă.

Unitatea de măsură în S I este ohmul (Ω).

Simbolul condensatorului ideal și mărimile electrice: tensiunea la borne și curentul prin condensator - valori instantanee - s-au reprezentat în fig. 5.31.

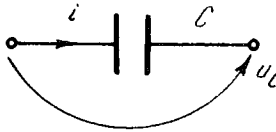


Fig. 5.31. Simbolul condensatorului C.

Referitor la comportarea condensatorului ideal într-un circuit electric, se fac următoarele precizări:

a. Curentul sinusoidal este defazat înaintea tensiunii cu un unghi egal cu $\frac{\pi}{2}$ radiani.

b. Valoarea efectivă a curentului electric sinusoidal este egală cu valoarea efectivă a tensiunii sinusoidale împărțită la reactanța capacitivă a condensatorului:

$$I = \frac{U_c}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U_c}{X_c} \quad (5.54)$$

c. În curent continuu, reactanța capacitivă a condensatorului este infinită ($X_{C_{cc}} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} = \infty$ deoarece în curent continuu $f = 0$). Prin urmare, condensatorul ideal în curent continuu întrerupe circuitul electric.

d. În curent alternativ cu frecvență ridicată, condensatorul ideal scurtecircuitează circuitul electric; la frecvențe joase, reprezintă o întrerupere.

e. Reactanța capacitivă are sens în curent alternativ; valoarea acesteia este determinată de frecvența circuitului; capacitatea nu depinde de regimul de frecvență.

Reprezentarea mărimilor electrice pentru condensatorul ideal.

Reprezentarea în instantaneu a mărimilor electrice va fi:

- Curentul electric

$$i = I\sqrt{2} \sin \omega t .$$

- Tensiunea electrică

$$u_c = U_c \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (5.55)$$

în care

$$U_c = X_c I = \frac{1}{\omega C} I = \frac{1}{2\pi f C} I .$$

Reprezentarea carteziană. Pentru curentul electric sinusoidal absorbit de condensatorul ideal și tensiunea electrică sinusoidală la bornele condensatorului, este prezentat în fig. 5.32 graficul în coordonate carteziene.

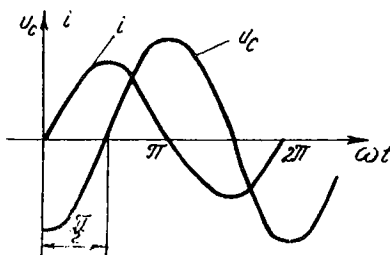


Fig. 5.32. Reprezentarea carteziană a curentului i și a tensiunii u_c la bornele condensatorului C .

Reprezentarea în complex. Curentul electric sinusoidal absorbit de condensatorul ideal se va reprezenta în complex astfel:

$$\underline{I} = I e^{j0^\circ} \text{ sau } \underline{I} = I ; \quad (5.56)$$

tensiunea electrică sinusoidală la bornele condensatorului va fi în complex:

$$\underline{U}_c = U_c e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

dar

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j = \frac{1}{j} .$$

Rezultă

$$\underline{U}_c = -j U_c = \frac{U_c}{j} = \frac{X_c I}{j} = \frac{X_c I}{j} .$$

Deci

$$\underline{U}_c = -j X_c I = \frac{X_c I}{j} = -\frac{j}{\omega C} I = \frac{1}{j \omega C} I . \quad (5.57)$$

În fig. 5.33 a, s-a reprezentat condensatorul ideal C și s-au indicat mărimile electrice complexe \underline{U}_c și \underline{I} .

În fig. 5.33 b, este redată diagrama fazorială pentru mărimile electrice complexe \underline{U}_c și \underline{I} .



Fig. 5.33. a) reprezentarea simbolică în complex a condensatorului C ; b. diagrama fazorială.

Aplicația 1

La bornele unui rezistor electric cu rezistența $R = 1 \text{ k}\Omega$, se aplică o tensiune electrică alternativă:

$$u = 12 \sqrt{2} \sin \left(100\pi t + \frac{\pi}{3} \right)$$

Se cere:

- reprezentarea în instantaneu a curentului electric ;
- valoarea efectivă a curentului electric ;
- reprezentarea carteziană a curentului electric și a tensiunii electrice ;
- reprezentarea în complex și diagrama fazorială a celor două mărimi electrice.

a. Din ecuația caracteristică a rezistorului $u = R i$ se obține:

$$\begin{aligned} i &= \frac{u}{R} = \frac{12}{1 \cdot 10^3} \sqrt{2} \sin \left(100\pi t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ (A)} \\ &= 12 \sqrt{2} \sin \left(100\pi t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ (mA)} \end{aligned}$$

b. Valoarea efectivă a curentului electric:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{12}{1 \cdot 10^3} = 12 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 12 \text{ mA}$$

c. Reprezentarea carteziană a celor două mărimi este redată în fig. 5.34.

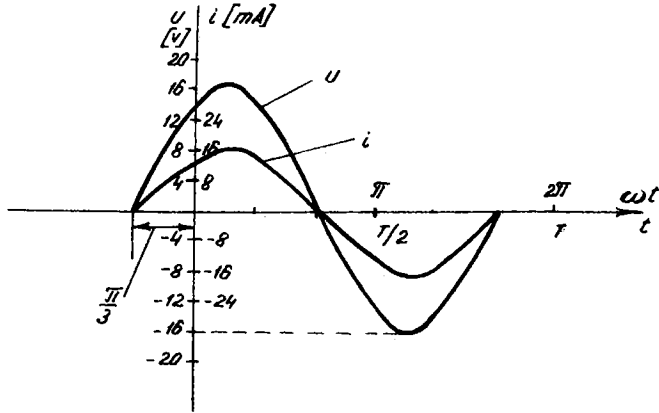


Fig. 5.34.

d. Reprezentarea în complex a mărimilor electrice este:

- curentul electric

$$\underline{I} = I e^{j\vartheta} = 12 \cdot 10^{-3} e^{j\frac{\pi}{3}} \text{ (A)} = 12 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} \text{ (mA)}$$

sau

$$\underline{I} = 12 \left(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right) = 12 \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 6 (1 + j\sqrt{3}) \text{ (mA)};$$

- tensiunea electrică

$$\underline{U} = U e^{j\alpha} = U e^{j\vartheta} \text{ deoarece } \alpha = \vartheta$$

sau

$$\underline{U} = 12 e^{j\frac{\pi}{3}} = 12 \left(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right) = 12 \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right);$$

deci,

$$\underline{U} = 6 (1 + j\sqrt{3}) \text{ V .}$$

Diagrama fazorială este prezentată în fig. 5.35. cu următoarea

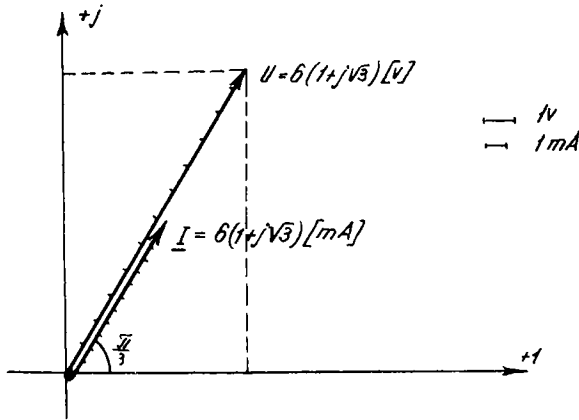


Fig. 5.35.

precizare:

Numerele complexe neavând unitate de măsură se convine ca reprezentarea în complex să fie astfel încât modulul să reprezinte valoarea efectivă a mărimii exprimată în unități SI corespunzătoare.

Aplicația 2

La bornele unei bobine electrice cu inductivitate $L = 19 \text{ mH}$ se aplică o tensiune electrică alternativă:

$$u = 12\sqrt{2} \sin(100\pi t + \frac{\pi}{3}).$$

Se cere:

- Valoarea reactanței inductive;
- Valoarea efectivă a curentului electric;
- Reprezentarea în instantaneu a curentului electric;
- Reprezentarea carteziană a curentului electric și a tensiunii electrice;

trice;

e. Reprezentarea în complex și diagrama fazorială a celor două mărimi electrice.

a. Valoarea reactanței inductive se determină din:

$$X_L = \omega L = 2\pi fL = 2\pi \cdot 50 \cdot 19 \cdot 10^{-3} = 6 \Omega,$$

b. Valoarea efectivă a curentului electric se calculează cu relația:

$$I = \frac{U_L}{X_L} = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}$$

c. Reprezentarea în instanțaneu a curentului electric.

Curentul electric este defazat cu $\frac{\pi}{2}$ în urma tensiunii electrice sinusoidale (sau: tensiunea electrică este defazată cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea curentului electric). Rezultă:

$$i = I\sqrt{2} \sin \left[(100\pi t + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{2} \right] \text{ sau}$$

$$i = 2\sqrt{2} \sin (100\pi t - \frac{\pi}{6}) \text{ (A)}.$$

d. Reprezentările carteziene a celor două mărimi electrice: tensiunea și curentul sînt redată în fig. 5.36.

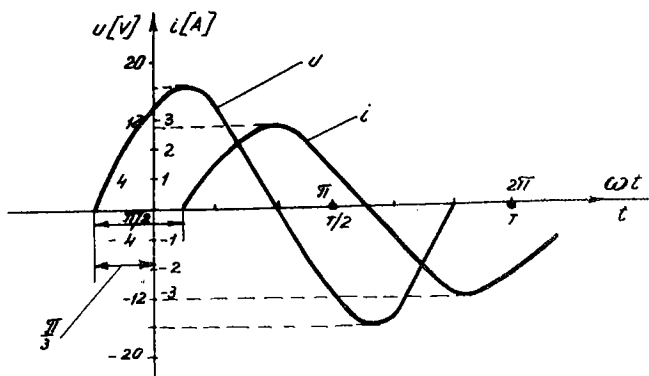


Fig. 5.36.

e. Reprezentarea în complex și diagrama fazorială a celor două mărimi electrice: tensiunea și curentul.

- Curentul electric:

$$\begin{aligned}\underline{I} &= I e^{j\theta} = 2 e^{-j\frac{\pi}{6}} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} - j \sin \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right) = (\sqrt{3} - j) \quad (\text{A})\end{aligned}$$

- Tensiunea electrică:

$$\begin{aligned}\underline{U} &= U e^{j\beta} = 12 e^{j\frac{\pi}{3}} = 12 \left(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= 12 \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 6 (1 + j\sqrt{3}) \quad (\text{V})\end{aligned}$$

Diagrama fazorială este reprezentată în fig. 5.37.

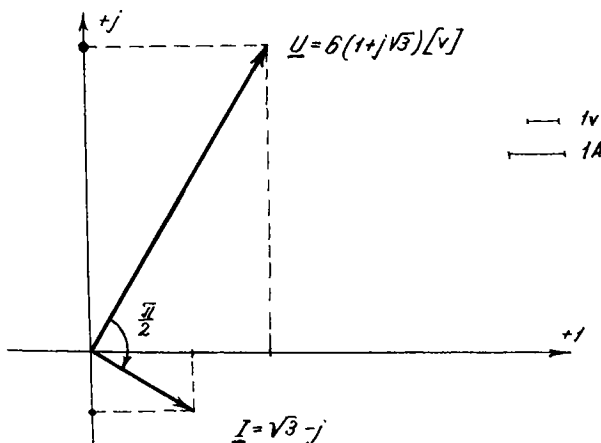


Fig. 5.37.

Aplicația 3

La bornele unui condensator electric cu capacitatea $C = 0,64 \text{ mF}$ se aplică o tensiune electrică alternativă:

$$u = 12 \sqrt{2} \sin (100\pi t + \frac{\pi}{3}) \quad (\text{V})$$

Se cere:

- Valoarea reactanței capacitive ;
- Valoarea efectivă a curentului electric ;
- Reprezentarea în instantaneu a curentului electric ;
- Reprezentarea carteziană a curentului electric și a tensiunii electrice ;
- Reprezentarea în complex și diagrama fazorială a celor două mărimi electrice.

a. Valoarea reactanței capacitive se determină din:

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2.50.3,14.0,64.10^{-3}} = \frac{10^3}{200} = 5 \Omega$$

b. Valoarea efectivă a curentului electric:

$$I = \frac{U_c}{X_c} = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ A}$$

c. Reprezentarea în instantaneu a curentului electric.

Curentul electric este defazat cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea tensiunii electrice sinusoidale (tensiunea electrică este defazată cu $\frac{\pi}{2}$ în urma curentului electric).

Rezultă:

$$i = I\sqrt{2} \sin \left[\left(100\pi t + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{2} \right] = 2,4\sqrt{2} \sin \left(100\pi t + \frac{5\pi}{6} \right) \text{ (A)}$$

d. Reprezentările carteziene a celor două mărimi electrice, tensiunea și curentul, sînt redată în fig. 5.38.

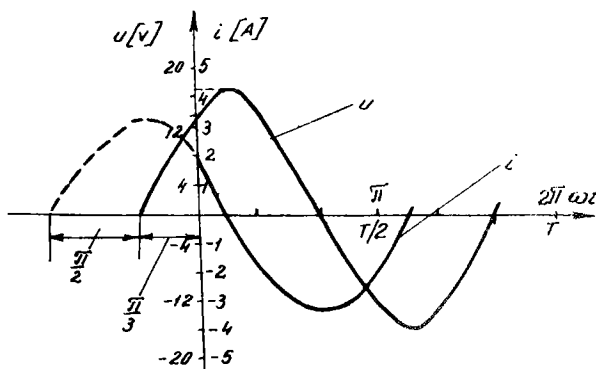


Fig. 5.38.

e. Reprezentarea în complex și diagrama fazorială a celor două mărimi electrice.

- Curentul electric:

$$\begin{aligned}\underline{I} &= I e^{j\varphi} = 2,4 e^{j\frac{5\pi}{6}} = 2,4 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + j \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 2,4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right) = \\ &= 1,2 (-\sqrt{3} + j) \quad (\text{A})\end{aligned}$$

- Tensiunea electrică:

$$\underline{U} = 6 (1 + j\sqrt{3}) \quad (\text{V})$$

Diagrama fazorială este reprezentată în fig. 5.39.

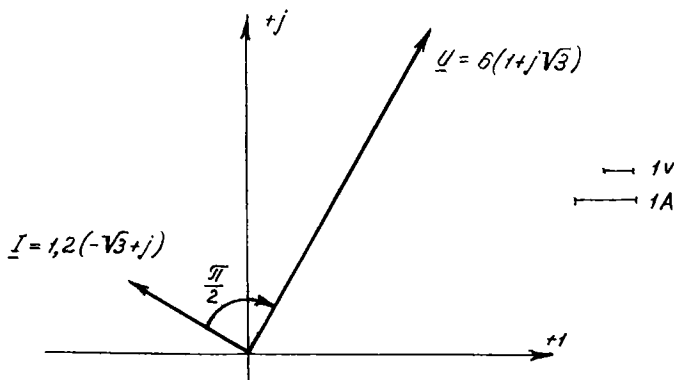


Fig. 5.39.

5.3.2. Elemente de circuit active

Sursa ideală de tensiune. Este elementul de circuit dipolar activ care este caracterizat printr-o tensiune la borne independentă de circuitul în care este conectat. Curentul debitat de sursă este determinat de circuit.

Tensiunea la bornele sursei ideale este $u = e$ în care e reprezintă tensiunea electromotoare a sursei (fig. 5.40).

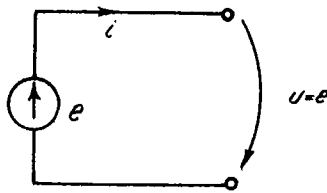


Fig. 5.40. Simbolul sursei ideale de tensiune.

Puterea instantanee furnizată de sursă pe la borne spre exterior este:

$$p = ui = e i \quad (5.58)$$

Sursa ideală de curent. Este elementul de circuit dipolar activ care este caracterizat printr-un curent debitat, independent de circuitul în care este conectat.

Tensiunea la bornele sursei de curent este determinată de circuitul electric.

Curentul electric debitat pe la bornele sursei ideale de curent este $i = i_g$ în care i_g reprezintă curentul electric al sursei (fig. 5.41).

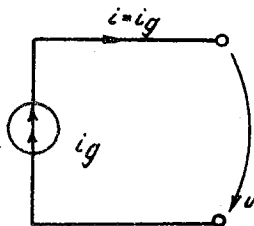


Fig. 5.41. Simbolul sursei ideale de curent.

Puterea instantanee furnizată de sursă pe la borne este:

$$p = u i = u i_g \quad (5.59)$$

În tehnică, apar surse sau generatoare reale. În scheme electrice, acestea se pot reprezenta numai prin elemente ideale în care pot apare de exemplu: o sursă ideală de tensiune legată în serie cu un rezistor ideal și o bobină ideală.

5.4. Circuite simple în regim sinusoidal

5.4.1. Impedanța. Admitanța

Elementele ideale de circuit se pot lega în diferite moduri. Un dipol, care este o porțiune de circuit între două borne de acces, poate fi de exemplu un rezistor ideal, o bobină ideală, un condensator ideal, o conexiune serie sau paralel a acestora.

Dacă la bornele de acces ale dipolului se aplică o tensiune alternativă sinusoidală

$$u = U\sqrt{2} \sin (\omega t + \beta)$$

prin circuit va apare un curent sinusoidal:

$$i = I\sqrt{2} \sin (\omega t + \beta')$$

Raportul pozitiv dintre valoarea efectivă a tensiunii de la bornele dipolului și valoarea efectivă a curentului electric care pătrunde prin bornele dipolului, se numește impedanța dipolului sau a circuitului:

$$Z = \frac{U}{I} \quad (5.60)$$

Unitatea de măsură pentru impedanță este ohmul (Ω).

Admitanța circuitului este valoare inversă a impedanței:

$$Y = \frac{1}{Z} \quad (5.61)$$

Unitatea de măsură pentru admitanță este siemens-ul (S).

Defazajul în cazul dipolului reprezintă diferența dintre fazele inițiale ale tensiunii și curentului adică:

$$\varphi = (\omega t + \beta) - (\omega t + \theta) = \beta - \theta \quad (5.62)$$

Defazajul poate fi pozitiv, negativ sau nul.

Unitatea de măsură este radianul (rad).

Defazajul este cuprins între limitele:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{2} \quad (5.63)$$

Distingem următoarele cazuri:

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ dipolul este compus dintr-un condensator ideal;

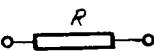

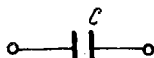
$\varphi = +\frac{\pi}{2}$ dipolul este compus dintr-o bobină ideală;

$\varphi = 0$ dipolul este compus dintr-un rezistor ideal;

$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ dipolul este compus din rezistor ideal, bobină ideală, condensator ideal, legate în serie sau paralel.

Impedanța Z și defazajul φ caracterizează complet un circuit dipolar pasiv.

În cazul elementelor de circuit dipolare ideale și pasive: rezistor, bobină și condensator, rezultă, în baza definițiilor stabilite, următoarele valori pentru impedanța Z , admitanța Y și defazajul φ :

Elementul de circuit dipolar	Impedanța $Z =$	Admitanța $Y =$	Defazajul $\varphi =$
	R	$\frac{1}{R}$	0
	ωL	$\frac{1}{\omega L}$	$+\frac{\pi}{2}$
	$\frac{1}{\omega C}$	ωC	$-\frac{\pi}{2}$

Aplicația 1

Intr-un circuit electric, curentul electric are expresia instantanee:

$$i = 2\sqrt{2} \sin \omega t \quad (\text{A})$$

Impedanța circuitului este $Z = 100 \, \Omega$ iar defazajul este $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

Să se determine tensiunea aplicată la bornele circuitului.

Valoarea efectivă a tensiunii este:

$$U = Z I = 100 \cdot 2 = 200 \, \text{V}$$

Faza inițială a tensiunii este:

$$\beta = \varphi + \theta = -\frac{\pi}{3} + 0 = -\frac{\pi}{3}$$

Prin urmare, tensiunea electrică sinusoidală va fi:

$$u = 200\sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right)$$

Curentul este defazat înaintea tensiunii cu $\frac{\pi}{3}$ radiani.

5.5. Circuite serie și paralel

În aplicațiile tehnice nu se întâlnesc elemente dipolare de circuit ideale. Elementele pasive: rezistor, bobină, condensator sînt echivalate cu elemente **pasive ideale conectate în serie sau paralel**. De exemplu, bobina reală se echivalează cu două elemente ideale legate în serie: un rezistor ideal de rezistență R și o bobină ideală de inductivitate L . Asemănător, se obțin circuite simple RC sau RLC ale căror elemente ideale sînt legate în serie sau în paralel.

Se vor analiza în continuare, circuitele electrice (mai importante) cu elemente legate în serie sau paralel.

5.5.1. Circuitul RL serie

Se consideră circuitul electric serie compus din rezistor ideal de rezistență R și bobina ideală de inductivitate L (fig. 5.42), parcurs de curentul:

$$i = I \sqrt{2} \sin \omega t$$

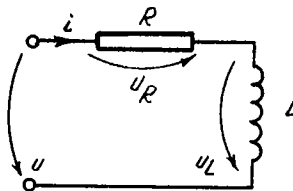


Fig. 5.42. Circuitul RL serie.

Tensiunea la borne u este suma căderilor de tensiune pe cele două elemente:

$$u = u_R + u_L \quad (5.64)$$

- Conform celor stabilite în paragrafele anterioare ,
- căderea de tensiune pe elementul R este

$$u_R = R i = R I \sqrt{2} \sin \omega t$$

și tensiunea la bornele bobinei L este

$$u_L = X_L I \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) .$$

Folosind reprezentarea în complex, relația (5.64) devine:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L \quad (5.65)$$

în care $\underline{U}_R = R \underline{I}$ și $\underline{U}_L = j X_L \underline{I}$ conform (5.43) și (5.50).

Reprezentarea fazorială a mărimilor complexe \underline{U} , \underline{U}_R și \underline{U}_L este redată în fig. 5.43 și realizată astfel:

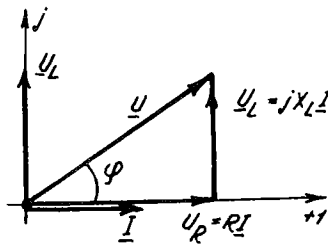


Fig. 5.43. Reprezentarea fazorială a mărimilor complexe \underline{U} , \underline{U}_R și \underline{U}_L .

- curentul \underline{I} se reprezintă printr-un fazor orientat după direcția axei reale +1 deoarece defazajul $\gamma^v = 0$;

- fazorul \underline{U}_R are modulul $U_R = R I$ și defazajul față de curent egal cu zero; deci se prezintă printr-un fazor coliniar cu fazorul \underline{I} și de modu-

$$U_R = R I ;$$

- fazorul tensiunii \underline{U}_L se obține prin rotirea fazorului curentului cu $\frac{\pi}{2}$ în sens antiorar (direct) și prin amplificarea modului curentului I cu reactanța inductivă $X_L = \omega L$; rezultă modulul acestui fazor

$$U_L = X_L I = \omega L I$$

defazat înaintea curentului cu $\frac{\pi}{2}$.

Pentru a se determina fazorul tensiunii la borne \underline{U} , se adună vectorial fazorul \underline{U}_R cu fazorul \underline{U}_L astfel:

- din vârful fazorului \underline{U}_R se trasează fazorul \underline{U}_L ; prin unirea originii 0 cu vârful fazorului \underline{U}_L , se obține fazorul tensiunii la borne \underline{U} .

Din triunghiul dreptunghic format se scrie:

$$U^2 = I^2 (R^2 + X_L^2) \quad (5.66)$$

sau

$$U = \sqrt{R^2 + X_L^2} \cdot I = Z I$$

Mărimea:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (5.67)$$

se numește impedanța circuitului RL.

Defazajul se determină din același triunghi;

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L I}{R I} = \frac{X_L}{R} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{X_L}{R};$$

$$\sin \varphi = \frac{X_L I}{Z I} = \frac{X_L}{Z} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arc} \sin \frac{X_L}{Z}; \quad (5.68)$$

$$\cos \varphi = \frac{R I}{Z I} = \frac{R}{Z} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arc} \cos \frac{R}{Z};$$

unghiul φ este pozitiv și are valori cuprinse între 0 și $+\frac{\pi}{2}$.

Curentul este defazat în urma tensiunii cu unghiul φ și are valoarea efectivă:

$$I = \frac{U}{Z} \quad (5.69)$$

Expresia instantanee a curentului este:

$$i = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi) \quad (5.70)$$

în care

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R} \quad (5.71)$$

Triunghiul tensiunilor. Valorile efective ale tensiunilor U_R și U_L se pot determina din diagrama fazorială:

$$U_R = R I = U \cos \varphi \quad (5.72)$$

$$U_L = \omega L I = U \sin \varphi$$

Din aceste relații, se construiește triunghiul tensiunilor (fig. 5.44) avînd laturile egale cu valorile efective ale tensiunilor U , U_R și U_L .

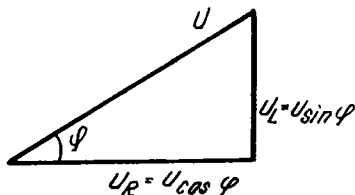


Fig. 5.44. Triunghiul tensiunilor.

Triunghiul impedanțelor. Tot din diagrama fazorială se scrie:

$$R = \frac{U_R}{I} = \frac{U}{I} \cos \varphi = Z \cos \varphi; X = \omega L = \frac{U_L}{I} = \frac{U}{I} \sin \varphi = Z \sin \varphi \quad (5.73)$$

Cu ajutorul acestor relații, se construiește triunghiul impedanțelor (fig. 5.45) în care laturile sînt: Z , R și X_L .

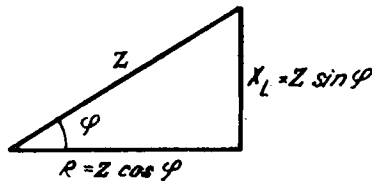


Fig. 5.45. Triunghiul impedanțelor.

Impedanța complexă. În relația:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L \text{ se înlocuiește}$$

$$\underline{U}_R = R \underline{I} \text{ și } \underline{U}_L = j \omega L \underline{I};$$

se obține

$$\underline{U} = (R + j \omega L) \underline{I} = \underline{Z} \underline{I}$$

sau

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z} = R + j \omega L. \quad (5.74)$$

care reprezintă impedanța complexă.

Reprezentată în planul complex (fig. 5.46), se obține expresia impedanței complexe

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi} = Z (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (5.75)$$

sau

$$\underline{Z} = R + j \omega L \quad \text{conform (5.74).}$$

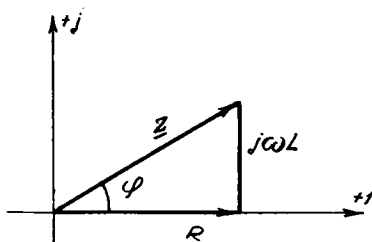


Fig. 5.46. Impedanța \underline{Z} în planul complex.

5.5.2. Circuitul RC serie

Se consideră circuitul electric serie compus din rezistorul ideal de rezistență R și condensatorul ideal de capacitate C (fig. 5.47). Prin circuit se stabilește curentul:

$$i = I\sqrt{2} \sin \omega t.$$

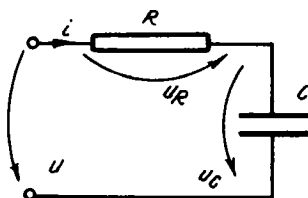


Fig. 5.47. Circuit RC serie.

Tensiunea la borne u este suma căderilor de tensiune pe cele două elemente:

$$u = u_R + u_C. \quad (5.76)$$

Dar căderea de tensiune pe elementul R este

$$u_R = R i = R I \sqrt{2} \sin \omega t$$

și tensiunea la bornele condensatorului C

$$u_C = X_C I \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

În complex, relația (5.76) devine

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C \quad (5.77)$$

în care

$$\underline{U}_R = R \underline{I} \quad \text{și} \quad \underline{U}_C = -j X_C \underline{I} = -\frac{j}{\omega C} \underline{I}$$

conform relației (5.43) și (5.57).

Reprezentarea fazorială a mărimilor complexe \underline{U} , \underline{U}_R și \underline{U}_C este redată în fig. 5.48. Diagrama fazorială s-a construit asemănător construcției din paragraful precedent.

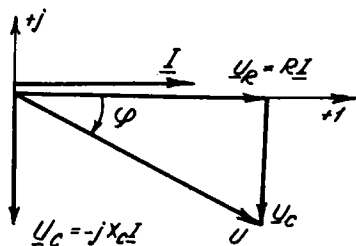


Fig. 5.48. Reprezentarea fazorială a mărimilor complexe \underline{U} , \underline{U}_R și \underline{U}_C .

Din triunghiul dreptunghic format, se scrie:

$$U^2 = I^2 \left[R^2 + (-X_C)^2 \right] \quad (5.78)$$

sau

$$U = \sqrt{R^2 + X_C^2} I = ZI$$

Mărimea

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \quad (5.79)$$

reprezintă impedanța circuitului RC.

Defazajul se determină din același triunghi:

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{U_C}{U_R} = - \frac{1}{\omega CR} ; \quad \varphi = - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\omega CR} \quad (5.80)$$

unghiul φ este negativ și are valori cuprinse între $-\frac{\pi}{2}$ și zero.

Triunghiul tensiunilor este redat în fig. 5.49 avînd ca laturi tensiunile: U , U_R și U_C .

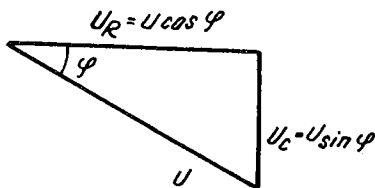


Fig. 5.49. Triunghiul tensiunilor.

Triunghiul impedanțelor este redat în fig. 5.50 în care laturile sînt: Z , R și X_C .

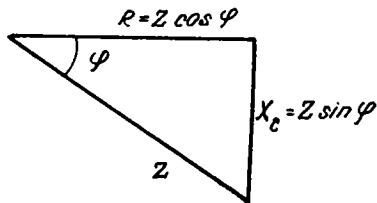


Fig. 5.50. Triunghiul impedanțelor.

Impedanța complexă. În relația

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C$$

se înlocuiește

$$\underline{U}_R = R \underline{I} \text{ și } \underline{U}_C = - \frac{j}{\omega C} \underline{I} ;$$

se obține:

$$\underline{U} = (R - \frac{j}{\omega C}) \underline{I} = \underline{Z} \underline{I}$$

sau

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z} = R - \frac{j}{\omega C} = R + \frac{j}{\omega C} \quad (5.81)$$

care reprezintă impedanța complexă a circuitului RC.

Reprezentată în planul complex (fig. 5.51), se obține expresia impedanței complexe

$$\underline{Z} = Z e^{-j\varphi} = Z (\cos \varphi - j \sin \varphi) \quad (5.82)$$

sau

$$\underline{Z} = R - \frac{j}{\omega C} = R + \frac{j}{\omega C}$$

conform relației (5.81).

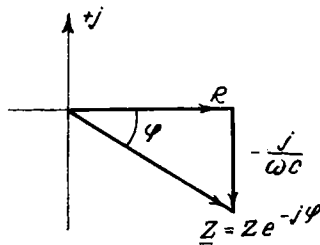


Fig. 5.51. Impedanța \underline{Z} în planul complex.

5.5.3. Circuitul RLC serie.

Elementele pasive ideale sînt legate în serie: rezistorul R, bobina L și condensatorul C (fig. 5.52).

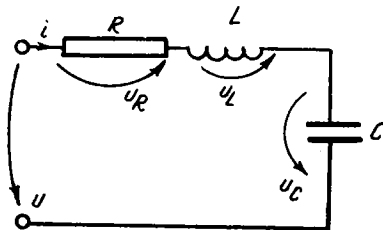


Fig. 5.52. Circuitul RLC serie.

Prin circuit se stabilește curentul:

$$i = I \sqrt{2} \sin \omega t$$

Tensiunea de la bornele circuitului este

$$u = U \sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi)$$

respectiv

$$u = u_R + u_L + u_C \quad (5.83)$$

în care:

$$u_R = R I \sqrt{2} \sin \omega t,$$

$$u_L = X_L I \sqrt{2} \sin (\omega t + \frac{\pi}{2}),$$

$$u_C = X_C I \sqrt{2} \sin (\omega t - \frac{\pi}{2})$$

reprezintă tensiunile repartizate pe cele trei elemente R , L și C .

În complex, relația (5.83) devine

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C \quad (5.84)$$

în care:

$$\underline{U}_R = R \underline{I} ; \underline{U}_L = j \cdot X_L \underline{I} = j \omega L \underline{I} ;$$

$$\underline{U}_C = - j X_C \underline{I} = - \frac{j}{\omega C} \underline{I} ;$$

conform relațiilor (5.43), (5.50) și (5.57).

Reprezentarea fazorială a mărimilor complexe \underline{U} , \underline{U}_R , \underline{U}_L și \underline{U}_C este redată în fig. 5.53. Din triunghiul dreptunghic format se scrie:

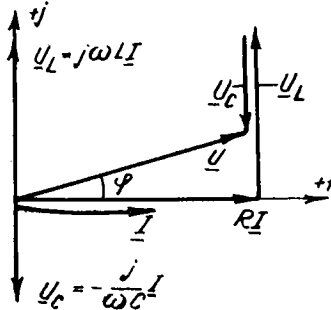


Fig. 5.53. Reprezentarea fazorială a mărimilor complexe \underline{U} , \underline{U}_R , \underline{U}_L și \underline{U}_C .

$$U^2 = I^2 \left[R^2 + (X_L - X_C)^2 \right] \text{ sau } U = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} I = ZI \quad (5.85)$$

în care mărimea

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (5.86)$$

se numește impedanța circuitului RLC.

Defazajul rezultă tot din triunghiul dreptunghic;

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(X_L - X_C) I}{R I} = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{X_L - X_C}{R} \quad (5.87)$$

sau

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R};$$

unghiul φ are valori cuprinse între $-\frac{\pi}{2}$ și $+\frac{\pi}{2}$.

Curentul este defazat în urma tensiunii ($0 < \varphi < +\frac{\pi}{2}$; circuit inductiv), înaintea tensiunii ($0 < \varphi < -\frac{\pi}{2}$; circuit capacitiv) sau în fază cu tensiunea ($\varphi = 0$; circuit rezonant).

Valoarea efectivă a curentului este

$$I = \frac{U}{Z} .$$

Expresia instantanee a curentului este

$$i = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \sqrt{2} \sin(\omega t \pm \varphi) \quad (5.88)$$

în care

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} . \quad (5.89)$$

Impedanța complexă. Relația (5.83) scrisă în complex devine

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C \quad (5.90)$$

în care

$$\underline{U}_R = R \underline{I}; \underline{U}_L = j X_L \underline{I} = j \omega L \underline{I} \text{ și}$$

$$\underline{U}_C = -j X_C \underline{I} = -\frac{j}{\omega C} \underline{I} = \frac{1}{j \omega C} \underline{I}$$

conform relațiilor (5.44), (5.50) și (5.57).

Se obține

$$\underline{U} = \left[R + j (X_L - X_C) \right] \underline{I} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \underline{I} . \quad (5.91)$$

Mărimea

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + j (X_L - X_C) = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (5.92)$$

reprezintă impedanța complexă a circuitului RLC serie care se pune și sub forma

$$\underline{Z} = Z e^{-j\varphi} = Z (\cos \varphi - j \sin \varphi) \quad (5.93)$$

sau

$$\underline{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right),$$

conform (5.92).

5.54. Circuitul RLC paralel

În acest caz, elementele pasive ideale: rezistorul R, bobina L și condensatorul C sînt legate în paralel (fig. 5.54).

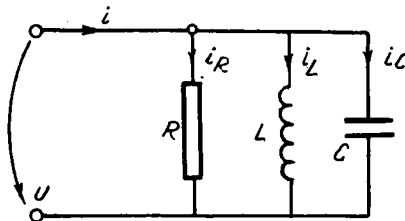


Fig. 5.54. Circuitul RLC paralel.

Curentul care intră pe la bornele circuitului RLC paralel este o sumă a curenților din elementele ideale de circuit:

$$i = i_R + i_L + i_C \quad (5.94)$$

Tensiunea de la bornele circuitului se aplică pe fiecare element de circuit în parte.

Dacă această tensiune este

$$u = U\sqrt{2} \sin \omega t,$$

curenții prin elementele R, L, C vor fi:

$$i_R = \frac{U}{R} \sqrt{2} \sin \omega t,$$

$$i_L = \frac{U}{X_L} \sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{U}{\omega L} \sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

și

$$i_C = \frac{U}{X_C} \sqrt{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \omega C U \sqrt{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

Curentul total va fi:

$$i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi).$$

În complex, relația (5.94) se scrie

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C \quad (5.95)$$

în care:

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}}{R} \quad ; \quad \underline{I}_L = \frac{\underline{U}}{j X_L} = \frac{\underline{U}}{j \omega L}$$

și

$$\underline{I}_C = -\frac{\underline{U}}{j X_C} = -\frac{\underline{U}}{\frac{j}{\omega C}} = j \omega C \underline{U}.$$

Reprezentarea fazorială a mărimilor complexe: \underline{I} , \underline{I}_R , \underline{I}_L și \underline{I}_C este redată în fig. 5.55.

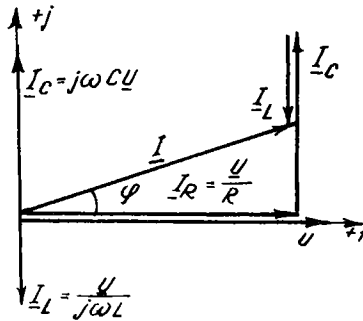


Fig. 5.55. Reprezentarea fazorială a mărimilor complexe: \underline{I} , \underline{I}_R , \underline{I}_L și \underline{I}_C .

Din triunghiul dreptunghic format se scrie:

$$I^2 = U^2 \left[\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2 \right] \quad (5.96)$$

sau

$$I = U \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2} = \frac{U}{Z}$$

în care mărimea

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2}} \quad (5.97)$$

este impedanța circuitului RLC paralel.

Rezultă și admitanța acestui circuit:

$$Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2} \quad (5.98)$$

Defazajul se deduce din

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{\frac{1}{R}} = \frac{R}{\omega L} - \omega CR$$

și defazajul este:

$$\varphi = \arctg \left(\frac{R}{\omega L} - \omega CR \right). \quad (5.99)$$

Impedanța complexă a circuitului RLC paralel.

Din

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C$$

se obține prin următoarele înlocuiri: $\underline{I}_R = \frac{\underline{U}}{R}$; $\underline{I}_L = \frac{\underline{U}}{jX_L}$ și $\underline{I}_C = -\frac{\underline{U}}{jX_C}$,

expresia:

$$\underline{I} = \underline{U} \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} - \frac{1}{jX_C} \right] = \underline{U} \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{j} \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \right]$$

Iar impedanța complexă rezultă:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j} \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)}. \quad (5.100)$$

Admitanța complexă este:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j} \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right). \quad (5.101)$$

5.6. Rezonanța în circuite electrice de curent alternativ sinusoidal

Fenomenul de rezonanță electrică se constată în circuitele electrice cu elemente de circuit inductive (bobine) și elemente de circuit capacitive (condensatoare) alimentate cu tensiuni electrice alternative.

Condiția de rezonanță este îndeplinită când

$$X_L = X_C$$

în care:

X_C - reactanța capacitivă ;

X_L - reactanța inductivă.

Egalitatea este îndeplinită pentru o anumită frecvență f_0 denumită frecvență de rezonanță.

După felul în care sînt legate elementele de circuit, rezonanța poate fi:

- rezonanța serie (tensiunilor);
- rezonanța paralel (curenților).

Se vor studia pe rînd aceste două rezonanțe electrice.

5.6.1. Rezonanța serie

Pentru circuitul electric de curent alternativ sinusoidal (fig. 5.56) s-au stabilit în paragraful 5.53. următoarele:

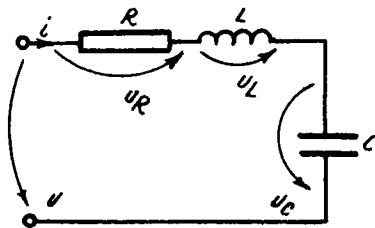


Fig. 5.56. Circuit electric cu rezonanță serie.

- tensiunea electrică

$$u = U\sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi) ;$$

- curentul electric

$$i = I \sqrt{2} \sin \omega t ;$$

- impedanța

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} ;$$

și defazajul

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} .$$

Intre valorile efective ale tensiunii U și curentului I există următoarea relație:

$$U = Z I .$$

Valorile efective ale tensiunilor de pe cele trei elemente R , L și C sînt:

$$U_R = R I ; U_L = \omega L I \text{ și } U_C = \frac{I}{\omega C}$$

iar pulsația este

$$\omega = 2\pi f .$$

La rezonanță se realizează condiția:

$$X_L = X_C$$

sau

$$2\pi f_o L = \frac{1}{2\pi f_o C}$$

în care s-a notat cu f_0 frecvența de rezonanță și care este

$$f_0 = \frac{1}{2 \pi \sqrt{LC}} \quad (5.102)$$

Relația este cunoscută subnumele de "formula lui Thomson".

Din formula lui Thomson se constată că fenomenul de rezonanță apare într-un circuit electric de curent alternativ atunci când:

- circuitul electric este alimentat cu o tensiune sinusoidală de frecvență f_0 , inductivitatea L și capacitatea C fiind date;
- inductivitatea L și capacitatea C sînt modificate pînă se obține frecvența de rezonanță f_0 .

Defazajul dintre tensiune și curent devine egal cu zero:

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \arctg 0 = 0^\circ \quad (5.103)$$

Impedanța circuitului va fi:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = R \quad (5.104)$$

adică circuitul se comportă rezistiv.

Rezultă că la rezonanță, tensiunea și curentul sînt în fază ($\varphi = 0$):

$$u = U \sqrt{2} \sin \omega t, \quad (5.105)$$

$$i = \frac{U}{R} \sqrt{2} \sin \omega t$$

și curentul crește la rezonanță pentru că impedanța se micșorează, devenind egală cu rezistența circuitului.

Dacă rezistența este mică, se obțin valori foarte ridicate pentru curentul electric.

Diagrama fazorială este reprezentată în fig. 5.57.

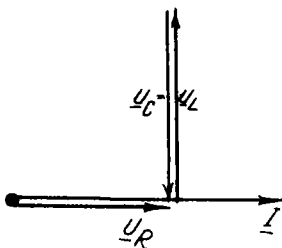


Fig. 5.57. Diagrama fazorială la rezonanța serie.

Se observă că tensiunile de pe inductivitate și condensator devin egale și au valori foarte mari, practic necontrolate:

$$U_L = U_C .$$

În aplicațiile tehnice, aceste tensiuni devin periculoase pentru izolația bobinei sau pentru dielectricul condensatorului (apare fenomenul de străpungere electrică).

Pentru caracterizarea unui circuit rezonant s-au introdus următoarele mărimi:

Impedanța caracteristică reprezintă valoarea reactanței inductive respectiv a reactanței capacitive la rezonanță:

$$Z_c = 2\pi f_o L = \frac{1}{2\pi f_o C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5.106)$$

Factorul de calitate este raportul dintre impedanța caracteristică și rezistența electrică a circuitului.

Se notează:

$$Q = \frac{Z_c}{R} = \frac{2\pi f_o L}{R} = \frac{1}{2\pi f_o CR} \quad (5.107)$$

Acesta este cu atât mai mare cu cât rezistența circuitului este mai mică față de impedanța caracteristică.

În circuitele rezonante folosite în radiotehnică, factorul de calitate atinge valori mari, de ordinul sutelor. Din acest motiv, circuitele cu rezonanță de tensiune pot fi utilizate la amplificarea unor tensiuni slabe.

Factorul de amortizare este valoarea inversă a factorului de calitate:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{Z_c} \quad (5.108)$$

Caracteristica de frecvență reprezintă dependența dintre impedanța circuitului rezonant și frecvență (fig. 5.58).

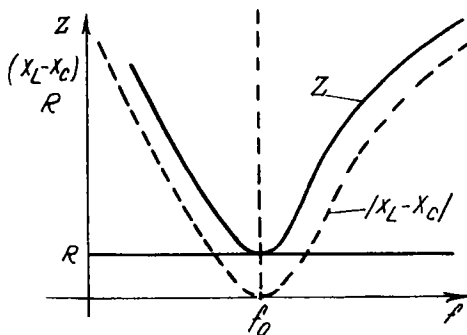


Fig. 5.58. Caracteristica de frecvență la rezonanța serie.

Se disting următoarele:

a. $f < f_0$. Când frecvența tinde către zero, termenul

$$X_L = 2\pi fL$$

tinde către zero, dar

devine foarte mare. La frecvența $f = 0$, impedanța devine infinită și curentul prin circuit devine nul. Unghiul de defazaj este

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ radiani.}$$

b. $f = f_0$. La rezonanță, impedanța circuitului este minimă și egală cu rezistența R a circuitului rezonant. Defazajul $\varphi = 0$.

c. $f > f_0$. Când frecvența devine foarte mare reactanța inductivă

$$X_L = 2\pi fL$$

crește foarte mult iar reactanța capacitivă

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC}$$

tinde spre zero;

- unghiul de defazaj φ tinde către $+\frac{\pi}{2}$.

Caracteristica de fază reprezintă dependența dintre unghiul de defazaj al circuitului rezonant și frecvență (fig. 5.59).

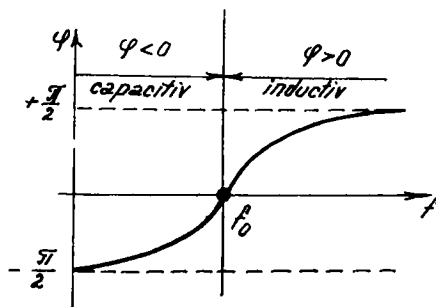


Fig. 5.59. Caracteristica de fază la rezonanța serie.

Pentru:

a. $f < f_0$. Unghiul de defazaj $\varphi < 0$ și circuitul are caracter capacitiv.

b. $f = f_0$. Unghiul de defazaj $\varphi = 0$; circuitul are caracter rezistiv și prezintă fenomenul de rezonanță.

c. $f > f_0$. Unghiul de defazaj $\varphi > 0$; circuitul electric are caracter inductiv.

Curba de rezonanță reprezintă dependența dintre tensiunea circuitului rezonant, respectiv dintre tensiunile pe condensator, pe bobină și frecvență (fig. 5.60); se disting următoarele:

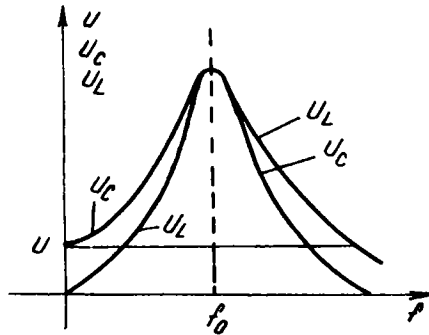


Fig. 5.60. Curba de rezonanță la rezonanța serie.

a. $f < f_0$. Curentul prin circuit este zero pentru frecvența nulă. Tensiunea sinusoidală de alimentare se repartizează pe capacitate,

$$U = U_C ;$$

cînd crește frecvența, curentul crește prin circuit dar

$$U_L < U_C .$$

Circuitul se comportă capacitiv.

b. $f = f_0$. Curentul prin circuit devine maxim, impedanța este minimă și egală cu rezistența circuitului rezonant ($Z = R$).

Cu cât circuitul rezonant are un factor de calitate mai bun, cu atât curentul este mai mare la rezonanță, curba de rezonanță este mai "ascuțită" (v. fig. 5.61).

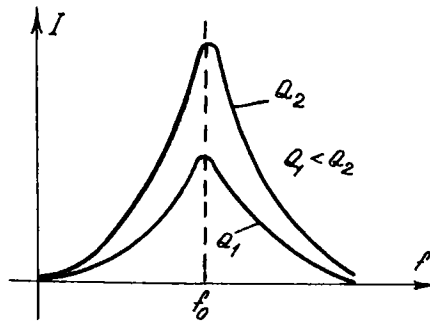


Fig. 5.61. Curba de selectivitate la rezonanța serie.

Tensiunile $U_C = U_L$ capătă valori foarte mari, periculoase pentru circuitul rezonant.

c. $f > f_0$. Curentul prin circuit scade și tinde la zero când frecvența crește foarte mult. Când frecvența devine foarte mare, tensiunea pe capacitate U_C tinde către zero, aceasta comportându-se ca un "scurtcircuit".

Selectivitatea este o altă mărime caracteristică a unui circuit rezonant. Se spune că un circuit rezonant este cu atât mai selectiv cu cât este mai mare factorul de calitate Q adică cu cât curba de rezonanță este mai ascuțită (vezi fig. 5.61).

5.6.2. Rezonanța paralel

Fenomenul de rezonanță paralel apare în circuitul electric de curent alternativ din fig. 5.62 în care elementele de circuit sînt legate în paralel. Conform celor stabilite în paragraful 5.5.4 rezultă că:

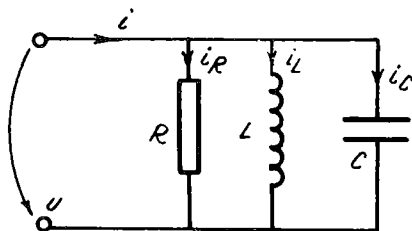


Fig. 5.62. Circuitul electric cu rezonanță paralel.

- tensiunea electrică este

$$u = U \sqrt{2} \sin \omega t ;$$

- curentul electric,

$$i = I \sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi) ;$$

- admitanța,

$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} ;$$

- defazaajul,

$$\varphi = \arctg \left(\frac{R}{\omega L} - \omega CR \right).$$

Intre valorile efective ale tensiunii U și curentului I există relația:

$$I = Y U . \quad (5.109)$$

Valorile efective ale curenților care străbat cele trei elemente R, L și C sînt:

$$I_R = \frac{U}{R} \quad ; \quad I_L = \frac{U}{\omega L} \quad \text{și} \quad I_C = \omega C U \quad (5.110)$$

iar pulsația este $\omega = 2\pi f$.

La rezonanță, se realizează condiția

$$X_L = X_C \quad (5.111)$$

adică

$$2\pi f_o L = \frac{1}{2\pi f_o C}$$

în care f_o reprezintă frecvența de rezonanță și are aceeași expresie ca și în cazul circuitului rezonant serie:

$$f_o = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad (5.112)$$

(formula lui Thomson).

De asemenea, condițiile de apariție a fenomenului de rezonanță paralel sînt aceleași ca și la rezonanța serie (vezi paragraful 5.6.1).

Defazajul dintre tensiune și curent devine egal cu zero;

$$\varphi_f = \varphi_o = \arctg R\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = \arctg 0 = 0^\circ \quad (5.113)$$

pentru că la rezonanță

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C.$$

Admitanța circuitului va fi la rezonanță

$$Y_{f=f_0} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2} = \frac{1}{R} \quad (5.114)$$

și impedanța $Z = R$ (pentru $f = f_0$).

Circuitul electric la rezonanță este rezistiv.

Rezultă că și la rezonanța paralel, tensiunea și curentul sînt în fază ($\varphi = 0$), adică

$$u = U\sqrt{2} \sin \omega t$$

și

$$i_{f=f_0} = \frac{U}{R} \sqrt{2} \sin (\omega t + 0^\circ) = \frac{U}{R} \sqrt{2} \sin \omega t \quad (5.115)$$

Diagrama fazorială este redată în fig. 5.63.

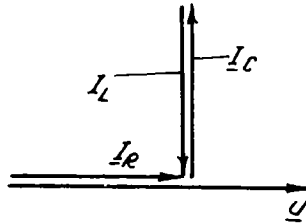


Fig. 5.63. Diagrama fazorială la rezonanța paralel.

Curenții I_L și I_C care străbat inductivitatea L și capacitatea C devin egali și de sens contrar adică există o circulație de curent între bobină și condensator. Prin bornele circuitului intră numai curentul I_R .

Pentru a caracteriza rezonanța paralel, se introduc mărimile:

Admitanța caracteristică

$$Y_C = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2\pi f_o L} = 2\pi f_o C \quad (5.116)$$

este egală cu admitanța inductivă sau admitanța capacitivă la rezonanță.

Factorul de calitate este produsul dintre admitanța caracteristică Y_C și rezistența electrică a circuitului rezonant R adică:

$$Q = \frac{R}{2\pi f_o L} = 2\pi f_o C R . \quad (5.117)$$

Factorul de amortizare este valoarea inversă a factorului de calitate:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{1}{R Y_C} . \quad (5.118)$$

Caracteristica de frecvență reprezintă dependența dintre admitanța circuitului rezonant și frecvență (fig. 5.64).

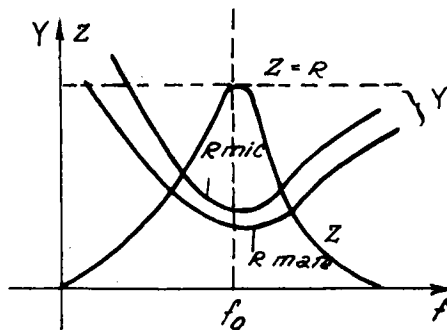


Fig. 5.64. Caracteristica de frecvență la rezonanța paralel.

La frecvența de rezonanță $f = f_0$, admitanța are valoare minimă

$$Y_{f=f_0} = \frac{1}{R} \quad (5.119)$$

iar impedența devine maximă:

$$Z_{f=f_0} = R \quad (5.120)$$

Pentru $f > f_0$ sau $f < f_0$, admitanța crește și impedența se micșorează.

Caracteristica de fază reprezintă dependența dintre unghiul de defazaj φ al circuitului rezonant și frecvență (fig. 5.65).

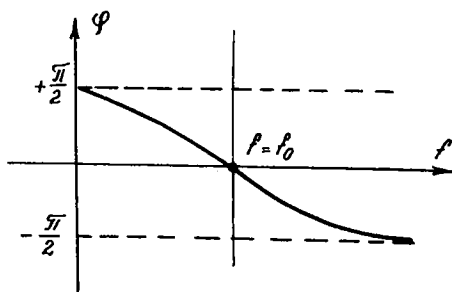


Fig. 5.65. Caracteristica de fază la rezonanța paralel.

Curba de rezonanță reprezintă dependența dintre curentul circuitului rezonant și frecvență (fig. 5.66).

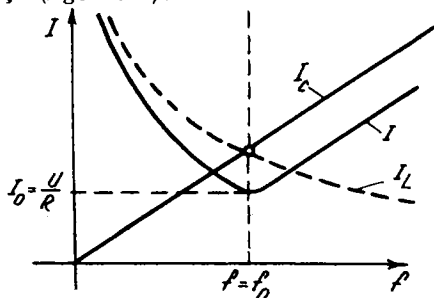


Fig. 5.66. Curba de rezonanță la rezonanța paralel.

La rezonanță, $f = f_o$, curentul circuitului rezonant este minim:

$$I_o = \frac{U}{R} \quad (5.121)$$

Curenții prin bobină și prin condensator ajung însă la valorile lor maxime și sînt de Q ori mai mari decît curentul $I_o = \frac{U}{R}$ absorbit la rezonanță;

- curentul prin bobină:

$$I_{L \text{ } f = f_o} = \frac{U}{2\pi f_o L} = \frac{RI_o}{2\pi f_o L} = QI_o ; \quad (5.122)$$

- curentul prin condensator:

$$I_{C \text{ } f = f_o} = 2\pi f_o CU = 2\pi f_o CRI_o = QI_o \quad (5.123)$$

în care

$$Q = \frac{R}{2\pi f_o L} = 2\pi f_o CR \quad (5.124)$$

reprezintă factorul de calitate.

Se observă că la rezonanță ($f = f_o$), curentul prin bobina I_L este egal cu cel prin condensator I_C și au valoare maximă. De aceea, rezonanța în circuitul paralel se numește rezonanță de curent.

5.6.3. Rezonanța multiplă

După cum s-a prezentat în paragrafele precedente, la rezonanța serie (de tensiune) impedanța circuitului devine minimă și curentul prin circuit

este maxim pentru frecvența de rezonanță. În cazul rezonanței paralele (de curent) se întâmplă invers: impedanța devine maximă iar curentul obținut este minim.

În circuitele electrice cu elemente de circuit legate și în alte moduri, pot să apară condiții în care să se producă rezonanță de tensiune și rezonanță de curent.

Pot apare următoarele situații:

- defazajul dintre tensiunea la borne și curentul absorbit să fie zero;
- impedanța echivalentă a circuitului este minimă (rezonanță de tensiune) sau maximă (rezonanță de curent).

În aceste situații există mai multe frecvențe de rezonanță și regimul este de rezonanță multiplă.

5.6.4. Ferorezonanța

Curentul alternativ printr-o bobină fără miez magnetic variază proporțional cu tensiunea de la bornele bobinei (inductivitatea bobinei $L = \text{constantă}$) (fig. 5.67):

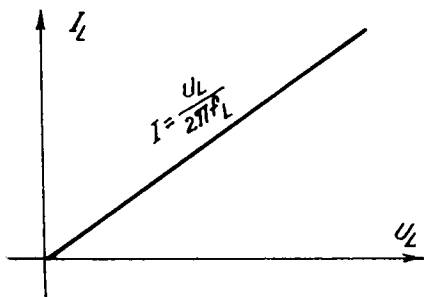


Fig. 5.67. $I = f(U_L)$ într-o bobină fără miez de fier.

$$I = \frac{U_L}{2\pi fL} \quad (5.125)$$

în care I reprezintă valoarea efectivă a curentului care străbate bobina iar U_L este valoarea efectivă de la bornele bobinei.

Cînd bobina este cu miez magnetic (ex.: fier) pentru frecvență $f =$ constantă, curentul electric alternativ din bobină variază neliniar cu tensiunea de la bornele bobinei (fig. 5.68). De la o anumită valoare a curentului electric,

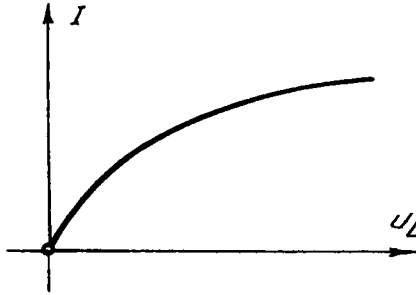


Fig. 5.68. $I = f(U_L)$ într-o bobină cu miez de fier.

tensiunea la bornele bobinei cu miez magnetic devine constantă; apare fenomenul de saturație magnetică studiat în capitolul 4.

În acest caz, inductivitatea bobinei cu miez magnetic nu mai este constantă, depinde de starea de magnetizare a miezului bobinei.

Se studiază în continuare fenomenul de rezonanță într-un circuit serie $RL_{Fe}C$ în care bobina are miez magnetic și tensiunea de alimentare a circuitului $RL_{Fe}C$ are frecvența constantă. Din schema electrică a circuitului (fig. 5.69 a) și din diagrama fazorială (fig. 5.69 b) se scrie relația dintre valorile efective ale tensiunilor:

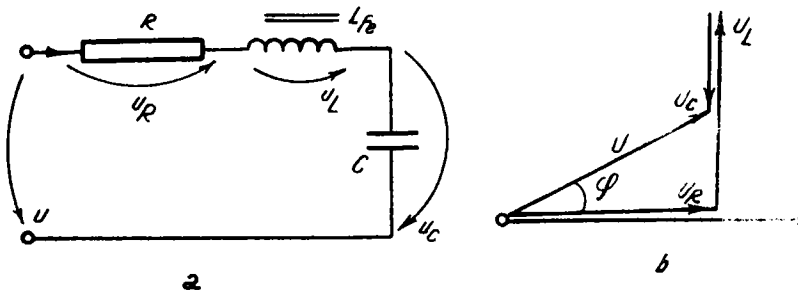


Fig. 5.69. a. Circuit $RL_{Fe}C$; b. Diagrama fazorială a circuitului $RL_{Fe}C$.

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} \quad (5.126)$$

Dacă se reprezintă grafic tensiunile U , U_R , U_L și U_C în funcție de valoarea efectivă a curentului I care străbate circuitul, se obțin curbele din fig. 5.70.

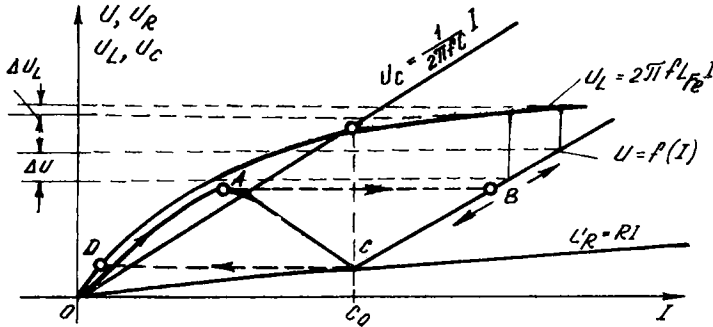


Fig. 5.70. Reprezentarea grafică a tensiunilor U_R , U_L , U_C și U din circuitul $RL_{Fe}C$.

Din relația (5.126) se determină tensiunea la bornele circuitului $RL_{Fe}C$ care în fig. 5.70 este reprezentată de curba $OACB$. Această curbă redă modul în care se modifică curentul în circuit atunci când tensiunea la bornele circuitului variază după curba $OACB$. Pentru o valoare dată a curentului (punctul C_0), tensiunea la bornele inductivității L este egală și de semn contrar cu tensiunea la bornele condensatorului C

$$U_L = U_C$$

sau

$$2\pi f L_{Fe} I = \frac{1}{2\pi f C} I \quad (5.127)$$

Din această relație, la o frecvență dată, se obține valoarea inductivității L_{Fe} pentru care în circuitul respectiv apare fenomenul de rezonanță.

$$L_{Fe} = \frac{1}{(2\pi f)^2 C} \quad (5.128)$$

Pentru că circuitul $RL_{Fe}C$ conține o bobină cu miez magnetic - foarte răspândit este miezul din fier - fenomenului de rezonanță i s-a spus ferorezonanță.

Funcționarea circuitului ferorezonant. La creșterea tensiunii de la bornele circuitului $RL_{Fe}C$, curentul crește după porțiunea de curbă OA.

La o creștere foarte mică a tensiunii la borne U, punctul de funcționare trece din A în B. Are loc un salt brusc de curent și defazaj, circuitul devine capacitiv ($U_C > U_L$). Dacă în jurul punctului de funcționare B, tensiunea variază cu ΔU , se produce o variație foarte mică a tensiunii de la bornele bobinei L_{Fe} ($\Delta U_L \approx 0$; $U_L = \text{constantă}$) (vezi fig. 5.70).

Pentru valori descrescătoare ale tensiunii la borne, punctul de funcționare se deplasează de la B pînă în C și mai departe prin salt trece în D. Si în acest caz are loc un salt de curent și variația bruscă a fazei.

Utilizarea circuitului ferorezonant. Bobina L_{Fe} poate constitui înfășurarea primară a unui transformator. În acest caz, cu toate că tensiunea de alimentare a circuitului primar variază, tensiunea secundară obținută din transformarea tensiunii constante de la bornele bobinei cu miez de fier rămîne de asemenea constantă (fig. 5.71).

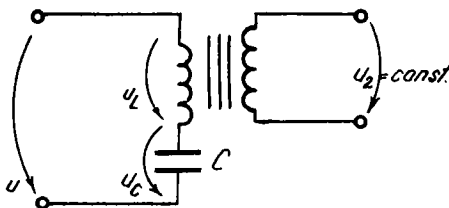


Fig. 5.71. Circuit ferorezonant.

S-a considerat că rezistența bobinei primare a transformatorului este nulă.

5.7. Puterea în curent alternativ sinusoidal

S-a definit în paragrafele anterioare noțiunea de putere instantanee p , ca fiind produsul dintre valoarea instantanee a tensiunii electrice u și valoarea instantanee a curentului electric i :

$$p = u i .$$

În continuare, se va determina expresia puterii electrice în cazul elementelor simple de circuit pentru tensiuni și curenți cu variație sinusoidală în timp.

Rezistorul electric. Puterea electrică primită pe la borne de un rezistor electric are expresia:

$$p = u_R i = R i^2 \geq 0 .$$

Această putere electrică se transformă ireversibil în căldură dezvoltată în rezistor.

Valoarea medie pe o perioadă a puterii instantanee se determină prin calcul ca fiind expresia:

$$P = R I^2 \quad (5.129)$$

în care:

P - valoarea medie a puterii;

R - rezistența electrică a rezistorului;

I - valoarea efectivă a curentului care străbate rezistorul.

Această putere se mai numește și putere activă și nu este legată numai de căldura degajată în rezistoare. Are următoarea definiție:

Puterea activă este valoarea medie pe o perioadă a puterii instantanee. Se notează cu P .

Unitatea de măsură pentru puterea activă se numește watt (W).

Se folosesc și următorii multipli :

Kilowatt (kW) $1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W}$

Megawatt (MW) $1 \text{ MW} = 10^6 \text{ W}$

Variația în timp a puterii instantanee este reprezentată grafic în fig.

5.72.

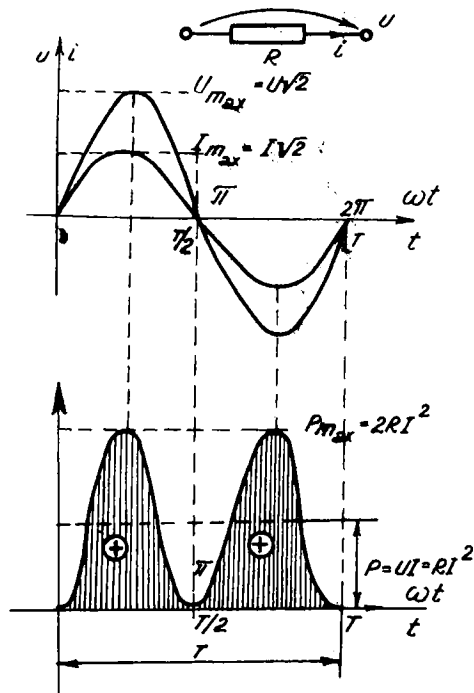


Fig. 5.72. Variația puterii instantanee și energiei în rezistor.

Tensiunea electrică respectiv curentul electric sînt în fază, defazajele fiind nule:

$$u = U\sqrt{2} \sin \omega t,$$

$$i = I\sqrt{2} \sin \omega t$$

$$\text{iar } \beta = \varphi = 0.$$

Energia electrică primită într-un interval de o perioadă este:

$$W_T = P T \quad (5.130)$$

și reprezintă aria hașurată din fig. 5.72. Se numește energie activă.

Unitatea de măsură pentru energia activă este watt-secunda (Ws) .

Se folosesc următorii multipli :

$$\text{Watt-oră (Wh)} \quad 1 \text{ Wh} = 3.600 \text{ Ws}$$

$$\text{kilowatt-oră (kWh)} \quad 1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Ws}$$

Bobina ideală. Puterea instantanee schimbată pe la borne de o bobină ideală este

$$p = u_L i$$

în care:

$$u_L = U \sqrt{2} \sin \omega t + \frac{\pi}{2} \quad \text{tensiunea la bornele bobinei}$$

$$\text{și} \quad i = I \sqrt{2} \sin \omega t \quad \text{curentul electric prin bobină ;}$$

$$\text{tensiunea efectivă} \quad U = \omega L I .$$

Puterea instantanee se scrie:

$$p = u_L i = 2 \omega L I^2 \sin \omega t \cdot \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) .$$

Dar

$$2 \sin \omega t \cdot \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \sin 2 \omega t$$

Deci

$$p = \omega L I^2 \sin 2 \omega t .$$

Puterea instantanee schimbată de bobina ideală pe la borne variază sinusoidal în timp cu frecvență dublă (fig. 5.73.).

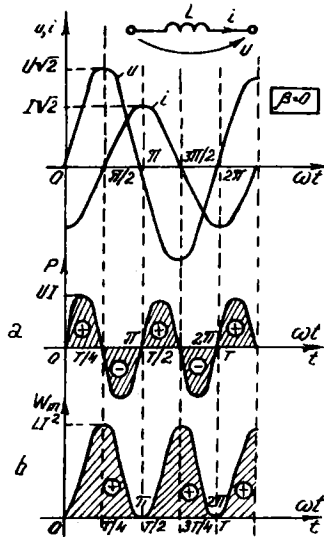


Fig. 5.73. Variația puterii instantanee și energiei în bobina ideală.

Această variație are următoarea semnificație:

a. O perioadă a puterii instantanee reprezintă o semiperioadă a tensiunii sau curentului.

b. Într-o semiperioadă, puterea are semnul plus adică este primită de bobină iar în semiperioada următoare, bobina cedează puterea pe la borne.

Prin urmare, în medie pe o perioadă puterea instantanee este nulă. Deci puterea activă este nulă.

Această putere care oscilează de la borne către bobină și invers, se numește putere reactivă inductivă.

Se notează cu Q_L și are expresia:

$$Q_L = \omega L I^2 = X_L I^2 \quad (5.131)$$

Unitatea de măsură este VAR (volt amper-reactiv).

Energia magnetică. Expresia energiei magnetice este

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2. \quad (5.132)$$

Variația în timp este redată în fig. 5.73; se observă următoarele:

- când puterea instantanee este pozitivă (interval 0 la $\frac{T}{4}$) energia magnetică acumulată în bobină crește de la zero la valoarea maximă $L I^2$;
- când puterea instantanee este negativă (interval $\frac{T}{4}$ la $\frac{T}{2}$) energia magnetică acumulată descrește de la valoarea maximă la zero.

În concluzie, bobina ideală schimbă energia magnetică pe la borne fără să o consume.

Valoarea medie a energiei magnetice în timp de o perioadă este

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2. \quad (5.133)$$

Condensatorul ideal. Puterea instantanee schimbată pe la borne de condensatorul ideal este

$$p = u_C i \quad (5.134)$$

în care

$$u_C = U\sqrt{2} \sin \omega t$$

și

$$i = I\sqrt{2} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

iar între valoarea efectivă a tensiunii și valoarea efectivă a curentului electric, există următoarea legătură:

$$U = X_C I = \frac{1}{\omega C} I \text{ sau}$$

$$I = \omega C U. \quad (5.135)$$

Rezultă pentru puterea instantanee următoarea expresie:

$$p = u_C i = \omega C U^2 \sin \omega t \cdot \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad p = \omega C U^2 \sin 2 \omega t. \quad (5.136)$$

Puterea instantanee schimbată de condensatorul ideal pe la borne variază sinusoidal în timp cu frecvență dublă (fig. 5.74).

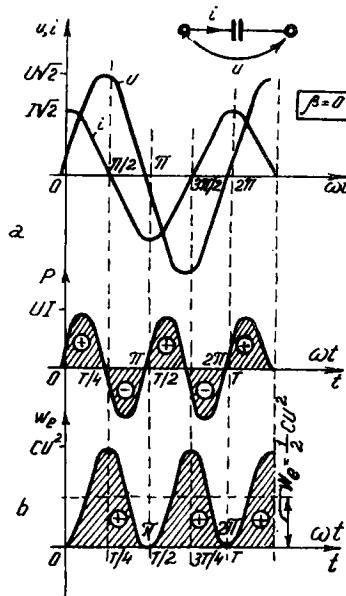


Fig. 5.74. Variația puterii instantanee și energiei în condensatorul ideal.

Variația puterii instantanee are aceeași semnificație ca și la bobina ideală adică:

a. O perioadă a puterii instantanee reprezintă o semiperioadă a tensiunii sau a curentului ;

b. Într-o semiperioadă, puterea are semnul plus adică este primită de condensator iar în semiperioada următoare, condensatorul cedează putere pe la borne.

Prin urmare, în medie pe o perioadă, puterea instantanee este nulă. Deci puterea activă este nulă.

Această putere care oscilează de la borne către condensator și invers, se numește putere reactivă capacitivă.

Se notează cu Q_C și are expresia:

$$Q_C = \frac{U^2}{X_C} = X_C I^2 = - \frac{1}{\omega C} I^2 . \quad (5.137)$$

Unitatea de măsură este VAR (volt amper-reactiv).

Energia electrică. Expresia energiei electrice este

$$w_e = \frac{1}{2} C u^2 . \quad (5.138)$$

Variația în timp este prezentată în fig. 5.74. Se constată ca și în cazul bobinei electrice, că energia electrică este schimbată pe la borne de condensatorul ideal, fără să o consume.

Valoarea medie a energiei electrice acumulată între armăturile condensatorului electric ideal este

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 . \quad (5.139)$$

5.7.1. Puterea activă. Puterea reactivă. Puterea aparentă

În paragrafele anterioare, s-a determinat puterea în curent alternativ sinusoidal pentru următorii dipoli: rezistor, bobină și condensator. Defaza-jele dintre tensiunea la bornele dipolului și curentul prin dipol erau:

- 0 pentru rezistor;
- $+\frac{\pi}{2}$ pentru bobină;
- $-\frac{\pi}{2}$ pentru condensator.

Se consideră însă un circuit dipolar complex la care defazajul este φ .
In acest caz tensiunea electrică la bornele circuitului dipolar este

$$u = U\sqrt{2} \sin \omega t$$

și curentul electric

$$i = I\sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi) .$$

Reprezentarea carteziană este redată în fig. 5.75 a și b.

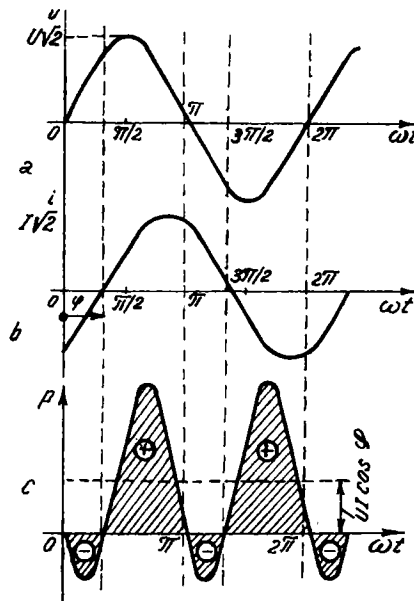


Fig. 5.75. Variația u , i și p într-un circuit dipolar complex.

Puterea instantanee la bornele circuitului dipolar este

$$p = u i = 2 UI \sin \omega t \sin (\omega t - \varphi) = UI \cos \varphi - UI \cos (2\omega t - \varphi) \quad (5.140)$$

Această dezvoltare s-a făcut în baza identității trigonometrice

$$2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b).$$

Puterea activă este valoarea medie pe o perioadă a puterii instantanee.

Determinând valoarea medie pentru expresia de mai sus, se obține:

$$P = U I \cos \varphi. \quad (5.141)$$

Valoarea medie a termenului $U I \cos(2\omega t - \varphi)$ este egală cu zero pentru o perioadă.

Prin urmare, puterea activă a unui circuit dipolar este produsul dintre valorile efective ale tensiunii, curentului și cosinusul unghiului de defazaj dintre curent și tensiune. În fig. 5.75 c este reprezentată variația puterii instantanee a circuitului dipolar, în timp. Pe intervalul unei perioade, puterea instantanee are următoarele semnificații:

a. $0 \div \varphi$. Puterea instantanee marcată cu \ominus este cedată pe la borne exterior.

b. $\varphi \div \pi$. Circuitul dipolar primește puterea din exterior. Este marcată cu \oplus .

c. $\pi \div \pi + \varphi$. Din nou, circuitul dipolar cedează putere către exterior pe la borne (semn \ominus).

d. $\pi + \varphi \div 2\pi$. Circuitul dipolar primește putere (vezi punctul b).

Se observă că într-o perioadă, energia primită de circuit - suprafețele cu \oplus - este mai mare ca energia cedată exteriorului (suprafețele cu \ominus). Diferența lor pe o perioadă reprezintă energia disipată în elementele rezistive ale circuitului dipolar.

Acestei energii îi corespunde puterea activă.

Dacă circuitul dipolar este constituit dintr-un rezistor ideal, defazajul $\varphi = 0$, $U = R I$, astfel că puterea:

$$P_R = U I \cos 0^\circ = R I^2 \quad (5.142)$$

este putere activă.

Cînd circuitul dipolar este constituit dintr-o bobină ideală, cudefazajul $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ sau dintr-un condensator ideal cu defazajul $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, puterea activă este nulă deoarece $\cos \frac{\pi}{2} = \cos (-\frac{\pi}{2}) = 0$.

În ambele cazuri, energia "pulsează" pe la bornele circuitului dipolar alternativ în ambele sensuri (suprafețele cu semn \oplus sînt egale cu suprafețele cu semn \ominus).

Puterea reactivă. S-a arătat anterior că pentru elementele de circuit dipolare reactive (bobină respectiv condensator) puterea instantanee oscilează cu frecvență dublă față de tensiunea respectiv curentul circuitului (fig. 5.76).

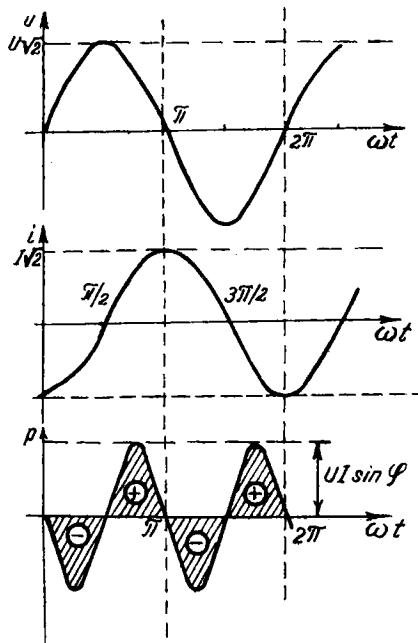


Fig. 5.76. Variația u , i și p într-un dipol reactiv.

Puterea reactivă reprezintă valoarea maximă a puterii instantanee oscilante și este

$$Q = U I \sin \varphi \quad (5.143)$$

care poate să fie pozitivă sau negativă. Se notează cu Q și se măsoară în VAr (volt amper-reactiv).

Puterea reactivă are următoarele valori pentru:

- rezistor ideal

$$Q_R = 0 \text{ pentru că } \sin \varphi = 0 ; \quad (5.144)$$

- bobină ideală

$$Q_L = U I \sin \frac{\pi}{2} = U I = X_L I^2 > 0 ; \quad (5.145)$$

- condensator ideal

$$Q_C = U I \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = - U I = -X_C I^2 < 0 . \quad (5.146)$$

Se observă că puterea reactivă este pozitivă la bobine și negativă pentru condensatoare.

Puterea aparentă a unui circuit dipolar reprezintă produsul dintre valorile efective ale tensiunii și curentului.

Se notează cu S ;

$$S = U I . \quad (5.147)$$

Unitatea de măsură pentru puterea aparentă este volt-amperul (VA).

Factor de putere reprezintă raportul dintre puterea activă și puterea aparentă:

$$K_p = \frac{P}{S} = \cos \varphi . \quad (5.148)$$

Cînd $\cos \varphi = 1$, puterea activă este egală cu puterea aparentă.

În industrie, se urmărește ca o instalație electrică să lucreze cu maximum de putere activă, caz în care factorul de putere trebuie să fie aproape de unitate.

Între puterile activă, reactivă și aparentă există relația:

$$P^2 + Q^2 = S^2 \quad (5.149)$$

dedusă din

$$(UI \cos \varphi)^2 + (UI \sin \varphi)^2 = (UI)^2.$$

Se pot scrie și următoarele relații:

$$P = S \cos \varphi; Q = S \sin \varphi \text{ și } P \operatorname{tg} \varphi = Q. \quad (5.150)$$

În baza acestor relații se poate construi triunghiul puterilor (fig. 5.77).

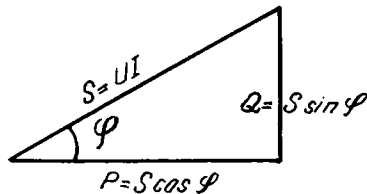


Fig. 5.77. Triunghiul puterilor.

Dacă se notează cu Z impedanța circuitului electric, atunci întreținerea la borne U și curentul circuitului I , există relația:

$$U = Z I.$$

Ținînd seama de această relație, puterea aparentă se poate pune sub forma:

$$S = U I = Z I^2. \quad (5.151)$$

5.7.2. Reprezentarea puterilor în complex

Se consideră un circuit electric la bornele căruia se aplică tensiunea sinusoidală:

$$u = U\sqrt{2} \sin \omega t .$$

Circuitul electric este parcurs de curentul

$$i = I\sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi) ,$$

cum se observă, defazat cu unghiul φ față de tensiune.

Aceste două mărimi electrice se reprezintă în complex astfel:

$$\underline{U} = U e^{j0} \text{ și } \underline{I} = I e^{-j\varphi} .$$

Se notează cu

$$\underline{I}^* = I e^{j\varphi} \quad (5.152)$$

mărimea complexă conjugată a curentului \underline{I} .

Se efectuează produsul:

$$\underline{U} \underline{I}^* = U I (\cos \varphi + j \sin \varphi) = U I \cos \varphi + j U I \sin \varphi .$$

Dar

$$U I \cos \varphi = P \text{ și } U I \sin \varphi = Q$$

Se constată de aici că produsul $\underline{U} \underline{I}^*$ reprezintă puterea în complex, adică:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ . \quad (5.153)$$

În baza acestei relații, se pot reprezenta în planul complex puterile: \underline{S} , P și Q (fig. 5.78).

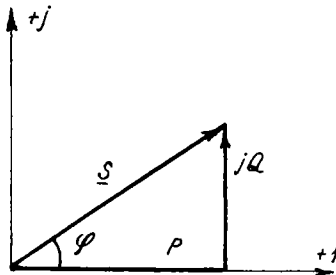


Fig. 5.78. Reprezentarea în planul complex a puterilor: \underline{S} , P și Q .

În complex, se poate defini că:

Puterea aparentă S este modulul puterii aparente complexe $|\underline{S}|$,

$$S = |\underline{S}|. \quad (5.154)$$

Puterea activă P este partea reală a puterii aparente complexe \underline{S} .
Se scrie astfel:

$$P = \operatorname{Re} \left\{ \underline{S} \right\}. \quad (5.155)$$

Puterea reactivă Q este partea imaginară a puterii aparente complexe \underline{S} . Se scrie astfel:

$$Q = \operatorname{Im} \left\{ \underline{S} \right\}. \quad (5.156)$$

Aplicația 1

Pentru circuitul dipolar din fig. 5.79 compus din rezistorul electric de rezistență $R = 6 \, \Omega$ alimentat cu tensiunea electrică:

$$u = 120 \sqrt{2} \sin 100\pi t \quad (\text{V});$$

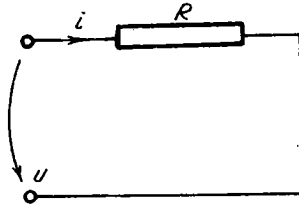


Fig. 5.79.

Se cere:

- intensitatea curentului electric;
- puterea aparentă;
- puterea activă;
- puterea reactivă.

Se vor efectua calculele cu metoda complexă.

Tensiunea electrică complexă este

$$\underline{U} = U e^{j\beta} = 120 e^{j0^\circ} = 120 \text{ (V)}$$

Impedanța \underline{Z} este

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = 6 + j \cdot 0 = 6 \Omega .$$

a. Curentul electric

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{120}{6} = 20 \text{ A} .$$

Curentul electric instantaneu este

$$i = I\sqrt{2} \sin 100\pi t = 20\sqrt{2} \sin 100\pi t \quad (\text{A}) .$$

b) Puterea aparentă complexă este

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = 120 \cdot 6 = 720 .$$

Puterea aparentă:

$$S = |\underline{S}| = 720 \text{ VA} .$$

c) Puterea activă:

$$P = \operatorname{Re} \left\{ \underline{S} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 720 \right\} = 720 \text{ W} .$$

d) Puterea reactivă:

$$Q = I_m \left\{ \underline{S} \right\} = I_m \left\{ 720 \right\} = 0 \text{ VAr} .$$

Aplicația 2

Pentru circuitul dipolar din fig. 5.80 compus din bobina electrică ideală cu inductivitatea $L = 76 \text{ mH}$ alimentat cu tensiunea electrică:

$$u = 120 \sqrt{2} \sin 100\pi t \quad (\text{V}) .$$

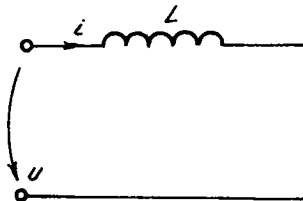


Fig. 5.80.

Se cere:

- a. reactanța inductivă;
- b. intensitatea curentului electric;
- c. puterea aparentă;
- d. puterea activă;
- e. puterea reactivă.

Se vor efectua calculele cu metoda complexă.

Tensiunea electrică complexă este

$$\underline{U} = U e^{j\beta} = 120 e^{j0} = 120 \quad (\text{V}) .$$

a. Reactanța inductivă este

$$X_L = 2\pi fL = 100\pi \cdot 0,076 = 24 \, \Omega .$$

Impedanța

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = 0 + j(24 - 0) = 24 j .$$

b. Intensitatea curentului electric:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{120}{24 j} = -5 j .$$

Sub formă exponențială, curentul este

$$\underline{I} = 5 e^{-j\frac{\pi}{2}} .$$

Curentul electric instantaneu este

$$i = 5\sqrt{2} \sin(100\pi t - \frac{\pi}{2}) \quad (\text{A}) .$$

c. Puterea aparentă complexă este

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = 120 \cdot 5 e^{j \frac{\pi}{2}} = 600 e^{j \frac{\pi}{2}} = 600 j .$$

Puterea aparentă:

$$S = |\underline{S}| = \left| 600 e^{j \frac{\pi}{2}} \right| = 600 \text{ VA} .$$

d. Puterea activă:

$$P = \operatorname{Re} \left\{ \underline{S} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 600 j \right\} = 0 \text{ W} .$$

e. Puterea reactivă:

$$Q = I_m \left\{ \underline{S} \right\} = I_m \left\{ 600 j \right\} = 600 \text{ VAR} .$$

Aplicația 3

Pentru circuitul dipolar din fig. 5.81 compus din condensatorul electric ideal cu capacitatea $C = 265 \mu\text{F}$ alimentat cu tensiunea electrică:

$$u = 120 \sqrt{2} \sin 100\pi t \text{ (V)} ,$$

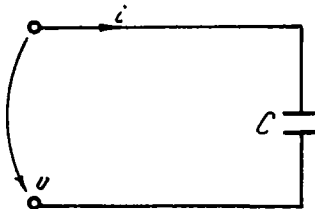


Fig. 5.81.

Se cere:

- a. reactanța capacitivă;
- b. intensitatea curentului electric;
- c. puterea aparentă;
- d. puterea activă;
- e. puterea reactivă.

Se vor efectua calculele cu metoda complexă.

Tensiunea electrică complexă este

$$\underline{U} = 120 e^{j0^\circ} = 120 \text{ V} .$$

a. Reactanța capacitivă este

$$X_c = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{100\pi \cdot 265 \cdot 10^{-6}} = 12 \Omega .$$

Impedanța complexă este

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_c) = 0 + j(0 - 12) = -12 j .$$

b. Intensitatea curentului electric:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{120}{-12 j} = 10 j .$$

Sub formă exponențială:

$$\underline{I} = 10 e^{j\frac{\pi}{2}} .$$

Valoarea instantanee a curentului electric este

$$i = 10 \sqrt{2} \sin (100\pi t + \frac{\pi}{2}) \quad (\text{A}) .$$

c. Puterea aparentă complexă este

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = 120 \cdot 10 e^{-j\frac{\pi}{2}} = 1200 e^{-j\frac{\pi}{2}} = -1200 j .$$

Puterea aparentă:

$$S = |\underline{S}| = |-1200 j| = 1200 \text{ VA} .$$

d. Puterea activă:

$$P = \operatorname{Re} \left\{ \underline{S} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ -1200 j \right\} = 0 \text{ W} .$$

e. Puterea reactivă:

$$Q = I_m \left\{ \underline{S} \right\} = I_m \left\{ -1200 j \right\} = -1200 \text{ VAR} .$$

Aplicația 4

Pentru circuitul dipolar din fig. 5.82 compus din rezistorul ideal cu rezistența $R = 6 \Omega$, bobina ideală cu inductivitatea $L = 57 \text{ mH}$ și condensatorul ideal cu capacitatea $C = 265 \mu\text{F}$, alimentat cu tensiunea electrică:

$$u = 120 \sqrt{2} \sin 100 \pi t \quad (\text{V}) .$$

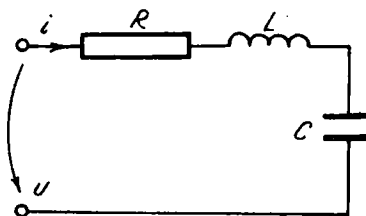


Fig. 5.82.

Se cere:

- impedanța dipolului ($X_L = 18 \Omega$; $X_C = 12 \Omega$);
- intensitatea curentului electric;

- c. puterea aparentă;
- d. puterea activă;
- e. puterea reactivă.

Se vor efectua calculele cu metoda complexă.

Tensiunea electrică complexă este:

$$\underline{U} = 120 e^{j0} = 120 .$$

- a. Impedanța complexă:

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = 6 + j(18 - 12) = 6 + 6 j .$$

Sub formă exponențială

$$\underline{Z} = \sqrt{72} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} .$$

Impedanța

$$Z = \sqrt{72} = 8,6 \Omega .$$

- b. Intensitatea curentului electric:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{120}{6 + 6 j} = 10 (1 - j) = \sqrt{200} e^{-j\frac{\pi}{4}} .$$

Valoarea instantanee a curentului electric este:

$$i = \sqrt{200} \cdot \sqrt{2} \sin (100\pi t - \frac{\pi}{4}) = 20 \sin (100\pi t - \frac{\pi}{4}) \quad (A) .$$

- c. Puterea aparentă complexă:

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = 120 \cdot \sqrt{200} e^{j\frac{\pi}{4}} = 120 \cdot \sqrt{200} (\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4})$$

sau

$$\underline{S} = 1200 \sqrt{2} (-\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2}) = 1200 (1 + j) .$$

Puterea aparentă este

$$S = |\underline{S}| = 1200 \cdot \sqrt{2} \text{ VA} .$$

d. Puterea activă:

$$P = \operatorname{Re} \left\{ \underline{S} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 1200 (1 + j) \right\} = 1200 \text{ W} .$$

e. Puterea reactivă:

$$Q = I_m \left\{ \underline{S} \right\} = I_m \left\{ 1200 (1 + j) \right\} = 1200 \text{ VAr} .$$

Circuitul are caracter inductiv ($Q > 0$).

Se verifică:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1200 \sqrt{2} \text{ VA} .$$

f. Factorul de putere:

$$K_p = \cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{1.200}{1.200 \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.71 .$$

5.7.3. Transferul maxim de putere activă

S-a arătat că un generator real de curent continuu cu rezistență internă R_i transferă o putere maximă receptorului de rezistență R_s , atunci când rezistențele sînt egale:

$$R_s = R_i .$$

Se vor determina condițiile în care un generator real de curent alternativ sinusoidal transferă putere activă maximă către receptorul legat la bornele sale.

Se consideră (fig. 5.83) un generator de curent alternativ de tensiune electromotoare

$$e = E \sqrt{2} \sin \omega t$$

și impedanță

$$\underline{Z} = R_g + j X_g ,$$

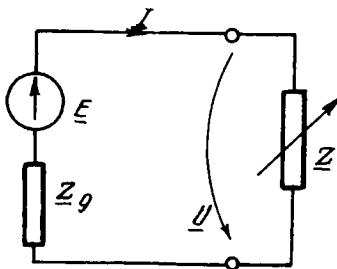


Fig. 5.83. Generator real de curent alternativ alimentează receptorul \underline{Z} .

Acesta alimentează receptorul de impedanță variabilă:

$$\underline{Z} = R + j X ,$$

Curentul absorbit de receptor pe la borne are valoarea efectivă:

$$I = \frac{E}{\sqrt{(R_g + R)^2 + (X_g + X)^2}} .$$

Puterea activă primită pe la borne este

$$P = RI^2 = \frac{R}{(R_g + R)^2 + (X_g + X)^2} E^2 .$$

Se presupune rezistența receptorului $R = \text{constanta}$. În acest caz, puterea activă P este maximă când termenul

$$X_g + X = 0$$

sau

$$X = - X_g .$$

În continuare se presupune $X = - X_g$ și trebuie determinată puterea maximă din expresia:

$$P = \frac{R}{(R_g + R)^2} E^2 ,$$

Se demonstrează că această expresie este maximă pentru

$$R = R_g .$$

Prin urmare condițiile sînt

$$R = R_g \quad \text{și} \quad X = - X_g .$$

Scrisă în complex:

$$R + j X = R_g - j X_g$$

sau

$$\underline{Z} = \underline{Z}_g^* . \quad (5.157)$$

Relația (5.17) se numește condiția de adaptare a sarcinii la generator pentru a obține transfer maxim de putere activă.

Rezultă în continuare următoarele:

- Valoarea efectivă a curentului prin receptor:

$$I = \frac{E}{2 R}$$

- Puterea activă maximă transferată:

$$P = \frac{E^2}{4 R_g}$$

- Randamentul transferului de putere:

$$\eta = \frac{P}{P_g} = \frac{R I^2}{E I} = \frac{R I^2}{2 R I^2} = 0,5 \quad \text{sau} \quad \eta = 50\%$$

Cînd transferul de putere activă este maxim, randamentul este redus, egal cu 50%.

Din această cauză, condiția de adaptare a sarcinii la generator se folosește în telecomunicații, unde se urmărește un transfer maxim de putere activă de la generator la receptor. În generatoarele de curent alternativ folosite în electroenergetică se urmărește realizarea unui randament maxim; aceeași se realizează cînd rezistența generatorului R_g tinde către zero.

5.7.4. Teorema conservării puterilor complexe în circuite de curent alternativ sinusoidal

Intr-un circuit de curent alternativ sinusoidal puterea aparentă complexă furnizată de generatoarele circuitului este egală cu puterea aparentă complexă consumată de receptoarele circuitului respectiv:

$$\sum_{k=1}^L E_k I_k^* = \sum_{k=1}^L (R_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k}) I_k^2 \quad (5.158)$$

sau prescurtat

$$\underline{S}_g = \underline{S}.$$

Acest enunț reprezintă teorema conservării puterii aparente complexe într-un circuit de curent alternativ sinusoidal. Teorema se folosește la verificarea rezultatelor obținute în urma rezolvării unui circuit de curent sinusoidal. Se spune în acest caz că s-a efectuat bilanțul puterii aparente complexe.

Termenii din membrul stîng se scriu cu semnul plus sau minus, conform regulei prezentate în fig. 5.84.

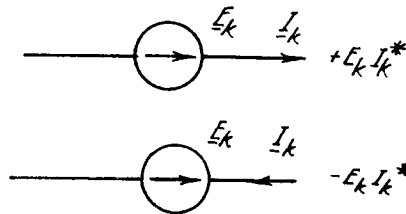


Fig. 5.84. Regulă pentru scrierea semnelor puterii complexe.

Termenii din membrul drept se scriu cu semnul plus.

Termenul

$$\frac{1}{j\omega C_k} I_k^2$$

poate apare și cu semnul minus deoarece

$$\frac{1}{j\omega C_k} I_k^2 = - \frac{j}{C_k} I_k^2.$$

Bilanțul puterii active în circuit se obține din relația (5.158) egalînd părțile reale:

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^L \underline{E}_k \underline{I}_k^* \right\} = \sum_{k=1}^L R_k I_k^2. \quad (5.159)$$

Bilanțul puterii reactive în circuit se obține din aceeași relație (5.158) egalând părțile imaginare:

$$I_m \left\{ \sum_{k=1}^L \underline{E}_k \underline{I}_k^* \right\} = \sum_{k=1}^L \left(\omega L_k - \frac{1}{\omega C_k} \right) I_k^2 \quad (5.160)$$

5.8. Metode de rezolvare a circuitelor electrice liniare de curent alternativ sinusoidal

În vederea rezolvării circuitelor electrice de curent sinusoidal, mărimile electrice vor fi reprezentate în complex. Calculele efectuate asupra mărimilor electrice reprezentate în complex se limitează la rezolvarea de ecuații algebrice liniare în care apar mărimi complexe.

Cele mai răspândite probleme care se cer a fi rezolvate sînt acelea în care trebuie să se determine curenții cînd sînt cunoscute impedanțele și tensiunile electromotoare ale generatoarelor de tensiune alternativă.

Circuitele electrice prezentate în continuare nu vor conține generatoare de curent alternativ.

Metodele de rezolvare a circuitelor de curent alternativ sinusoidal sînt:

- metoda lui Ohm;
- metoda impedanțelor echivalente;
- metoda teoremelor Kirchhoff;
- metoda superpoziției;
- metoda curenților ciclici;
- metoda potențialelor la noduri;
- metoda generatoarelor echivalente de tensiune și curent.

Pentru verificarea rezultatelor obținute în urma rezolvării circuitului electric alternativ se efectuează bilanțul puterilor active, reactive și aparente prezentat în paragraful anterior.

Elementele topologice definite la circuitele de curent continuu se păstrează și în circuitele de curent alternativ sinusoidal necuplate magnetic (nod, latură, ochi, sistem de ochiuri fundamentale).

5.8.1. Metoda legii lui Ohm.

Intr-un circuit RLC serie (fig. 5.85) în care tensiunea generatorului ideal de tensiune este:

$$e = E \sqrt{2} \sin \omega t.$$

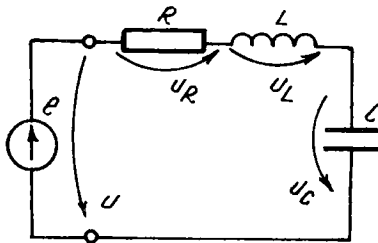


Fig. 5.85. Circuit RLC serie pentru aplicarea legii lui Ohm.

Se scrie

$$e = u_R + u_L + u_C.$$

Scrisă în complex se obține

$$\underline{E} = R \underline{I} + j \omega L \underline{I} + \frac{1}{j \omega C} \underline{I}$$

sau

$$\underline{E} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \underline{I};$$

$$\underline{E} = (R + j X) \underline{I} = \underline{Z} \underline{I} .$$

Expresia:

$$\underline{F} = \underline{Z} \underline{I} \quad (5.161)$$

și

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} \quad \text{pentru} \quad \underline{E} = \underline{U}$$

se numește legea lui Ohm în formă complexă.

Mărimile:

$$\underline{Z} = R + j X$$

impedanța complexă și reactanțele

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

s-au definit anterior.

Metoda legii lui Ohm se aplică în cazul circuitelor serie alimentate la o singură sursă de tensiune electromotoare.

Prin problemă se cunosc elementele de circuit R , L , C și tensiunea electromotoare:

$$e = E \sqrt{2} \sin (\omega t + \alpha) .$$

Din expresia tensiunii electromotoare e se obține direct valoarea efectivă a t.e.m. E , pulsația ω și se poate determina t.e.m. complexă $\underline{E} = E e^{j\alpha}$.

Tensiunea electromotoare \underline{E} constituie faza de referință în reprezentarea fazorială.

Curentul debitat de sursă, rezultă din legea lui Ohm

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{E}}{R + j X} = \frac{\underline{E}}{R + j(X_L - X_C)}$$

în care:

R este rezistența legată în serie;

$X_L = \omega L$ - reactanța inductivă;

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ - reactanța capacitivă.

Căderile de tensiune pe elementele din circuit se determină din:

$$\underline{U}_R = R \underline{I}; \underline{U}_L = j X_L \underline{I} \text{ și } \underline{U}_C = - j X_C \underline{I} .$$

Defazajul se calculează cu expresia:

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} .$$

Expresia instantanee a curentului este

$$i = \sqrt{2} \ I \sin (\omega t + \alpha - \varphi) .$$

Puterea activă reactivă și aparentă se deduce din expresia

$$\underline{S} = P + j Q = \underline{E} \underline{I}^* .$$

În final, se trasează în planul complex fazorii tensiunea, curentul și defazajul.

5.8.2. Metoda impedanțelor echivalente

Metoda se folosește în cazul circuitelor electrice derivate, alimentate de o singură sursă de tensiune. Impedanțele legate în paralel se echivalează cu impedanțe legate în serie. Acestea se aplică metoda legii lui Ohm.

Legarea în serie a impedanțelor (fig. 5.86).

Se scrie că tensiunea la borne este egală cu suma căderilor de tensiune pe impedanțe.

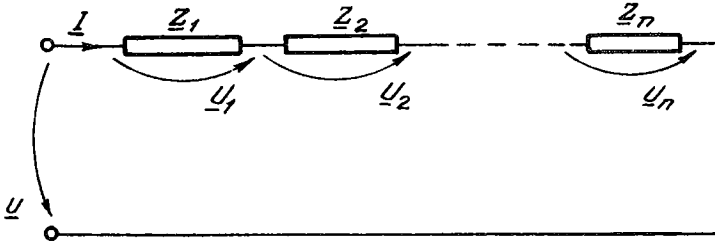


Fig. 5.86. Legarea în serie a impedanțelor.

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \dots + \underline{U}_n.$$

Impedanța echivalentă este:

$$\underline{Z}_s = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \dots + \underline{U}_n}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_2 \underline{I} + \dots + \underline{Z}_n \underline{I}}{\underline{I}}$$

sau

$$\underline{Z}_s = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n. \quad (5.162)$$

Legarea în paralel a impedanțelor (fig. 5.87).

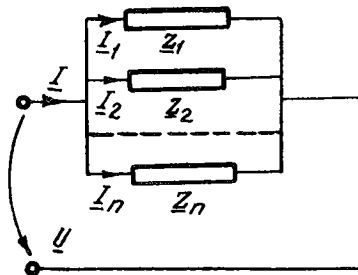


Fig. 5.87. Legarea în paralel a impedanțelor.

Curentul complex \underline{I} se determină din:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \dots + \underline{I}_n.$$

Dar:

$$\underline{U} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = \dots = \underline{Z}_n \underline{I}_n$$

iar impedanța echivalentă este

$$\frac{1}{\underline{Z}_p} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}} + \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}} + \dots + \frac{\underline{I}_n}{\underline{U}}$$

sau

$$\frac{1}{\underline{Z}_p} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_n} \quad (5.163)$$

În cazul în care $n = 2$ rezultă

$$\underline{Z}_p = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad (5.164)$$

Aplicație

Să se rezolve circuitul electric din fig. 5.88 în care:

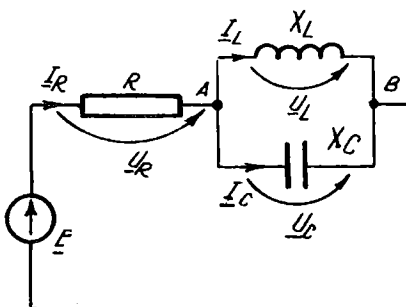


Fig. 5.88.

$$\underline{E} = E = 250 \text{ V}$$

$$R = 40 \, \Omega$$

$$X_L = \omega L = 15 \, \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 10 \, \Omega$$

Impedanța echivalentă a grupului LC rezultă:

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{jX_L (-jX_C)}{j(X_L - X_C)} = \frac{j \cdot 15 (-j \cdot 10)}{j(15 - 10)} = -30 \, j .$$

Impedanța circuitului este

$$\underline{Z} = R + \underline{Z}_{AB} = 40 - 30 \, j$$

Iar

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \, \Omega .$$

Curentul debitat de sursă:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{250}{40 - 30 \, j} = 4 + 3 \, j .$$

Defazajul:

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{-30}{40} = -36^\circ 53' .$$

Curentul prin rezistor:

$$\underline{I}_R = \underline{I} .$$

Expresia instantanee a curentului debitat:

$$i = i_R = 5\sqrt{2} \sin [\omega t - (-36^\circ 53')]]$$

sau

$$i = i_R = 5\sqrt{2} \sin (\omega t + 36^\circ 53') .$$

Căderea de tensiune pe rezistență:

$$\underline{U}_R = R \underline{I} = 40 (4 + j 3) \text{ și } U_R = 200 \text{ V} .$$

Căderile de tensiune pe elementele de circuit L și C.

$$\underline{U}_L = \underline{U}_C = \underline{U}_{AB} = \underline{Z}_{AB} \underline{I} = -30 j (4 + j 3) = 30 (3 - j 4)$$

sau

$$U_{AB} = U_L = U_C = 150 \text{ V} .$$

Curenții prin bobină :

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_{AB}}{j X_L} = \frac{30 (3 - j 4)}{15 j} = -2 (4 + j 3) .$$

Curentul prin condensator:

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{AB}}{-j X_C} = \frac{30 (3 - j 4)}{-10 j} = 3 (4 + j 3) .$$

Verificare:

$$\underline{I}_L + \underline{I}_C = \underline{I} = 4 + j 3 .$$

Puterea aparentă este

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = 250 (4 - 3 j);$$

$$\underline{S} = 1\,000 - 750 j .$$

Puterea activă:

$$P = 1\,000 \text{ W} .$$

Puterea reactivă:

$$Q = - 750 \text{ VAR}$$

Puterea aparentă:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1\,250 \text{ VA} .$$

Circuitul este capacitiv ($Q < 0$).

În fig. 5.89 este reprezentată diagrama fazorială.

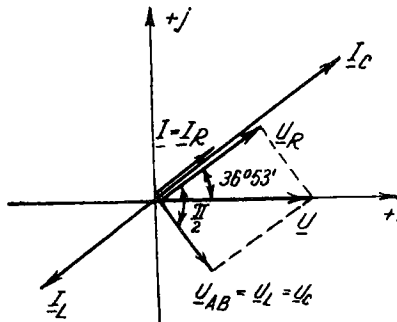


Fig. 5.89.

5.8.3. Metoda teoremelor lui Kirchhoff

Teoremele lui Kirchhoff cunoscute de la regimul de curent continuu se aplică și la circuitele de curent alternativ sinusoidal.

Se vor prezenta ambele teoreme transpuse în complex.

Teorema întâi a lui Kirchhoff aplicată nodului a se exprimă astfel: Suma algebrică a curenților sinusoidali reprezentați în complex care circulă prin laturile legate într-un nod de circuit este egală cu zero.

$$\sum_{k \in a} \underline{I}_k = 0, \quad (5.165)$$

Se scriu cu plus curenții complecși care ies din nod și cu minus, curenții complecși care intră în nod.

Exemplu: Pentru nodul din fig. 5.90 se scrie

$$- \underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 - \underline{I}_4 - \underline{I}_5 = 0.$$

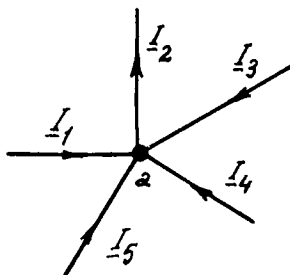


Fig. 5.90.

Teorema a doua a lui Kirchhoff pentru circuite electrice de curent alternativ sinusoidal fără cuplaje magnetice se enunță astfel: suma algebrică

a căderilor de tensiune complexă pe elementele pasive din laturile unui ochi de circuit electric este egală cu suma algebrică a tensiunilor electromotoare complexe din laturile ochiului considerat.

$$\sum_{k \in p} \left[(R_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k}) I_k \right] = \sum_{k \in p} E_k$$

sau

$$\sum_{k \in p} Z_k I_k = \sum_{k \in p} E_k \quad (5.166)$$

în care:

$R_k I_k$ reprezintă căderea de tensiune complexă la bornele rezistorului din latura k ;

$j\omega L_k I_k$ reprezintă căderea de tensiune complexă inductivă la bornele bobinei din latura k ;

$\frac{1}{j\omega C_k} = -\frac{j}{\omega C_k}$ reprezintă căderea de tensiune complexă capacitivă la bornele condensatorului din latura k ;

E_k reprezintă tensiunea electromotoare complexă a sursei ideale din latura k .

Semnele termenilor se adoptă în raport cu sensul de referință al ochiului și curenților din laturi. Ca exemplu, se va scrie pentru ochiul din fig. 5.91 teorema a doua a lui Kirchhoff:

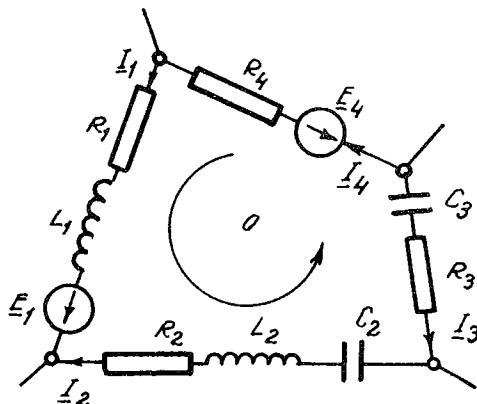


Fig. 5.91.

$$(R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_1 - (R_2 + j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C_2}) \underline{I}_2 - (R_3 - \frac{j}{\omega C_3}) \underline{I}_3 + R_4 \underline{I}_4 =$$

$$= \underline{E}_1 - \underline{E}_4.$$

Ca și în curent continuu, teorema întâi a lui Kirchhoff se aplică de (N-1) ori iar teorema a doua de o ori, în care N reprezintă numărul de noduri din circuitul electric respectiv iar o reprezintă numărul de ochiuri fundamentale din același circuit. Se scriu L ecuații în care conform teoremei lui Euler, numărul de laturi satisface relația:

$$L = N - 1 + o. \quad (5.167)$$

Metoda se folosește la circuitele ramificate cu una sau mai multe surse de tensiune și se aplică astfel:

a. Se determină numărul de noduri, numărul de laturi și numărul de ochiuri fundamentale.

b. Se aleg sensuri de referință arbitrare pentru curenții din laturi.

c. Se aleg sensuri de referință arbitrare pentru ochiurile fundamentale.

d. Se scriu N-1 ecuații cu teorema întâi a lui Kirchhoff și o = L-N+1 ecuații cu teorema a doua.

e. Se verifică rezultatele cu bilanțul puterilor.

f. Se trasează diagrama fazorială în planul complex.

Aplicație

Să se rezolve circuitul electric din fig. 5.92 prin metoda teoremeilor lui Kirchhoff.

Date:

$$R_1 = 2 \Omega ; R_2 = 1 \Omega ; R_3 = 1 \Omega ; \omega L_1 = 4 \Omega ; \frac{1}{\omega C_2} = 4 \Omega ; \frac{1}{\omega C_3} = 3 \Omega ;$$

$$e_1 = 10 \sin (\omega t + \frac{3\pi}{4}) \text{ (V)} ; \underline{E}_1 = 5 (-1 + j) ; e_2 = 12 \sin (\omega t - \frac{\pi}{4}) \text{ (V)} ; \underline{E}_2 = +6 (1 - j).$$

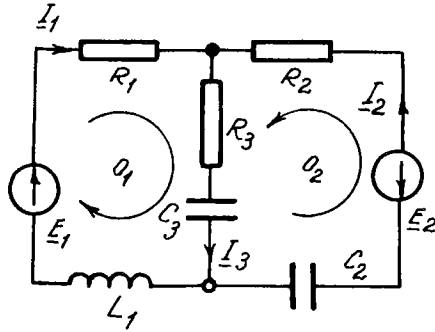


Fig. 5.92.

Rezultatele se vor verifica cu bilanțul puterilor și se va trasa diagrama fazorială.

Cu sensurile curenților și ochiurilor arbitrar alese în fig. 5.92 se scrie:

$$N - 1 = 2 - 1 = 1$$

ecuație cu teorema întâi a lui Kirchhoff și

$$o = L - N + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$$

ecuații cu teorema a doua a lui Kirchhoff.

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0$$

$$(\underline{R}_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 + (\underline{R}_3 - \frac{j}{\omega C_3})\underline{I}_3 = \underline{E}_1$$

$$(\underline{R}_2 - \frac{j}{\omega C_2})\underline{I}_2 + (\underline{R}_3 - \frac{j}{\omega C_3})\underline{I}_3 = -\underline{E}_2$$

Sau prin înlocuire:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0$$

$$(2 + 4j) \underline{I}_1 + (1 - 3j) \underline{I}_3 = 5(-1 + j)$$

$$(1 - 4j) \underline{I}_2 + (1 - 3j) \underline{I}_3 = -6(1 - j)$$

Soluțiile sistemului de ecuații sînt:

$$\underline{I}_1 = j = e^{j\frac{\pi}{2}} \quad \text{și} \quad i_1 = \sqrt{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (A)$$

$$\underline{I}_2 = -1 - j = \sqrt{2} e^{-j\frac{3\pi}{4}} \quad \text{și} \quad i_2 = 2 \sin(\omega t - \frac{3\pi}{4}) \quad (A)$$

$$\underline{I}_3 = -1 = e^{j\pi} \quad \text{și} \quad i_3 = \sqrt{2} \sin(\omega t + \pi) \quad (A)$$

Bilanțul puterilor.

Puterile generate.

Puterea aparentă complexă

$$\underline{S}_g = \underline{E}_1 \underline{I}_1^* - \underline{E}_2 \underline{I}_2^* = 5(-1+j)(-j) - 6(1-j)(-1+j) = 5-7j$$

Puterea activă generată este

$$P_g = \operatorname{Re} \left\{ \underline{S}_g \right\} = 5 \text{ W}.$$

Puterea reactivă generată este

$$Q_g = \operatorname{Im} \left\{ \underline{S}_g \right\} = -7 \text{ VAR}.$$

Puterea aparentă generată:

$$S = \sqrt{P_g^2 + Q_g^2} = \sqrt{5^2 + (-7)^2} = 8,61 \text{ VA}.$$

Puterile consumate.

Puterea activă consumată

$$P_c = \sum_{k=1}^3 R_k I_k^2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = 2 \cdot 1^2 + 1(\sqrt{2})^2 + 1 \cdot 1^2 = 5 \text{ W}$$

egală cu puterea activă generată.

Puterea reactivă consumată

$$Q_c = \sum_{k=1}^3 \left(\omega L_k - \frac{1}{\omega C_k} \right) I_k^2 = \omega L_1 I_1^2 - \frac{1}{\omega C_2} I_2^2 - \frac{1}{\omega C_3} I_3^2 = 4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1^2 -$$

$$- 4 (\sqrt{2})^2 = -7 \text{ VAR}$$

Puterea aparentă consumată

$$S_c = \sqrt{P_c^2 + Q_c^2} = \sqrt{5^2 + (-7)^2} = 8,61 \text{ VA}$$

Diagrama fazorială este prezentată în fig. 5.93.

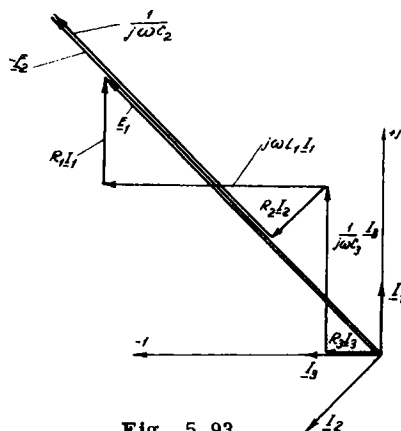


Fig. 5.93.

5.8.4. Metoda superpoziției

Ca și în curent continuu, metoda are la bază superpoziția efectelor. Potrivit acestei superpoziții, curentul electric dintr-o latură a unui circuit de curent alternativ sinusoidal reprezintă suma algebrică a curenților produși de fiecare sursă de t.e.m. din circuit dacă ar acționa singură în rețea.

Se reamintește că se procedează astfel: se menține succesiv în circuit numai o sursă, celelalte surse fiind pasivizate (t.e.m. este nulă dar impedanța sursei neschimbată).

5.8.5. Metoda curenților ciclici

Rezolvarea circuitelor electrice liniare de curent alternativ se poate face mai simplu prin această metodă decât cu metoda teoremelor lui Kirchhoff. De ce? Pentru că numărul ecuațiilor de rezolvat în acest caz este egal cu numărul ochiurilor fundamentale o mai mic ca numărul laturilor L (cazul teoremelor lui Kirchhoff).

Necunoscutele sînt curenții ciclici complecși asociați ochiurilor fundamentale și a căror superpoziție dintr-o latură determină curentul total din latura respectivă.

Sistemul de ecuații scris pentru un circuit compus din două ochiuri este următorul:

$$\underline{Z}'_{11} \underline{I}'_1 + \underline{Z}'_{12} \underline{I}'_2 = \underline{E}'_1 \quad (5.168)$$

$$\underline{Z}'_{21} \underline{I}'_1 + \underline{Z}'_{22} \underline{I}'_2 = \underline{E}'_2$$

În care termenii au următoarele semnificații:

\underline{I}'_1 și \underline{I}'_2 curenții ciclici din ochiurile 1 și 2;

\underline{Z}'_{11} respectiv \underline{Z}'_{22} reprezintă impedențele proprii ale ochiului 1 și ochiului 2; Se calculează ca sumă aritmetică a impedențelor proprii ale elementelor din laturile ochiurilor respective;

$\underline{Z}'_{12} = \underline{Z}'_{21}$ reprezintă impedanța din laturile comune ochiurilor 1 și 2; Se calculează ca sumă algebrică după regula următoare: se adoptă semnul plus când curenții ciclici \underline{I}'_1 și \underline{I}'_2 au același sens prin impedanța respectivă și semnul minus în caz contrar;

\underline{E}'_1 și \underline{E}'_2 reprezintă suma algebrică a tensiunilor electromotoare din laturile ochiului 1 respectiv din laturile ochiului 2; Se adoptă semnul plus pentru tensiunile electromotoare complexe care au același sens cu sensul curentului ciclic și semnul minus în caz contrar.

Pentru utilizarea corectă a metodei se procedează astfel:

- Se aleg ochiurile fundamentale și sensul curentului ciclic prin fiecare ochi fundamental;
- Se scriu ecuațiile sistemului curenților ciclici;
- Se rezolvă sistemul de ecuații obținând curenții ciclici;
- Se determină curenții complecși din laturi prin superpoziția curenților ciclici;
- Se verifică rezultatele cu bilanțul puterilor.

Aplicație

Să se rezolve circuitul electric din fig. 5.94 prin metoda curenților ciclici.

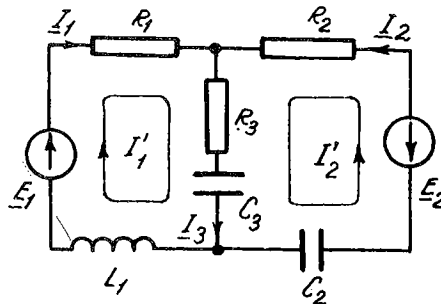


Fig. 5.94.

Date:

$$R_1 = 2 \, \Omega ; R_2 = 1 \, \Omega ; R_3 = 1 \, \Omega ; \omega L_1 = 4 \, \Omega ; \frac{1}{\omega C_2} = 4 \, \Omega ; \frac{1}{\omega C_3} = 3 \, \Omega ;$$

$$e_1 = 10 \sin \left(\omega t + \frac{3\pi}{4} \right) \text{ (V) ; } \underline{E}_1 = 5(-1+j) ; e_2 = 12 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) ; \underline{E}_2 = 6(1-j).$$

a. În fig. 5.94 s-au ales sensurile curenților ciclici și ochiurile fundamentale.

b. Ecuațiile sistemului curenților ciclici sînt:

$$\underline{Z}_{11}' \underline{I}_1' + \underline{Z}_{12}' \underline{I}_2' = \underline{E}_1'$$

$$\underline{Z}_{21}' \underline{I}_1' + \underline{Z}_{22}' \underline{I}_2' = \underline{E}_2'$$

în care:

$$\underline{Z}_{11}' = R_1 + R_3 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_3} = 3 + j$$

$$\underline{Z}_{22}' = R_2 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{1}{j\omega C_3} = 2 - 7j$$

$$\underline{Z}_{12}' = \underline{Z}_{21}' = R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} = 1 - 3j$$

Pentru că în latura comună curenții ciclici \underline{I}_1' și \underline{I}_2' au același sens, impedanțele $\underline{Z}_{12}' = \underline{Z}_{21}'$ se scriu cu plus:

$$(3 + j) \underline{I}_1' + (1 - 3j) \underline{I}_2' = 5 (-1 + j)$$

$$(1 - 3j) \underline{I}_1' + (2 - 7j) \underline{I}_2' = -6 (1 - j)$$

Rezultă curenții ciclici:

$$\underline{I}_1' = j \quad \text{și} \quad \underline{I}_2' = - (1 + j)$$

d. Curenții din laturi se obțin prin superpoziția curenților ciclici.

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' = j; \underline{I}_2 = \underline{I}_2' = - (1 + j); \underline{I}_3 = \underline{I}_1' + \underline{I}_2' = -1$$

e. Aceleași rezultate s-au obținut cu metoda teoremelor lui Kirchhoff (vezi aplicația de la 5.8.3.). Nu mai este deci necesară verificarea cu bilanțul puterilor.

5.8.6. Metoda potențialelor la noduri

Această metodă se utilizează în circuite electrice liniare de curent alternativ, cu noduri puține și fără cuplaje inductive între bobinele circuitului respectiv.

Necunoscutele în număr de $N - 1$ sînt potențialele exprimate în complex ale celor $N - 1$ noduri deoarece pentru cel de al N -lea nod se adoptă potențial de referință egal cu zero.

Pentru un circuit cu $N = 3$ noduri, numărul ecuațiilor care se scriu sînt $N - 1 = 3 - 1 = 2$ ecuații. Ecuațiile sînt

$$\underline{Y}_{11} \underline{V}_1 + \underline{Y}_{12} \underline{V}_2 = \underline{I}'_{sc1} \quad (5.169)$$

$$\underline{Y}_{21} \underline{V}_1 + \underline{Y}_{22} \underline{V}_2 = \underline{I}'_{sc2}$$

în care termenii au următoarele semnificații:

\underline{V}_1 și \underline{V}_2 sînt potențialele exprimate în complex pentru nodul 1 și 2. Cel de al 3-lea nod are potențialul adoptat egal cu zero;

\underline{Y}_{11} și \underline{Y}_{22} sînt admitanțele complexe proprii ale nodurilor 1 și 2. Se calculează ca sumă a admitanțelor complexe ale laturilor care concură în nodul 1 respectiv 2. Se adoptă totdeauna semnul plus;

\underline{Y}_{12} și \underline{Y}_{21} sînt admitanțele complexe comune nodurilor 1 și 2. Se calculează ca sumă a admitanțelor complexe din laturile care unesc direct nodurile 1 și 2. Se adoptă totdeauna semnul minus;

\underline{I}'_{sc1} și \underline{I}'_{sc2} reprezintă curenții complecși de scurtcircuit ai nodului 1 respectiv 2. Se calculează ca sumă a curenților complecși de scurtcircuit ai laturilor care concură în nodul 1 respectiv 2. Se adoptă semnul plus pentru curenții de scurtcircuit care intră în nod și semnul minus pentru cei care ies din nod. Curenții complecși de scurtcircuit ai laturilor pasive sînt nuli.

Curentul complex de scurtcircuit al unei laturi este curentul care ar circula prin latură dacă ar fi scurtcircuitată. Pentru o latură în care există o sursă de tensiune ideală (fig. 5.95) acest curent de scurtcircuit este

$$\underline{I}_{sca} = \frac{\underline{E}_k}{\underline{Z}_k} \quad (5.170)$$

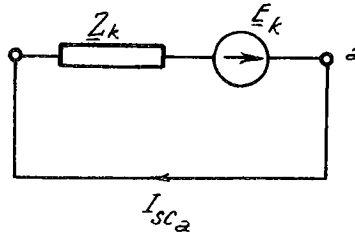


Fig. 5.95. Curentul de scurtcircuit \underline{I}_{sca} .

Necunoscutele principale, curenții complecși din laturi, se calculează cu ajutorul potențialelor complexe ale nodurilor, determinate din sistemul de ecuații (5.169).

În latura 1 legată între nodul 1 și 2 în care este plasată o sursă ideală de tensiune \underline{E}_1 (sensul este de la nodul 1 la 2) și o admitanță \underline{Y}_1 (fig. 5.96), curentul complex este

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 (\underline{E}_1 + \underline{V}_1 - \underline{V}_2). \quad (5.171)$$

Se fac următoarele precizări în legătură cu semnele:

a. Tensiunea electromotoare \underline{E}_1 se scrie cu plus dacă are același sens cu al curentului \underline{I}_1 ; în caz contrar se scrie cu minus;

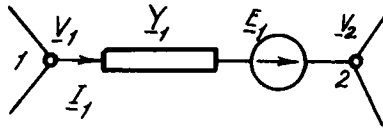


Fig. 5.96.

b. Dacă curentul \underline{I}_1 circulă de la nodul cu potențial \underline{V}_1 la nodul cu potențial \underline{V}_2 , în relație \underline{V}_1 se scrie cu plus și \underline{V}_2 cu minus; contrar, se scrie cu minus.

Metoda potențialelor la noduri se utilizează astfel:

- se alege nodul cu potențial zero;
- se scrie sistemul de ecuații ale potențialelor la noduri de forma (5.169) și se rezolvă sistemul determinându-se necunoscutele, potențialele complexe la noduri;
- se determină curenții din laturi aplicând relația de forma (5.171);
- se verifică rezultatele cu bilanțul puterilor.

Aplicație

Să se rezolve circuitul electric din fig. 5.97 cu metoda potențialelor la noduri.

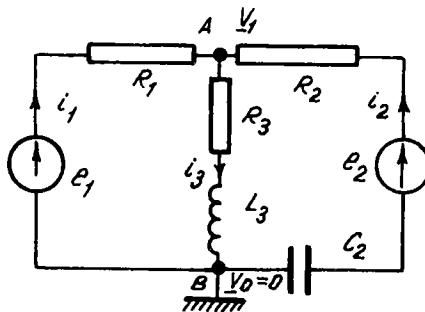


Fig. 5.97.

Date:

$$R_1 = 2 \, \Omega ; R_2 = 5 \, \Omega ; R_3 = 3 \, \Omega ; \omega L_3 = 3 \, \Omega ; \frac{1}{\omega C_2} = 1 \, \Omega ; e_1 = 8\sqrt{2}\sin\omega t \, (\text{V}) ;$$

$$\underline{E}_1 = 8 ; e_2 = 10 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) \, (\text{V}) ; \underline{E}_2 = 5(1 - j) .$$

a. În fig. 5.97 s-a ales potențialul $\underline{V}_0 = 0$ și s-a notat potențialul nodului A cu \underline{V}_1 .

b. Sistemul de ecuații al potențialelor la noduri are $N-1=2-1=1$ ecuații de forma:

$$\underline{Y}_{11} \underline{V}_1 = \underline{I}_{sc1}$$

în care admitanța complexă

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$$

este suma admitanțelor din laturile care se leagă la nodul 1.

Deci

$$\underline{Y}_{11} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}$$

sau

$$\underline{Y}_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} + \frac{1}{R_3 + j\omega L_3}$$

sau

$$\underline{Y}_{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5 - j} + \frac{1}{3 + 3j} = \frac{34 + 16j}{2(3+3j)(5-j)} .$$

Curentul de scurtcircuit este

$$\underline{I}'_{sc1} = \frac{\underline{E}_1}{R_1} + \frac{\underline{E}_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{8}{2} + \frac{5(1-j)}{5-j} = \frac{50 - 18j}{2(5-j)} .$$

Potențialul complex al nodului 1 rezultă

$$\underline{V}_1 = \frac{\underline{I}'_{sc1}}{\underline{Y}_{11}} = 6 \text{ V.}$$

c. Curenții din laturi rezultă:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 (\underline{E}_1 + \underline{V}_0 - \underline{V}_1) = \frac{1}{2} (8 + 0 - 6) = 1 = e^{j0^\circ};$$

$$i_1 = \sqrt{2} \sin \omega t \text{ (A) și } I_1^* = 1;$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_2 (\underline{E}_2 + \underline{V}_0 - \underline{V}_1) = \frac{1}{5-j} [5(1-j) - 6] = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}};$$

$$i_2 = \sqrt{2} \sin (\omega t - \frac{\pi}{2}) \text{ (A) și } I_2^* = j;$$

$$\underline{I}_3 = \underline{Y}_3 (\underline{E}_3 + \underline{V}_1 - \underline{V}_0) = \frac{1}{3+3j} (0 + 6 - 0) = 1-j;$$

$$i_3 = 2 \sin (\omega t - \frac{\pi}{4}) \text{ (A) .}$$

Rezultatele se verifică cu bilanțul puterilor:

$$\sum_{k=1}^3 \underline{E}_k \underline{I}_k^* = \sum_{k=1}^3 R_k I_k^2 + j \sum_{k=1}^3 (\omega L_k - \frac{1}{\omega C_k}) I_k^2$$

sau

$$\underline{E}_1 \underline{I}_1^* + \underline{E}_2 \underline{I}_2^* = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + j\omega L_3 I_3^2 - \frac{j}{\omega C_2} I_2^2$$

sau

$$8 \cdot 1 + 5(1-j)(+j) = 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1^2 + 3(\sqrt{2})^2 + 3j(\sqrt{2})^2 - j \cdot 1^2$$

sau

$$13 + 5j = 13 + 5j.$$

Se constată că puterea activă generată este egală cu puterea activă consumată,

$$P_g = P_c = 13 \text{ W}$$

și puterea reactivă generată este egală cu puterea reactivă consumată,

$$Q_g = Q_c = 5 \text{ VAr}.$$

5.8.7. Metoda generatoarelor echivalente

Un circuit linear complex poate fi echivalat, în raport cu două borne A și B ale sale, printr-un generator echivalent de tensiune complexă \underline{U}_{AB0} și impedanța internă complexă \underline{Z}_{AB0} sau printr-un generator echivalent de curent complex \underline{I}_{ABsc} și admitanță internă complexă \underline{Y}_{AB0} conform fig. 5.98 a și b.

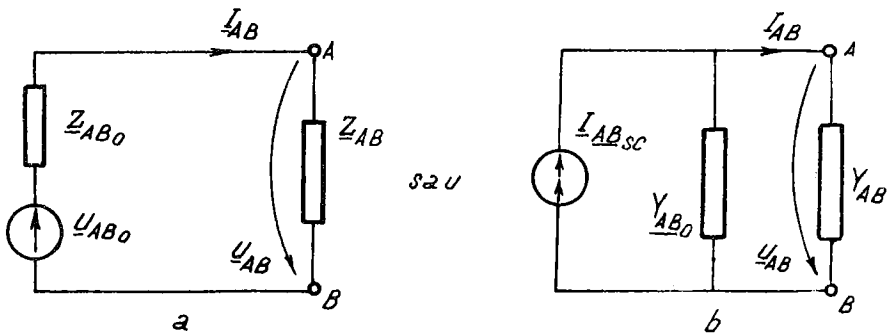


Fig. 5.98. Circuit electric reprezentat prin: a. generator echivalent de tensiune complexă; b. generator echivalent de curent complex.

Circuitul electric poate conține cuplaje magnetice interioare dar în cele ce urmează, studiul se limitează la circuite electrice fără cuplaje magnetice.

Teorema lui Thévenin arată că într-o impedanță \underline{Z}_{AB} legată între bornele A și B (fig. 5.98 a) se naște curentul complex:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB0}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{AB0}}. \quad (5.172)$$

Se mai numește teorema generatorului echivalent de tensiune.

Teorema lui Norton arată că tensiunea între bornele A și B, când se leagă admitanța \underline{Y}_{AB} (fig. 5.98 b), este

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{ABsc}}{\underline{Y}_{AB} + \underline{Y}_{ABo}} \quad (5.173)$$

în care:

\underline{U}_{ABo} este tensiunea complexă de mers în gol a circuitului în raport cu bornele A și B;

\underline{I}_{ABsc} este curentul complex de scurtcircuit al circuitului în raport cu bornele A și B;

\underline{Z}_{ABo} și \underline{Y}_{ABo} sînt impedanța respectiv admitanța complexă a rețelei pasivizate în raport cu bornele A și B.

Generatoarele de tensiune și de curent sînt echivalente între ele. Relațiile de echivalență sînt:

$$(5.174)$$

$$\underline{U}_{ABo} = \underline{Z}_{ABo} \underline{I}_{ABsc} ; \underline{I}_{ABsc} = \underline{Y}_{ABo} \underline{U}_{ABo} \text{ și } \underline{Z}_{ABo} = \frac{1}{\underline{Y}_{ABo}} .$$

Aplicație

Pentru circuitul electric din fig. 5.99 să se determine elementele generatoarelor echivalente de tensiune și curent în raport cu latura pasivă AB

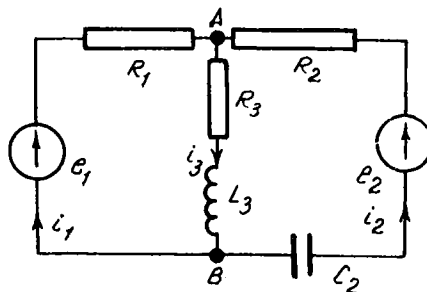


Fig. 5.99.

Date:

$$R_1 = 2\Omega; R_2 = 5\Omega; R_3 = 3\Omega; \omega L_3 = 3\Omega; \frac{1}{\omega C_2} = 1\Omega; e_1 = 8\sqrt{2}\sin\omega t \text{ (V)};$$

$$\underline{E}_1 = 8; e_2 = 10 \sin(\omega t - \frac{\pi}{4}) \text{ (V)}; \underline{E}_2 = 5(1 - j)$$

a. Elementele generatorului echivalent de tensiune.

Tensiunea \underline{U}_{AB0} se calculează din circuitul reprezentat în fig. 5.100.

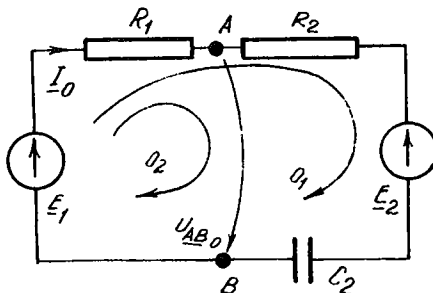


Fig. 5.100.

Se determină mai întâi curentul \underline{I}_0 cu ajutorul teoremei a doua a lui Kirchhoff scrisă pe ochiul o_1 ;

$$(R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}) \underline{I}_0 = \underline{E}_1 - \underline{E}_2.$$

Rezultă curentul \underline{I}_0 ;

$$\underline{I}_0 = \frac{8 - 5(1 - j)}{2 + 5 - j} = \frac{3 + 5j}{7 - j}.$$

Pentru determinarea tensiunii \underline{U}_{AB0} se scrie pentru ochiul o_2 :

$$\underline{U}_{AB0} + R_1 \underline{I}_0 = \underline{E}_1$$

sau

$$\underline{U}_{AB0} = \underline{E}_1 - R_1 \underline{I}_0 = 8 - 2 \frac{3 + 5j}{7 - j} = \frac{50 - 18j}{7 - j}.$$

Impedanța \underline{Z}_{AB0} se determină tot din fig. 5.100:

$$\underline{Z}_{AB0} = \frac{R_1(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2})}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{2(5 - j)}{2 + 5 - j} = \frac{10 - 2j}{7 - j}.$$

Conform teoremei lui Thévenin:

$$\underline{I}_{AB} = \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{AB0}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{AB0}} = \frac{\frac{50 - 18j}{7 - j}}{3 + 3j + \frac{10 - 2j}{7 - j}} = 1 - j.$$

Același rezultat s-a obținut prin metoda potențialelor la noduri (vezi 5.8.6. - Aplicație).

Circuitul echivalent cu generator de tensiune este prezentat în fig. 5.101 a.

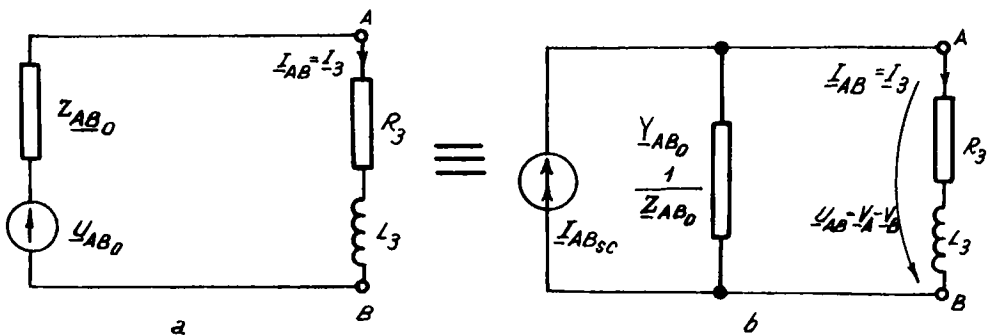


Fig. 5.101.

b. Elementele generatorului echivalent de curent.

Curentul \underline{I}_{ABsc} se determină din circuitul reprezentat în fig. 5.102.

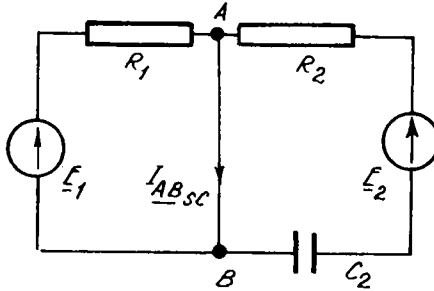


Fig. 5.102.

$$\begin{aligned}\underline{I}_{ABsc} &= \frac{\underline{E}_1}{R_1} + \frac{\underline{E}_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{8}{2} + \frac{5(1-j)}{5-j} = \frac{8(5-j) + 10(1-j)}{10-2j} = \\ &= \frac{50 - 18j}{10 - 2j}.\end{aligned}$$

Se verifică și relația de echivalență:

$$\underline{I}_{ABsc} = \frac{\underline{U}_{ABo}}{\underline{Z}_{ABo}} = \frac{\frac{50 - 18j}{7-j}}{\frac{10-2j}{7-j}} = \frac{50 - 18j}{10 - 2j}.$$

Admitanța:

$$\underline{Y}_{ABo} = \frac{1}{\underline{Z}_{ABo}} = \frac{7-j}{10-2j}.$$

Conform teoremei lui Norton

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{ABsc}}{\underline{Y}_{ABo} + \underline{Y}_{AB}} = \frac{\frac{50 - 18j}{10 - 2j}}{\frac{7 - j}{10 - 2j} + \frac{1}{3 + 3j}} = 6 \text{ V}.$$

Același rezultat s-a obținut prin metoda potențialelor la noduri (vezi 5.8.6 - Aplicație):

$$\underline{U}_{AB} = \underline{V}_A - \underline{V}_B = 6 \text{ V}$$

Circuitul echivalent cu generator de curent este prezentat în fig. 5.101 b.

CAPITOLUL 6

REGIMUL TRANZITORIU IN CIRCUITELE ELECTRICE

În capitolele anterioare s-au studiat circuitele electrice într-un regim permanent de funcționare. Într-un regim permanent de curent continuu tensiunile și curenții au valori constante. În circuitele de curent alternativ sinusoidal sau nesinusoidal, regimul permanent se caracterizează prin valori constante ale amplitudinilor, tensiunilor și curenților precum și a defazajelor dintre acestea.

Ce reprezintă regimul tranzitoriu în circuitele electrice?

În fig. 6.1 s-a reprezentat un circuit electric simplu constituit din legarea în serie a unui rezistor R și a bobinei L la o sursă de curent continuu cu tensiune electromotoare E . Închiderea circuitului se face prin intermediul întrerupătorului \mathcal{J} . La momentul $t = 0$ se închide întrerupătorul \mathcal{J} .

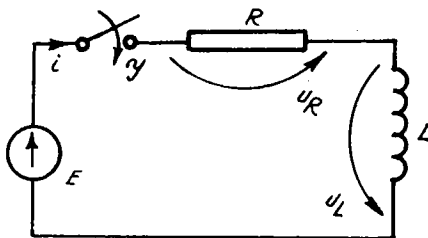


Fig. 6.1. Circuit electric RL în regim tranzitoriu.

După un interval de timp destul de lung - se spune când t este infinit - curentul I devine:

$$i_{t=\infty} = I = \frac{E}{R}$$

adică are o valoare bine definită. Dar înainte de închiderea lui \mathcal{J} curentul era egal cu zero (circuit electric deschis).

Intervalul de timp cuprins între închiderea întrerupătorului $\mathcal{I}(i|_{t=0}=0)$ și $t = \text{infini\textbf{t}}$ ($i|_{t=\infty} = \frac{E}{R}$) se numește interval tranzitoriu. Regimul de funcționare al circuitului se numește regim tranzitoriu.

Regimul tranzitoriu nu se constată numai la închiderea sau deschiderea unui întrerupător pentru alimentarea unui circuit electric. O variație bruscă a tensiunii de alimentare, conectarea sau deconectarea unor elemente de circuit active sau pasive, scurtcircuiturile etc. pot determina regimuri tranzitorii.

Tensiuni și curenți tranzitorii sînt tensiunile și curenții din perioada regimului tranzitoriu. Aceștia depind de timp și se vor nota cu litere mici: u și i .

Caracteristica principală a regimului tranzitoriu de funcționare a unui circuit electric este că totdeauna are loc la trecerea de la un regim permanent la altul.

Stabilirea unui regim permanent are loc întotdeauna după un proces tranzitoriu.

Pentru că regimul permanent este precedat sau se încheie cu un regim tranzitoriu, studiul acestuia din urmă prezintă o importanță deosebită. Din acest motiv, se va studia în continuare regimul tranzitoriu al unor circuite electrice mai des întîlnite: circuitul RL, circuitul RC, alimentate de la surse de curent continuu.

Pentru a crea o imagine cît mai cuprinzătoare a fenomenului tranzitoriu, se va studia intervalul tranzitoriu și în cazul alimentării unui rezistor R cu o tensiune electromotoare de curent continuu. Studiul regimului tranzitoriu se referă la modul în care variază tensiunea și curentul, în funcție de timp, la bornele elementului de circuit sau în circuitul electric respectiv.

Deoarece în intervalul tranzitoriu sînt anumite momente caracteristice, este necesar să se introducă notații pentru aceste momente:

- $t = 0^-$ momentul care precede închiderea (întrerupătorul este încă deschis);
- $t = 0$ momentul în care se produce închiderea întrerupătorului (se consideră durata închiderii egală cu zero);
- $t = 0^+$ momentul în care s-a terminat închiderea întrerupătorului;
- $t = \infty$ momentul la care se ajunge după un interval de timp foarte mare.

Cu aceste precizări se vor studia în continuare circuitele electrice notate mai sus.

6.1. Circuitul R.L (fig. 6.1)

Curentul electric în circuitul RL are următoarele valori:

a. $t = 0^-$ curentul $i(0^-) = 0$ deoarece circuitul electric este deschis (întrerupătorul \mathcal{J} este încă deschis);

b. $t = 0^+$ curentul $i(0^+) = 0$ este de asemenea zero și în momentul în care s-a terminat închiderea întrerupătorului \mathcal{J} la fel ca înaintea închiderii. De ce? Pentru că energia acumulată în câmpul magnetic al bobinei $w_m = \frac{L i^2}{2}$

nu poate avea un salt în variația sa (se numește discontinuitate) deoarece puterea ar trebui să fie extraordinar de mare (infinită). Dar circuitele electrice întâlnite în practică nu conțin surse sau consumatori de putere infinită. Prin urmare:

$$i(0^-) = i(0^+) = 0.$$

Curentul electric printr-o bobină nu variază prin salt (discontinuu) în momentul trecerii de la regim permanent la regim tranzitoriu. În acest caz, se afirmă că în momentul închiderii întrerupătorului \mathcal{J} curentul electric nu variază.

c. $t = \infty$ curentul $i(\infty)$ se stabilizează și devine egal cu

$$i_{t=\infty} = i(\infty) = I = \frac{E}{R}.$$

Tensiunea electrică în circuitul R L are două componente: tensiunea la bornele bobinei L, notată cu u_L , și tensiunea la bornele rezistorului R, notată cu u_R .

Tensiunile u_L și u_R au următoarele valori:

a) $t = 0^-$

- tensiunea $u_L(0^-) = 0$,

- tensiunea $u_R(0^-) = 0$ deoarece circuitul electric este deschis.

b. $t = 0+$

Tensiunea $u_R(0+) = R i(0+) = R \cdot 0 = 0$ deoarece curentul $i(0+) = 0$.

Tensiunea $u_L(0+)$ se deduce din teorema a doua a lui Kirchhoff:

$$u_R(0+) + u_L(0+) = E$$

sau

$$0 + u_L(0+) = E.$$

În momentul imediat închiderii întrerupătorului \mathcal{J} , la bornele bobinei, este o tensiune egală cu tensiunea electromotoare a sursei.

La bornele unei bobine are loc un salt (discontinuitate) de tensiune în momentul trecerii de la regim permanent la regim tranzitoriu.

c. $t = \infty$

Tensiunea

$$u_R(\infty) = R i(\infty) = R I = R \frac{E}{R} = E$$

După un interval de timp foarte mare se ajunge la un regim permanent. La bornele rezistenței R există o tensiune egală cu tensiunea electromotoare a sursei de curent continuu.

Tensiunea $u_L(\infty) = 0$. Tensiunea la bornele bobinei (presupusă ideală) este nulă.

Dacă se grupează aceste date în tabelul 6.1 se obține:

Tabelul 6.1

Momentul t	i	u_R	u_L
$0-$	0	0	0
$0+$	0	0	E
∞	$\frac{E}{R}$	E	0

Expresia matematică a curentului și tensiunii tranzitorii în circuit RL.

Din tabelul de mai sus, se constată că mărimile electrice, curent și tensiune variază în funcție de timp. Fără a prezenta o demonstrație matematică, această variație se exprimă astfel pentru curent:

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (6.1)$$

în care:

$i(t)$ - valoarea instantanee a curentului electric prin circuitul RL la timpul t ;

E - tensiunea electromotoare a sursei de curent continuu;

R - rezistența rezistorului din circuit;

t - timpul. Poate lua diferite valori (Ex.: $t = 0+$ sau $t = \infty$);

e - număr folosit în matematică ($e = 2,73 \dots$);

$\tau = \frac{L}{R}$ - constanta de timp; Se notează cu litera grecească τ (tau). Se măsoară în secunde (s);

L - reprezintă inductivitatea bobinei din circuit.

Referitor la constantă de timp τ trebuie subliniat că această mărime caracterizează viteza de variație a mărimilor tranzitorii în circuitul în care există un regim tranzitoriu. Din punct de vedere teoretic, durata unui proces tranzitoriu este infinită dar în practică se adoptă această durată ca fiind egală cu $t = (4 \div 5) \tau$.

Expresia matematică 6.1 este reprezentată grafic în fig. 6.2 a.

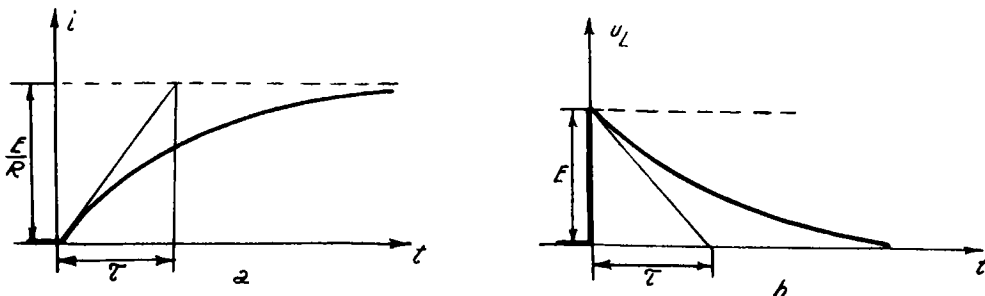


Fig. 6.2. Curentul tranzitoriu (a) și tensiunea tranzitorie (b) în circuitul RL.

Tensiunea electrică la bornele bobinei variază astfel:

$$u_L(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6.2)$$

în care:

$u_L(t)$ - valoarea instantanee a tensiunii electrice la bornele bobinei.
Restul termenilor au fost explicați anterior.

În fig. 6.2 b este reprezentată grafic expresia matematică (6.2).

6.2. Circuitul R.C. (fig. 6.3)

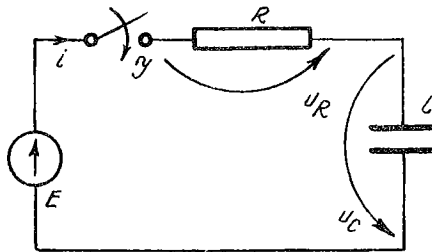


Fig. 6.3. Circuit electric RC în regim tranzitoriu.

Tensiunea electrică în circuitul RC are două componente: tensiunea la bornele condensatorului C notată cu u_C și tensiunea la bornele rezistorului R notată cu u_R .

Tensiunile u_C și u_R au următoarele valori:

a. $t = 0^-$; tensiunea $u_C(0^-) = 0$ deoarece circuitul electric este deschis prin întrerupătorul \mathcal{I} și pe armăturile condensatorului nu există sarcină electrică.

Tensiunea $u_R(0^-) = 0$ de asemenea, circuitul este deschis.

b.t. = 0+; tensiunea $u_c(0+) = 0$ și în momentul în care s-a terminat închiderea întrerupătorului \mathcal{J} la fel ca înaintea închiderii. De ce? Tot din considerente energetice. Dacă tensiunea u_c ar avea un salt de tensiune de la $t=0-$ la $t=0+$, atunci și energia condensatorului

$$w_e = \frac{C u_c^2}{2}$$

trebuie să prezinte un salt în variația sa. Dar la fel ca în cazul bobinei, variația bruscă a energiei implică o putere extraordinar de mare (infinită). La fel și aici, circuitul electric nu are o sursă de putere infinită. Prin urmare:

$$u_c(0-) = u_c(0+) = 0$$

iar în general

$$u_c(0-) = u_c(0+).$$

Tensiunea electrică la bornele condensatorului nu variază prin salt (discontinuu) în momentul trecerii de la regim permanent la regim tranzitoriu.

În acest caz, se spune că în momentul închiderii întrerupătorului \mathcal{J} , tensiunea electrică de la bornele condensatorului nu variază.

Tensiunea $u_R(0+)$ se deduce din teorema a doua a lui Kirchhoff:

$$u_R(0+) + u_c(0+) = E$$

dar

$$u_c(0+) = 0$$

și rezultă

În momentul imediat închiderii întrerupătorului \mathcal{J} , la bornele rezistorului este o tensiune egală cu tensiunea electromotoare a sursei.

La bornele unui rezistor dintr-un circuit RC, are loc un salt (discontinuu) de tensiune în momentul trecerii de la regim permanent la regim tranzitoriu.

c. $t = \infty$

Tensiunea

$$u_R(\infty) = R i(\infty) = R \cdot 0 = 0$$

deoarece după un timp foarte mare, curentul electric într-un circuit RC devine zero.

Tensiunea

$$u_C(\infty) = E;$$

la bornele condensatorului C, există o tensiune egală cu tensiunea electromotoare a sursei de curent continuu.

Curentul electric într-un circuit RC are următoarele valori:

a. $t = 0^-$ curentul $i(0^-) = 0$ deoarece circuitul electric este deschis de întrerupătorul \mathcal{J} .

b. $t = 0^+$ curentul

$$i(0^+) = \frac{u_R(0^+)}{R} = \frac{E}{R}$$

deoarece în momentul imediat următor închiderii întrerupătorului \mathcal{J} , tensiunea la bornele rezistorului

$$u_R(0^+) = E$$

prezintă un salt .

Curentul electric printr-un circuit RC variază prin salt (discontinuu) în momentul trecerii de la regimul permanent la regimul tranzitoriu.

c. $t = \infty$, curentul $i(\infty) = 0$; după un timp foarte mare, prin circuit nu se mai află purtători de sarcină în mișcare adică curentul a devenit nul; condensatorul s-a "încărcat" cu sarcini electrice.

Dacă se grupează datele în tabelul 6.2 se obține:

Tabelul 6.2.

momentul t	i	u_R	u_C
0-	0	0	0
0+	$\frac{E}{R}$	E	0
∞	0	0	E

Expresia matematică a curentului și tensiunii tranzitorii într-un circuit RC. Din tabelul de mai sus se constată că și în circuitul RC, mărimile electrice curent și tensiune variază în funcție de timp.

Fără demonstrație matematică, această variație se exprimă pentru tensiunea electrică de la bornele condensatorului astfel :

$$u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (6.3)$$

în care:

- $u_C(t)$ - valoarea instantanee a tensiunii electrice de la bornele condensatorului în circuitul RC, la timpul t;
- E - tensiunea electromotoare a sursei de curent continuu;
- t - timpul (Ex.: $t = 0+$, $t = \infty$ sau $t = 3$ sec);
- e - număr folosit în matematică ($e = 2,73 \dots$);
- $\tau = RC$ - constanta de timp (R - este rezistența rezistorului iar C reprezintă capacitatea condensatorului din circuitul RC).

Expresia matematică (6.3) este reprezentată grafic în fig. 6.4 a.

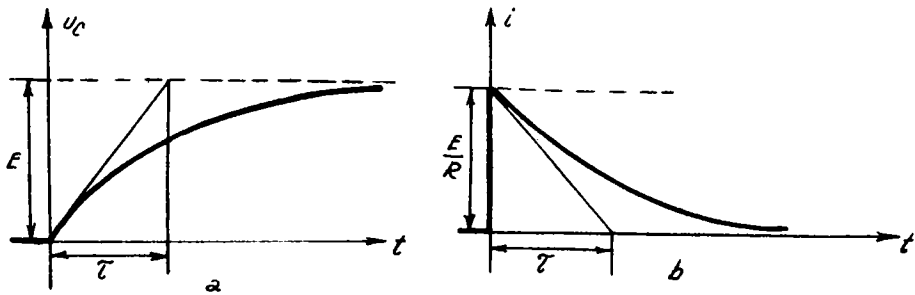


Fig. 6.4. Tensiunea tranzitorie (a) și curentul tranzitoriu (b) în circuitul RC.

Curentul electric prin circuitul RC variază astfel

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6.4)$$

în care:

$i(t)$ - valoarea instantanee a curentului electric prin circuitul RC.

Celalți termeni au fost explicați mai sus.

În fig. 6.4 b este reprezentată grafic expresia matematică (6.4).

6.3. Circuitul R (fig. 6.5)

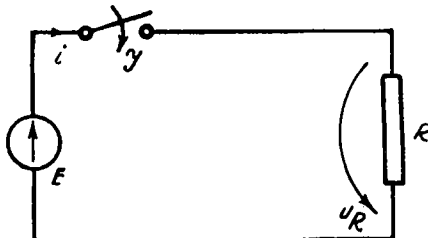


Fig. 6.5. Circuitul electric R în regim tranzitoriu.

Pentru acest circuit, se va studia variația curentului și tensiunii de la bornele rezistorului u_R în perioada tranzitorie.

Tensiunea electrică u_R și curentul i au următoarele valori:

a. $t = 0^-$; tensiunea $u_R(0^-) = 0$ deoarece circuitul electric este deschis prin întrerupătorul \mathcal{Y} .

Curentul $i(0^-) = 0$ din aceleași considerente.

b. $t = 0^+$; tensiunea $u_R(0^+) = E$. Se obține scriind teorema a doua a lui Kirchhoff.

Curentul

$$i(0^+) = \frac{u_R(0^+)}{R} = \frac{E}{R} .$$

c. $t = \infty$; tensiunea

$$u_R(\infty) = E$$

iar curentul electric

$$i(\infty) = \frac{E}{R}$$

aceleași valori ca în momentul $t = 0^+$.

Tensiunea și curentul într-un circuit R , variază prin salt (discontinuu) în momentul trecerii de la regim permanent la regim tranzitoriu (și invers).

Expresiile matematice pentru tensiune și curent se scriu sub forma:

$$u_R = E \quad \text{și} \quad i = \frac{E}{R} . \quad (6.5)$$

Reprezentarea grafică este conform fig. 6.6 a și b.

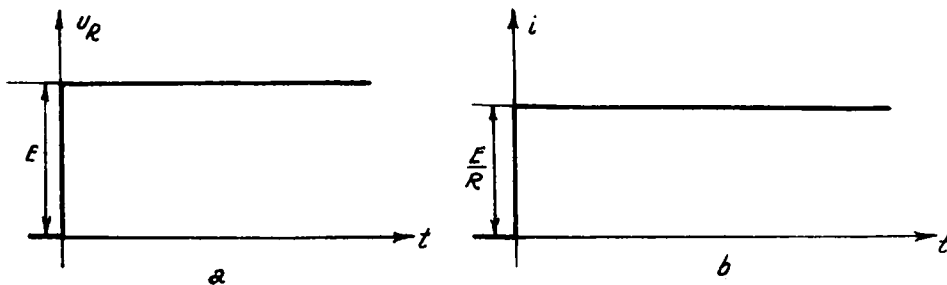


Fig. 6.6. Tensiunea tranzitorie (a) și curentul tranzitoriu (b) într-un circuit R.

OBSERVATII:

1. În primul moment al închiderii unui circuit, o bobină echivalează cu o întrerupere de circuit iar un condensator echivalează cu un scurtcircuit.

2. La deschiderea unui circuit care conține o bobină, se formează un arc electric între contactele întrerupătorului deoarece curentul electric într-un circuit RL nu prezintă discontinuitate. În practică, se folosesc scheme de protecție împotriva arcului electric și a arderilor de contacte. În cazul întrerupătoarelor statice (Ex.: tranzistor) pericolul este și mai mare deoarece poate distruge elementul de comutație statică prin străpungere.

3. În circuitele electrice reale nu se obțin salturile ideale prezentate deoarece elementele de circuit R, L și C nu sînt ideale; saltul de curent sau tensiune este determinat de elementul de circuit predominant în circuit.

6.4. Aplicații

Aplicația 1

1. Să se reprezinte grafic curba de variație în timp a curentului în înfășurarea releului din fig. 6.7.

2. Să se determine timpul de anclanșare și de declanșare al releului.

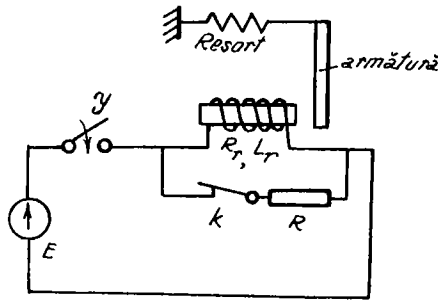


Fig. 6.7.

Date:

$$R_r = 400 \, \Omega ; L_r = 6 \, \text{H} ; R = 400 \, \Omega .$$

- Curentul de anclanșare $I_{\text{an}} = 12 \, \text{mA}$.

- Curentul de declanșare $I_{\text{decl}} = 8 \, \text{mA}$.

- Tensiunea de alimentare $E = 12 \, \text{V}$.

Regimul de funcționare al releului este comandat de întrerupătorul \mathcal{Y} astfel ca:

- releul să fie închis pe timpul $t_1 = 45 \, \text{ms}$;

- releul să fie deschis pe timpul $t_d = 30 \, \text{ms}$.

Ciclul de funcționare $t_f = t_1 + t_d = 45 + 30 = 75 \, \text{ms}$.

NOTA:

Contactul k aparține releului și este închis când releul nu este atras.

Inductivitatea releului $L_r = \text{constantă}$.

REZOLVARE:

1. La închiderea întrerupătorului \mathcal{Y} , releul este anclanșat și deschide contactul k . Resortul impune eliberarea armăturii la întreruperea curentului prin înfășurarea releului.

Circuitul electric în care este plasată înfășurarea releului este un circuit $R L$. Deci, curentul va crește progresiv conform relației

$$i_{\text{an}}(t) = \frac{E}{R_r} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}) \quad (6.6)$$

în care constanta de timp $\tau_1 = \frac{L_r}{R_r}$.

Cînd atinge valoarea $I_{an} = 12 \text{ mA}$, armătura este atrasă.

La deschiderea întrerupătorului \mathcal{J} , curentul va scăde progresiv dar relația este de altă formă:

$$i_{decl}(t) = I' e^{-\frac{t'}{\tau_2}} \quad (6.7)$$

în care

$$\tau_2 = \frac{L_r}{R + R_r}$$

iar t' se determină din momentul deschiderii întrerupătorului \mathcal{J} .

Cînd se ajunge la valoarea $I_{decl} = 8 \text{ mA}$, armătura este eliberată.

Pentru reprezentarea curbei de variație ascendentă a curentului se înlocuiește în relația (6.6) și se obține

$$i_{an}(t) = \frac{12}{400} (1 - e^{-\frac{t}{15}}) = 30 (1 - e^{-\frac{t}{15}}) \text{ (mA)}.$$

Constanta de timp

$$\tau = \frac{L_r}{R_r} = \frac{6}{400} = 0,015 \text{ s} = 15 \text{ ms}.$$

Pentru diverse valori ale momentului t , se determină valoarea curentului $i(t)$. Rezultatele sînt trecute în tabelul 6.3.

Tabelul 6.3.

$t \text{ (ms)}$	0	15	30	45
$e^{-\frac{t}{15}}$	1	0,37	0,135	0,05
$i(t) \text{ (mA)}$	0	18,9	26,0	28,5

Reprezentarea grafică a variației curentului crescător $i(t)$ (fig. 6.8 curba a) s-a făcut pentru intervalul de timp în care întreruptorul \mathcal{J} este închis, adică pentru $t = t_1 = 45$ ms. Curentul după 45 ms capătă valoarea de $I_{an45} = 28,5$ mA determinată din curba a (punctul k).

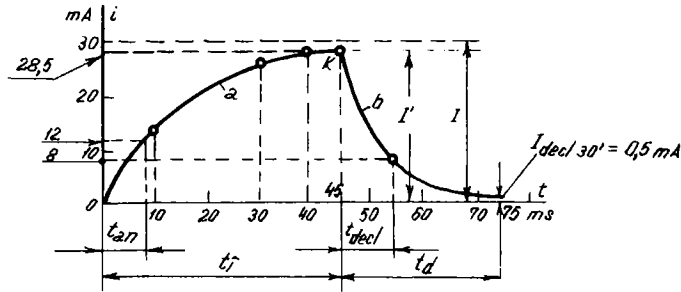


Fig. 6.8.

Dacă întreruptorul \mathcal{J} nu s-ar deschide după 45 ms atunci curentul ar continua să crească pînă la valoarea $I = 30$ mA.

La deschiderea întreruptorului \mathcal{J} , curba de variație descendentă a curentului este descrisă de relația (6.7).

Prin înlocuire se obține:

$$i = I' e^{-\frac{t'}{\tau_2}} = 28,5 e^{-\frac{t'}{7,5}}$$

deoarece

$$\tau_2 = \frac{L_r}{R + R_2} = \frac{6}{400 + 400} = 0,0075 \text{ s}$$

sau

$$\tau_2 = 7,5 \text{ ms} \text{ și } I' = I_{an45} = 28,5 \text{ mA}$$

Analog, rezultatele sînt trecute în tabelul 6.4.

Tabelul 6.4.

$t' \text{ (ms)}$	0	7,5	15	30
$e^{-\frac{t'}{7,5}}$	1	0,37	0,135	0,018
$i(t) \text{ (mA)}$	28,5	10,5	3,85	0,52

Reprezentarea grafică a variației curentului descrescător $i_{\text{decl}}(t)$ s-a făcut tot în fig. 6.8. curba b.

În intervalul $t' = t_d = 30 \text{ ms}$, întreruptorul \mathcal{V} este deschis. Curentul capătă valoarea $I_{\text{decl } 30'} = 0,5 \text{ mA}$ determinată din curba b.

2. Timpul de anclanșare al releului se determină din reprezentarea grafică (fig. 6.8 curba a).

Pentru

$$i_{\text{an}} = 12 \text{ mA}$$

rezultă

$$t_{\text{an}} = 8 \text{ ms}.$$

Analog se determină timpul de declanșare. Din fig. 6.8 curba b se obține:

Pentru

$$i_{\text{decl}} = 8 \text{ mA}$$

rezultă

$$t_{\text{decl}} = 9,5 \text{ ms}.$$

OBSERVAȚII:

1. La bornele înfășurării releului și în general la bornele unei bobine se leagă în paralel o rezistență pentru a diminua tensiunea electromotoare de autoinducție care apare în înfășurarea bobinei și pentru a înlătura arcul electric dintre contactele întreruptorului din circuit. O tensiune electromotoare de autoinducție prea mare poate străpunge izolația înfășurării releului.

2. Cu cât rezistența legată în paralel este mai mică, cu atât timpul de declanșare al releului se mărește (crește constanta de timp).

3. Pentru a micșora timpul de anclanșare a unui releu, se conectează în serie cu înfășurarea releului o rezistență legată în paralel cu un contact al acestui releu; contactul este închis când releul este declanșat și invers (fig. 6.9).

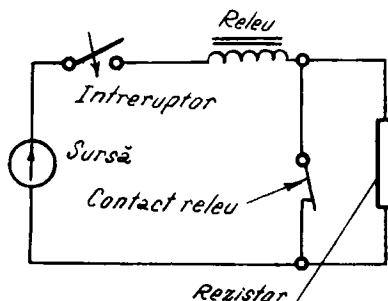


Fig. 6.9.

Aplicația 2

Un circuit electric compus dintr-un condensator C și un rezistor R_1 , legate în serie, este conectat cu ajutorul comutatorului k (poziția 1) la o sursă de curent continuu cu tensiunea electromotoare E și rezistența internă neglijabilă. După un timp foarte lung (condensatorul C este "încărcat") comutatorul k trece în poziția 2 și condensatorul este "descărcat" prin rezistența R_2 (fig. 6.10). Condensatorul este inițial neîncărcat.

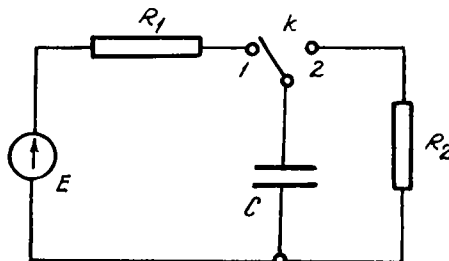


Fig. 6.10.

Se cere:

a. Reprezentarea grafică a variației tensiunii și curentului condensatorului în perioada tranzitorie de încărcare și de descărcare a condensatorului.

După cât timp de la trecerea comutatorului k în poziția 2, tensiunea la bornele lui R_2 atinge valoarea de 50 V?

Date:

$$R_1 = 400 \, \Omega ; C = 10 \, \mu\text{F} ; R_2 = 2000 \, \Omega ; E = 120 \, \text{V}.$$

a. Încărcarea condensatorului

Tensiunea electrică la bornele condensatorului C variază conform relației (6.3):

$$u_c = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right).$$

Înlocuind cu datele problemei se obține

$$u_c = 120 \left(1 - e^{-\frac{t}{4}} \right) \quad (\text{V}) \quad (6.8)$$

în care constanta de timp

$$\tau_1 = R_1 C = 400 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 4 \cdot 10^{-3} \, \text{s}$$

respectiv

$$\tau_1 = 4 \, \text{ms}.$$

În relația (6.8), t este exprimat în milisecunde.

Pentru diverse valori ale momentului t , se calculează cu relația (6.8) tensiunea la bornele condensatorului u_c . Rezultatele sînt trecute în tabelul 6.5.

Tabelul 6.5.

t (ms)	0	2	4	8	12	16
$e^{-\frac{t}{\tau_1}}$	1	0,61	0,37	0,136	0,05	0,018
u_c (V)	0	47	75	104	114	118
i_c (mA)	300	183	111	40	15	5

Tot în tabelul 6.5 s-au trecut valorile curentului de încărcare al condensatorului C, calculate conform relației (6.4):

$$i_c = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

sau

$$i_c = \frac{120}{400} e^{-\frac{t}{4}} \quad (A) \text{ sau } i_c = 300 e^{-\frac{t}{4}} \quad (mA) \quad (6.9)$$

Reprezentarea grafică a tensiunii la bornele condensatorului u_c - relația (6.8)-și a curentului de încărcare a condensatorului i_c - relația (6.9)-este redată în fig. 6.11 a.

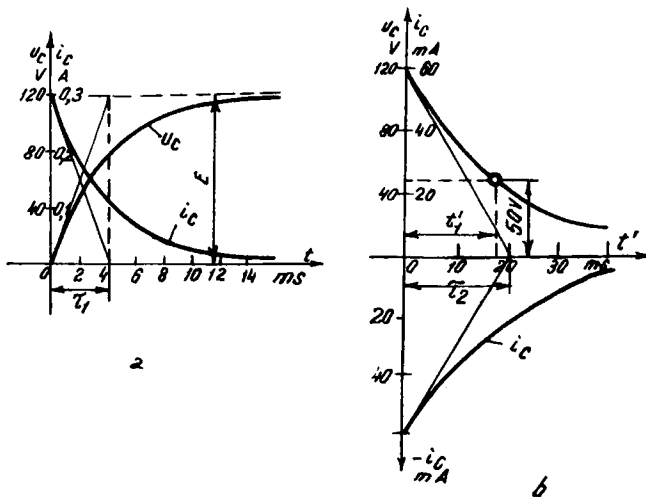


Fig. 6.11.

b. Descărcarea condensatorului

La trecerea comutatorului k în poziția 2, apare curentul de descărcare prin rezistența R_2 , variabil în timp.

De asemenea, tensiunea la bornele condensatorului se modifică în timp

La descărcare, tensiunea electrică la bornele condensatorului C variază astfel:

$$u_c = E e^{-\frac{t'}{\tau_2}} = 120 e^{-\frac{t'}{20}} \quad (V) \quad (6.10)$$

în care constanta de timp la descărcare

$$\tau_2 = R_2 C = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 2000 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

sau

$$\tau_2 = 20 \text{ ms.}$$

Curentul de descărcare este orientat în sens opus curentului de încărcare și se va scrie cu semnul minus.

Variația este următoarea:

$$i_c = -\frac{u_c}{R} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t'}{\tau_2}} = -\frac{120}{2000} e^{-\frac{t'}{20}} \quad (A)$$

sau

$$i_c = -60 e^{-\frac{t'}{20}} \quad (\text{mA})$$

Reprezentarea grafică a celor două mărimi, tensiunea la bornele condensatorului și curentul în procesul tranzitoriu de descărcare, este redată în fig. 6.11 b.

b. Din reprezentarea grafică a tensiunii electrice de la bornele condensatorului - egală cu tensiunea la bornele rezistorului R_2 - în procesul de descărcare, se obține timpul $t'_1 = 17 \text{ ms}$ pentru $u_{c1} = 50 \text{ V}$.

OBSERVATII:

1. Dacă comutatorul k se comută de pe poziția 1 pe poziția 2 și invers, la intervale de 10 ms, variația tensiunii la bornele comutatorului C are loc conform fig. 6.12.

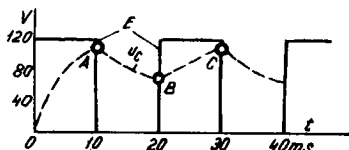


Fig. 6.12.

Fenomenul are următoarea evoluție:

La prima conectare a sursei (condensatorul C este presupus descărcat), tensiunea crește după curba OA.

După comutarea lui k , are loc procesul descărcării condensatorului; tensiunea scade după curba AB. Curba următoare după care se face încărcarea - curba BC - este analoagă cu curba OA dar de această dată procesul de încărcare va începe de la o tensiune inițială diferită de zero. Curba de încărcare și descărcare periodică obținută este o curbă în dinți de fierăstrău.

2. În tehnică se folosește frecvent ca sursă de curent continuu o sursă de curent alternativ prevăzută cu un dispozitiv denumit redresor. Tensiunea la bornele de ieșire ale redresorului are un caracter pulsatoriu (fig. 6.13 linia continuă). Dacă la bornele redresorului se conectează un condensator, tensiunea variază conform liniei punctate din fig. 6.13.



Fig. 6.13. Nivelarea pulsațiilor de tensiune redresată.

Condensatorul nivelează pulsațiile de tensiune dându-le caracter continuu.

CAPITOLUL 7

CIRCUITE NELINIARE IN REGIM SINUSOIDAL

Un circuit electric de curent alternativ sinusoidal este neliniar cînd conține cel puțin un element de circuit neliniar.

Elemente neliniare de curent alternativ sinusoidal sînt: rezistorul neliniar, bobina neliniară, condensatorul neliniar.

Se vor prezenta aceste elemente neliniare și conexiuni simple ale lor alimentate din surse de tensiuni electromotoare sinusoidale.

7.1. Rezistorul neliniar

Acest element de circuit a fost prezentat în capitolul 3.

Tot în acest capitol s-au indicat principalele rezistoare neliniare: lămpi cu incandescență, termistoare, varistoare, diodaelectronică, dioda semiconductoră, dioda Zener, dioda tunel. O răspîndire largă în aplicațiile practice o are dioda semiconductoră. Din acest motiv, se va prezenta acest element de circuit neliniar și circuite electrice în care se utilizează dioda semiconductoră.

7.2. Dioda semiconductoră

Un astfel de element neliniar este nesimetric; pentru un sens al curentului prezintă o rezistență diferită de aceea pe care o prezintă în sensul opus. Caracteristicile diodelor semiconductoră cu germaniu (Ge) și cu siliciu (Si) sînt prezentate în fig. 7.1 .

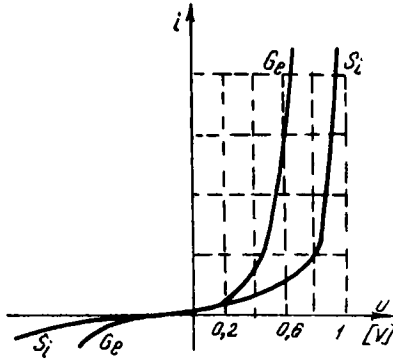


Fig. 7.1. Caracteristicile diodelor semiconductoare (Ge și Si).

Se constată o creștere foarte mare a curentului pentru tensiuni mici aplicate la bornele diodei (caracteristica din cadranul I). Acest curent este curentul direct iar tensiunea se numește tensiune directă.

Curentul direct este de ordinul miliamperilor (poate atinge valori și mai mari, zeci, sute de amperi) iar tensiunea directă este de 0,1 V... 0,7 V. Când dioda funcționează după caracteristica din cadranul III, curentul prin diodă crește foarte puțin pentru tensiuni foarte mari aplicate la bornele diodei. Acest curent este curentul invers și atinge valori de ordinul microamperilor, iar tensiunea se numește tensiune inversă și poate ajunge la sute de volți.

Dacă dioda se utilizează într-un circuit în care curentul direct este mare în comparație cu curentul invers iar tensiunea inversă este mare în comparație cu tensiunea directă (se mai numește tensiune de polarizare directă) atunci se neglijează tensiunea directă și curentul invers. O astfel de diodă este o diodă ideală. Caracteristica idealizată este prezentată în fig. 7.2 și reprezintă un exemplu de liniarizare pe porțiuni a unei caracteristici de element neliniar.

Dioda se poate asemana cu un întreruptor închis când funcționează în cadranul I și deschis în cadranul III. Acesta este motivul pentru care dioda semiconductoare constituie un element de comutație statică.

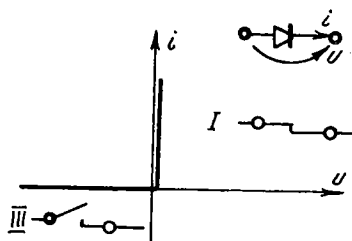


Fig. 7.2. Caracteristica idealizată a diodei semiconductoare.

Se constată că rezistența diodei ideale este nulă când dioda conduce și infinită când dioda semiconductoare este blocată. O aplicație foarte răspândită în practică o constituie circuitul nelinier cu diodă semiconductoare pentru transformarea tensiunii alternative în tensiune continuă. Circuitul se numește:

7.3. Redresorul electric

Acesta se compune din sursa de tensiune electromotoare alternativă e , dioda semiconductoare D considerată ideală și rezistența de sarcină R (fig. 7.3.).

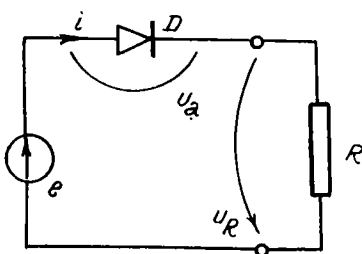


Fig. 7.3. Redresorul electric monoalternanță.

Funcționarea circuitului electric de redresare se desfășoară astfel: în prima semiperioadă a tensiunii electromotoare alternative sinusoidale (fig.

7.4. a)

$$e = E_m \sin \omega t,$$

dioda este polarizată în sens direct (cadrantul I) iar curentul în circuit este

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t.$$

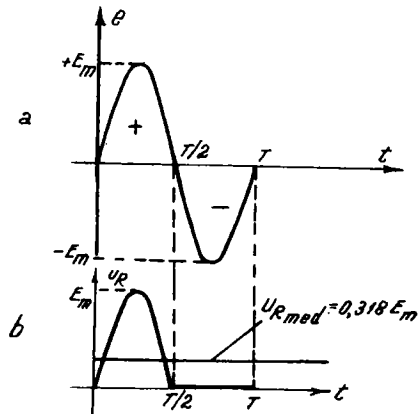


Fig. 7.4. Variația tensiunii electromotoare a sursei (a) și tensiunii redresate (b) la redresorul monoalternanță.

Tensiunea la bornele rezistenței de sarcină u_R se determină cu teorema a doua a lui Kirchhoff scrisă pe ochiul o:

$$u_R + u_a = e. \quad (7.1)$$

Dar pentru că dioda s-a considerat ideală ($u_a = 0$) rezultă (fig.7.4 b)

$$u_R = e. \quad (7.2)$$

În semiperioada următoare, tensiunea electromotoare este negativă ($e < 0$) iar dioda semiconductoră nu conduce; se spune că este blocată sau

întreruptorul static este deschis (fig. 7.4 a). Curentul prin circuit și tensiunea la bornele rezistenței R sînt nule.

Pentru această semiperioadă $u_R = 0$ (fig. 7,4 b).

În continuare, fenomenul fiind periodic, funcționarea se repetă.

Valoarea medie a tensiunii redresate (componenta de curent continuu) este

$$U_{R_{med}} = \frac{E_m}{\pi} = 0,318 E_m. \quad (7.3)$$

Acest circuit electric de redresare, pentru că redresează o singură alternanță dintr-o perioadă, se numește redresor monoalternanță.

Pentru redresarea ambelor alternanțe se folosește circuit electric de redresare dublă alternanță: redresorul dublă alternanță. După schema de utilizare, acest tip de redresor este cu priză mediană și în punte.

Redresorul cu priză mediană (fig. 7.5) se compune din două surse de tensiune electromotoare alternativ sinusoidale e_1 și e_2 (generate într-un transformator cu priză mediană), două diode semiconductoare D_1 și D_2 și o rezistență de sarcină R.

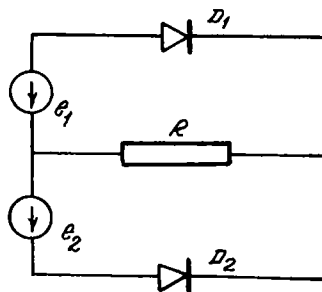


Fig. 7.5. Redresorul cu priză mediană.

Tensiunile electromotoare e_1 și e_2 sînt în opoziție de fază (fig. 7.6 a și b) astfel că diodele D_1 și D_2 conduc pe rînd și pe durata unei semiperioade.

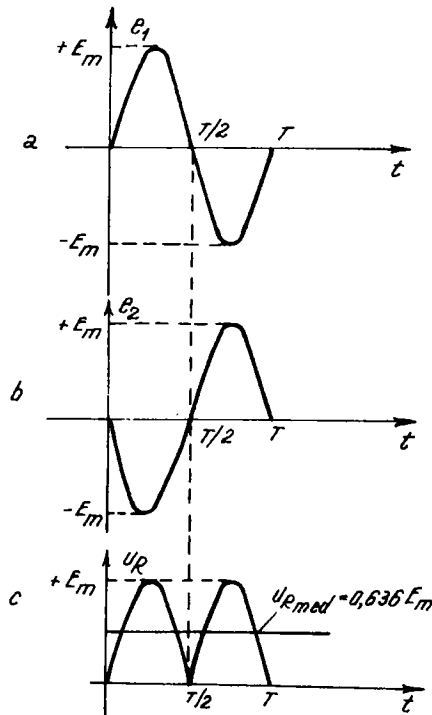


Fig. 7.6. Variația tensiunii electromotoare a sursei (a și b) și tensiunii redresate (c) la redresorul cu priză mediană.

Tensiunea la bornele rezistenței de sarcină este pulsatorie dar valoarea medie a tensiunii redresate este dublă față de redresorul monoalternanță (fig. 7.6 c):

$$U_{R \text{ med}} = \frac{2 E_m}{\pi} = 0,636 E_m \quad (7.4)$$

Redresorul în punte (fig. 7.7) se compune dintr-o sursă de tensiune electromotoare e , patru diode semiconductoare ($D_1 \div D_4$) și rezistența de sarcină R .

Funcționarea este următoarea (fig. 7.8): în prima semiperioadă, diodele D_1 și D_4 sînt polarizate direct și pentru că sînt considerate ideale,

tensiunea la bornele rezistenței de sarcină u_R este egală cu tensiunea electromotoare e :

$$u_R = e$$

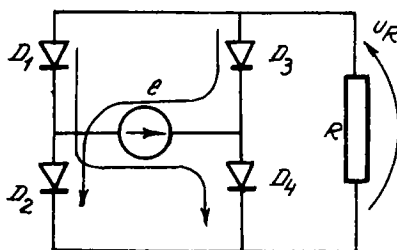


Fig. 7.7. Redresorul în punte.

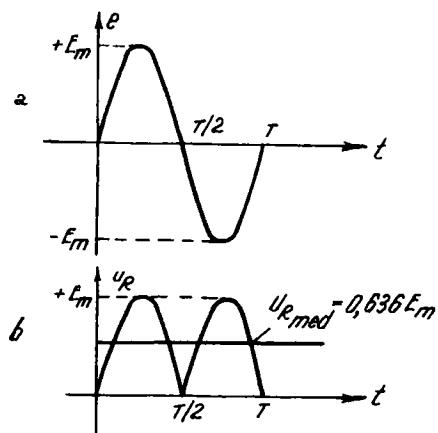


Fig. 7.8. Variația tensiunii electromotoare a sursei (a) și tensiunii redresate (b) la redresorul în punte.

Diodele D_2 și D_3 nu conduc pentru că sînt polarizate invers (sînt "întrerupte").

În semiperioada următoare vor conduce diodele D_2 și D_3 iar D_1 și D_4 vor fi blocate; și în acest caz vom avea

$$u_R = e.$$

Tensiunea la bornele rezistenței de sarcină u_R , respectiv curentul prin rezistorul R, își păstrează sensul ca în prima semiperioadă. Procesul se repetă, fenomenul fiind periodic.

Valoarea medie (componenta de curent continuu) este și aici dublă față de redresorul monoalternanță (fig. 7.8 b):

$$U_{R_{med}} = \frac{2 E_m}{\sqrt{2}} = 0,636 E_m \quad (7.5)$$

PRECIZARI:

1. Redresorul electric reprezintă o parte componentă a unei surse de curent continuu (obținută prin transformarea energiei unei surse de curent alternativ sinusoidal). Pentru circuite electronice, sursa de curent continuu mai conține: filtrul de netezire a formei de undă pulsatorie și stabilizatorul tensiunii redresate și filtrate.

2. Tensiunea anodică de polarizare directă trebuie să ajungă la câteva zecimi de volți pentru a obține valori importante pentru curentul direct. Această tensiune anodică se numește tensiune de prag și are următoarele valori:

- diodă cu germaniu $0,2 \dots 0,4 \text{ V};$
- diodă cu siliciu $0,5 \dots 0,7 \text{ V}.$

Pentru tensiuni inferioare tensiunii de prag, dioda se prezintă ca un întreruptor deschis.

7.4. Bobina neliniară

Bobina cu miez feromagnetic din componența releelor, electromagneților, transformatoarelor și mașinilor electrice, constituie un element neliniar în circuitele de curent alternativ sinusoidal. Considerăm o bobină cu miez feromagnetic compusă din N spire și rezistența electrică r (fig. 7.9).

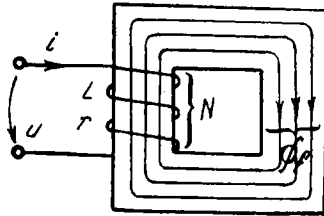


Fig. 7.9. Bobina cu miez feromagnetic alimentată cu tensiunea u .

La bornele acestei bobine se aplică o tensiune electrică de alimentare sinusoidală a cărei valoare instantanee este u .

În regim permanent sinusoidal, prin bobină se va stabili curentul de valoare instantanee i . La rândul său, curentul i va da naștere fluxului fascicular φ_f . Liniile de inducție magnetică corespunzătoare acestui flux se vor închide prin circuitul magnetic al bobinei.

Fluxul total din miezul feromagnetic (se neglijează fluxul care se închide prin aer) va fi

$$\varphi_t = N \varphi_f.$$

Fluxul total φ_t generat de curentul de magnetizare i va avea o dependență neliniară față de acesta (fig. 7.10).

Reprezentarea grafică respectivă se numește caracteristica flux-curent a bobinei sau caracteristică de magnetizare a bobinei (vezi capitolul 4).

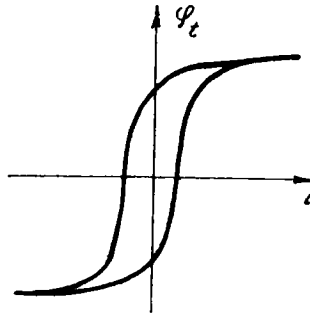


Fig. 7.10. Caracteristica de magnetizare a bobinei.

Se observă că pentru o bobină cu miez de fier, în regim alternativ, caracteristica de magnetizare este o curbă închisă. De aceea se mai numește și ciclu de magnetizare.

Dacă bobina nu are miez feromagnetic, caracteristica este o dreaptă a cărei pantă este inductivitatea L a bobinei deoarece

$$\varphi_t = L i .$$

Pentru circuitul din fig. 7.9 se scrie cu ajutorul teoremei a doua a lui Kirchhoff că

$$u = r i + u_L$$

în care produsul $r i$ este căderea de tensiune pe rezistența bobinei r iar u_L căderea de tensiune inductivă.

Dacă tensiunea la borne este sinusoidală

$$u = U \sqrt{2} \sin \omega t$$

și se neglijează căderea de tensiune pe rezistența bobinei, atunci tensiunea u_L va fi sinusoidală:

$$u_L = U_L \sqrt{2} \sin \omega t$$

Dar tensiunea u_L este creată de variația în timp a fluxului φ_t . Prin urmare și acesta va avea o variație sinusoidală. Se demonstrează că:

$$\varphi_t = N \varphi_f = \frac{U_L \sqrt{2}}{\omega} \sin (\omega t - \frac{\pi}{2}) = \Phi_{\max} \sin (\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (7.6)$$

și fluxul util maxim este

$$\Phi_{\max} = \frac{U_L \sqrt{2}}{2 \pi f} = \frac{U_L}{4,44 f} \quad (7.7)$$

iar fluxul fascicular maxim,

$$\Phi_{f\max} = \frac{U_L}{4,44 f N} \quad (7.8)$$

În fig. 7.11 s-a reprezentat variația în timp a tensiunii u_L care se poate considera ca fiind tensiunea de la bornele bobinei dacă se neglijează căderea de tensiune pe rezistența bobinei. S-a reprezentat în fig. 7.11 variația în timp a fluxului total φ_t . Forma sinusoidală a acestui flux φ_t este determinată de forma tensiunii u_L ca urmare a legii inducției electromagnetice. Folosind ciclul de magnetizare se poate determina printr-o construcție grafică punct cu punct curba curentului în funcție de timp.

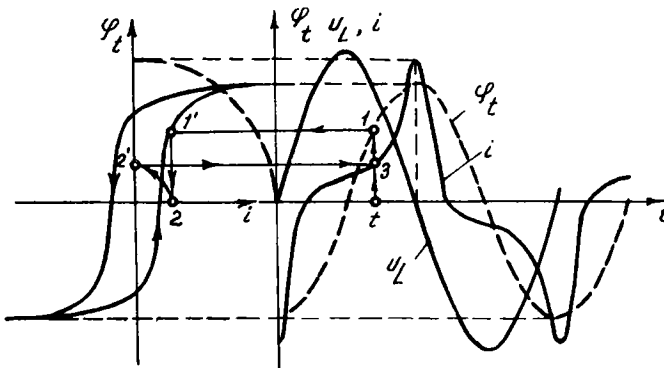


Fig. 7.11. Variația în timp a tensiunii u_L , fluxului total φ_t și curentului i prin bobina cu miez feromagnetic.

Se procedează în modul următor; pentru un moment t oarecare, se deduce din curba sinusoidală, fluxul φ_t corespunzător (punctul 1). Corespunzător acestei valori, se deduce din ciclul de magnetizare valoarea lui i (punctul 2).

Se transpune valoarea lui i (punctul 2) pe axa ordonatelor (punctul 2'). Dar această mărime reprezintă valoarea curentului i la momentul t (punctul 3). Se procedează asemănător pentru alte momente.

Observații . 1. Din cauza fenomenului de saturație, curentul este puternic deformat, prezentînd un maxim ascuțit.

2. Din cauza ciclului de magnetizare, curentul trece prin zero (valori crescătoare) înaintea fluxului pe care îl produce.

7.5. Condensatorul neliniar

Permitivitatea dielectricilor folosiți în condensatoarele obișnuite: mica, hîrtie, stiroflex etc., este constantă și nu depinde de intensitatea cîmpului electric. Dielectricul feroelectric nu mai are permitivitatea constantă, aceasta depinde de intensitatea cîmpului electric stabilit între armăturile condensatorului. Consecința este că sarcina electrică variază neliniar în raport cu tensiunea aplicată la bornele condensatorului (Fig.7.12.

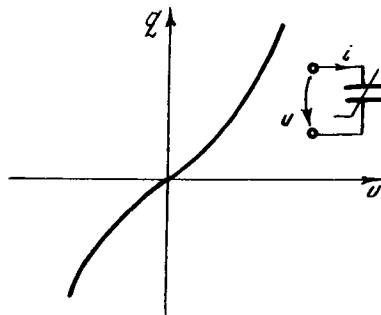


Fig. 7.12. Caracteristica sarcină-tensiune la condensatorul neliniar.

Condensatoarele care folosesc un dielectric cu o caracteristică neliniară se numesc condensatoare neliniare sau varicap (condensatoare cu capacitate variabilă).

Dacă tensiunea la bornele condensatorului are o variație sinusoidală de forma:

$$u = U\sqrt{2} \sin \omega t$$

atunci sarcina electrică va avea o variație în timp care se poate determina pe cale grafică.

În fig. 7.13 se construiește punct cu punct variația sarcinii electrice în funcție de timp după caracteristica sarcină-tensiune și după graficul alternanței pozitive a tensiunii sinusoidale.

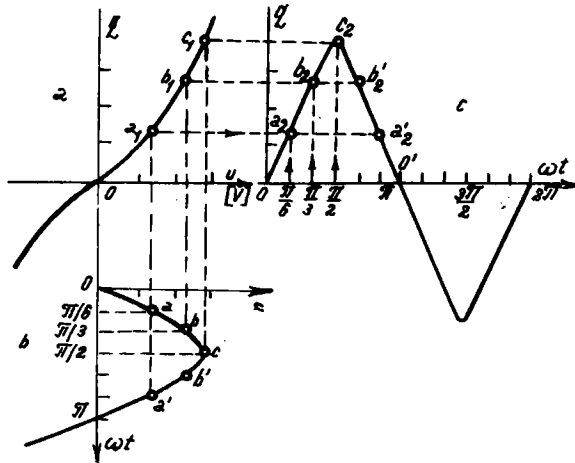


Fig. 7.13. Variația sarcinii electrice q și a tensiunii u în funcție de timp la condensatorul variabil.

Pentru reprezentarea tensiunii din fig. 7.13 a și b s-a folosit aceeași scară.

În graficul din fig. 7.13 c, este reprezentată sarcina electrică la aceeași scară ca în caracteristica sarcină-tensiune (fig. 7.13 b). Axa ωt s-a reprezentat în prelungirea axei u.

S-a procedat astfel:

S-au ales valori pentru t egale cu $\frac{T}{12}$, $\frac{T}{6}$, $\frac{T}{4}$, respectiv pentru ωt egale cu $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$.

S-au determinat valorile instantanee corespunzătoare ale tensiunii de la bornele condensatorului (abscisele punctelor a, b, c). Valorile respective ale tensiunilor sînt transpuse în caracteristica sarcină-tensiune (punctele a_1 , b_1 , c_1) din fig. 7.13 a. Ordonatelor punctelor a_1 , b_1 , c_1 le corespund în fig. 7.13 c, punctele a_2 , b_2 , c_2 .

Aceste puncte sînt valorile instantanee a sarcinii electrice q de pe armăturile condensatorului pentru valorile lui ωt egale cu $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ și $\frac{\pi}{2}$.

Se construiește astfel în fig. 7.13 c porțiunea de grafic $Oa_2b_2c_2$ și $c_2b_2'a_2'O'$.

Caracteristica sarcină-tensiune este simetrică în raport cu originea axelor ceea ce determină ca alternanța negativă din graficul sarcină-timp să fie simetrica alternanței pozitive.

OBSERVATIE:

Un condensator neliniar poate fi utilizat într-un circuit de curent alternativ pentru a schimba un semnal de formă sinusoidală (în acest caz tensiunea), într-un semnal de formă nesinusoidală (în acest caz sarcina electrică)

CAPITOLUL 8

SCHEME ECHIVALENTE A ELEMENTELOR NELINIARE PENTRU SEMNAL MIC

Curentul electric constant în timp I_A printr-un element neliniar (de exemplu printr-o diodă semiconductoare) se deduce din caracteristica volt-ampere (fig. 8.1 a) și este determinat de tensiunea constantă în timp U_A , aplicată la bornele acestui element neliniar. Punctul de pe caracteristică de coordonate U_A și I_A se numește punct static de funcționare (prescurtat PSF).

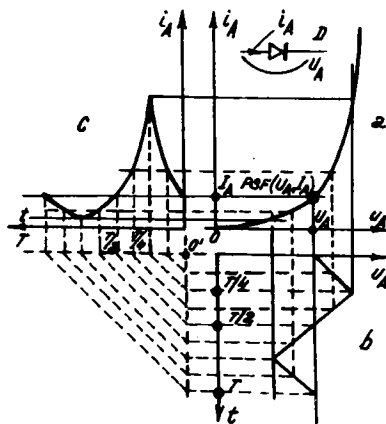


Fig. 8.1. Caracteristica volt-ampere a diodei (a). Variația tensiunii u_A (b). Variația curentului i_A (c).

Presupunem că tensiunea la bornele diodei semiconductoare variază în timp cu frecvență joasă în jurul PSF, conform fig. 8.1 b. Vom nota această tensiune variabilă în timp cu u_A .

Curentul electric i_A , corespunzător tensiunii u_A , va fi un curent variabil în timp; variația în timp este redată în fig. 8.1 c.

Graficul de variație în timp a curentului i_A s-a construit punct cu punct, în funcție de tensiunea variabilă în timp u_A de la bornele elementului neliniar, folosindu-se caracteristica volt-ampere neliniară $i_A = f(u_A)$ din fig. 8.1 a.

Se observă că variația în timp a curentului electric i_A (fig. 8.1 c) prin dioda semiconductoră nu este asemenea cu variația tensiunii u_A . Curentul este distorsionat, această distorsionare sau deformare, fiind provocată de caracteristica neliniară a elementului semiconductor.

Dacă tensiunea u_A are variații mici în jurul PSF, atunci curentul i_A are de asemenea variații mici iar forma de variație va fi foarte asemănătoare cu a tensiunii u_A .

Prin urmare, cînd variațiile tensiunii u_A sînt mici, se poate aproxima caracteristica volt-ampere în jurul PSF prin tangenta dusă la caracteristică în punctul PSF (fig. 8.2 a).

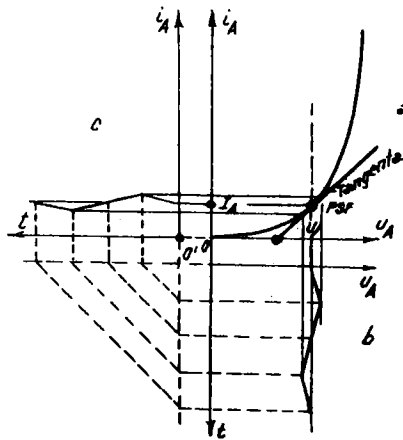


Fig. 8.2. Linearizarea caracteristicii diodei (a). Variația tensiunii u_A (b). Variația curentului i_A (c).

Deci, pentru variații mici și frecvență joasă a tensiunii la bornele unui element neliniar, caracteristica de funcționare în PSF se poate înlocui printr-o dreaptă, tangenta în PSF.

Altfel exprimat, caracteristica neliniară s-a echivalat printr-o caracteristică liniară ceea ce este identic cu echivalarea elementului neliniar printr-un element liniar.

Din fig. 8.2 b și c, se remarcă asemănarea dintre variația în timp a tensiunii u_A și a curentului i_A prin elementul liniarizat.

În concluzie, pentru variații mici și joasă frecvență a tensiunii electrice (semnal mic), elementele neliniare se pot înlocui prin elemente liniare.

Schemele electrice în care s-au înlocuit elementele neliniare cu elemente liniare, se numesc scheme electrice echivalente.

Se vor prezenta în continuare schemele electrice echivalente pentru două elemente neliniare, foarte utilizate în aplicațiile practice, dioda semiconductoră și tranzistorul bipolar.

8.1. Schema echivalentă a diodei pentru semnal mic și joasă frecvență

Se va studia funcționarea circuitului electric din fig. 8.3 (a) care conține ca element neliniar dioda semiconductoră D.

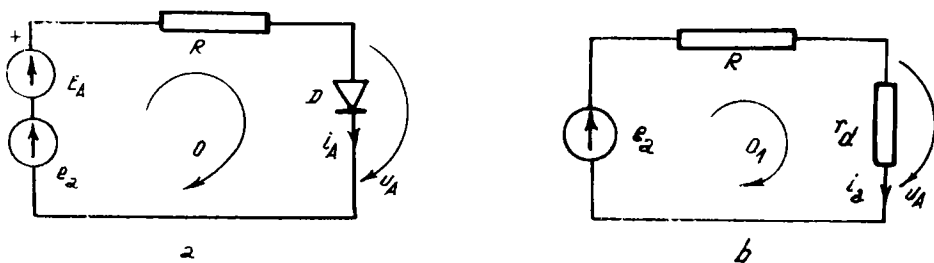


Fig. 8.3. Circuitul electric cu diodă (a) și circuitul echivalent (b).

Pentru fixarea punctului static de funcționare PSF, s-a introdus în circuit sursa de tensiune electromotoare continuă E_A .

Semnalul mic este produs de sursa de tensiune electromotoare alternantă e_a , a cărei expresie este:

$$e_a = 14,1 \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T} t \quad (\text{mV})$$

iar reprezentarea grafică este în fig. 8.4 b.

Cînd sursa e_a lipsește din circuit, dioda D funcționează în PSF fixat de sursa de tensiune continuă $E_A = 0,7 \text{ V}$ și de rezistența de sarcină $R_A = 11,1 \Omega$.

Coordonatele PSF se determină prin rezolvarea grafică a sistemului de ecuații:

$$E_A = R i_A + u_A \quad (8.1)$$

$$i_A = f(u_A)$$

în care prima ecuație s-a obținut scriind teorema a doua a lui Kirchhoff pe ochiul o în lipsa sursei e_a (fig. 8.3 a), iar cea de a doua este ecuația caracteristicii diodei din fig. 8.4 a.

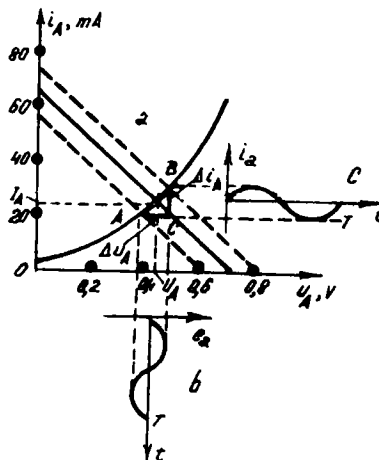


Fig. 8.4. Caracteristica diodei (a). Variația tensiunii e_a (b). Variația corespunzătoare a curentului i_a (c).

La intersecția dreptei de sarcină cu graficul caracteristici diodei se obține:

$$U_A = 0,43 \text{ V} \text{ și } I_A = 24 \text{ mA} .$$

Rezistența statică a diodei în PSF este

$$R_s = \frac{U_A}{I_A} = \frac{0,43 \text{ V}}{24 \text{ mA}} = \frac{0,43 \text{ V}}{0,024 \text{ A}} = 18 \Omega \quad (8.2)$$

Regimul dinamic al circuitului electric din fig. 8.3 a se caracterizează prin funcționarea sursei de semnal mic e_a .

Teorema a doua a lui Kirchhoff aplicată pe ochiul o se scrie astfel:

$$E_A + e_a = R i_A + u_A . \quad (8.3)$$

La bornele diodei D, va apare un semnal mic provocat de sursa e_a .

Se notează tensiunea anodică a semnalului mic de la bornele diodei

D cu u_A .

Tensiunea anodică se scrie în acest caz, astfel:

$$u_A = U_A + \Delta u_A . \quad (8.4)$$

Semnalul mic Δu_A variază sinusoidal în timp cu frecvența tensiunii de semnal mic e_a :

$$\Delta u_A = \Delta U_A \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T} t .$$

Curentul anodic, corespunzător tensiunii u_A , este

$$i_A = I_A + \Delta i_A \quad (8.5)$$

în care, Δi_A este variația curentului anodic față de valoarea din PSF, egală cu I_A .

Rezistența dinamică din PSF a diodei se definește din triunghiul ABC:

$$r_d = \frac{\Delta u_A}{\Delta i_A} \quad (8.6)$$

Dacă se introduce Δi_A din această relație, i_A din (8.5) și u_A din (8.4) în ecuația (8.3) se obține:

$$E_A + e_a = RI_A + R \Delta i_A + U_A + \Delta u_A \quad (8.7)$$

Dar:

$$\Delta u_A = r_d \Delta i_A$$

și

$$(8.8)$$

$$E_A = RI_A + U_A \text{ (ecuația valabilă în PSF)}$$

Prin înlocuire și reducerea termenilor, se obține o relație între variațiile tensiunii și curentului:

$$e_a = R \Delta i_A + r_d \Delta i_A \quad (8.9)$$

Dacă se introduc următoarele notații:

$$\Delta i_A = i_a \quad \text{și} \quad \Delta u_A = u_a \quad (8.10)$$

se obține

$$e_a = R i_a + r_d i_a \quad (8.11)$$

Această ecuație sugerează circuitul echivalent din fig. 8.3 b care se obține în modul următor:

- Se înlocuiește dioda semiconductoră prin rezistența dinamică r_d calculată în PSF; noua schemă obținută reprezintă schema echivalentă a diodei pentru semnal mic și joasă frecvență;

- Se suprimă din circuit sursa de alimentare în curent continuu.

Calculul circuitului echivalent din fig. 8.3 b

Rezistența dinamică r_d se determină grafic din triunghiul ABC (fig. 8.4 a).

$$r_d = \frac{\Delta u_A}{\Delta i_A} \Big|_{\text{PSF}} = \frac{(0,48 - 0,39) \text{ V}}{(0,28 - 0,21) \text{ mA}} = 1,25 \text{ k}\Omega \quad (8.12)$$

Curentul anodic i_a . Acesta constituie componenta alternativă a curentului anodic.

Aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff pe ochiul o_1 al circuitului echivalent din fig. 8.3 b, se obține:

$$i_a = \frac{e_a}{R + r_d} = \frac{14,1 \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T} t}{11,1 + 1250} = 11,1 \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T} t \quad (\mu\text{A})$$

adică un curent cu valoarea efectivă $I_a = 11,1 \mu\text{A}$, în fază cu semnalul aplicat. Variația în timp a lui i_a este prezentată în fig. 8.4 c.

Precizări:

S-au folosit notațiile următoare:

I_A, U_A - mărimi constante în timp, coordonatele PSF;

i_a, u_a - variațiile curentului și tensiunii la bornele diodei semi-conductoare;

$$i_a = I_a \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T} t \quad (8.13)$$

$$u_a = U_a \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T} t$$

în care I_a și U_a sînt valorile efective ale acestor variații;

i_A, u_A - suma dintre mărimile de curent continuu din PSF și variațiile lor în regim dinamic;

$$i_A = I_A + \Delta i_A = I_A + i_a \quad (8.14)$$

$$u_A = U_A + \Delta u_A = U_A + u_a ;$$

E_A - tensiunea electromotoare a sursei de curent continuu pentru fixarea PSF;

e_a - tensiunea electromotoare a sursei de semnal de valoare efectivă E_a , adică

$$e_a = E_a \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T} t = E_a \sqrt{2} \sin \omega t.$$

8.2. Schema echivalentă a tranzistorului pentru semnal mic și joasă frecvență

Tranzistorul este un element de circuit comandat cu mai multe borne de acces.

Se numește element de circuit comandat, elementul de circuit pentru care mărimile electrice (tensiune, curent) definite pentru anumite borne, depind de mărimile electrice definite pentru alte borne.

Tranzistorul bipolar este un dispozitiv semiconductor bipolar (cu conducție prin electroni și prin goluri) cu trei borne de acces (terminale). În fig. 8.5 a este prezentat tranzistorul PNP iar în fig. 8.5 b, tranzistorul NPN.

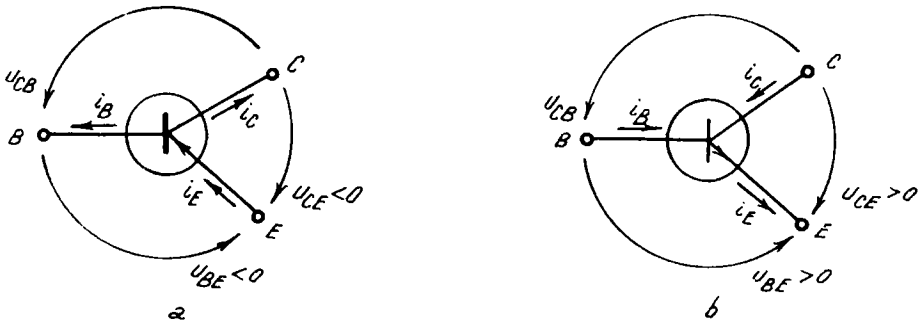


Fig. 8.5. Tranzistorul PNP (a) și tranzistorul NPN (b).

Bornele de acces au următoarele denumiri:

Borna B - bază, borna C - colector și borna E - emitor.

Tensiunile dintre borne au următoarele denumiri:

u_{CE} - tensiunea colector-emitor;

u_{BE} - tensiunea bază-emitor;

u_{CB} - tensiunea colector-bază;

iar curenții se numesc astfel:

i_B - curentul bază;

i_C - curentul colector;

i_E - curentul emitor.

Curenții prin bornele unui tranzistor satisfac relația:

$$i_E = i_B + i_C \quad (8.15)$$

Curentul de colector depinde de curentul de bază; cu cît este mai mare curentul de bază cu atît mai mare este curentul de colector:

$$i_C = \beta i_B \quad (8.16)$$

în care β este factorul de amplificarea al curentului de bază. Această dependență dintre curentul de colector și curentul de bază permite tranzistorului să funcționeze în regim de amplificare.

Cînd tranzistorul funcționează ca amplificator, semnalul de intrare se aplică între două dintre cele trei terminale.

Semnalul de ieșire se va obține între două din cele trei terminale astfel că unul dintre terminale este comun.

În fig. 8.6 a, b, c s-au prezentat conexiunile tranzistorului NPN.

- a. emitor comun;
- b. bază comună;
- c. colector comun.

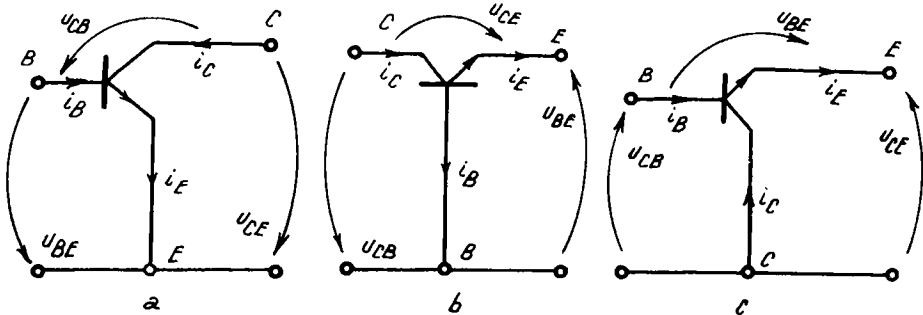


Fig. 8.6. Conexiunile tranzistorului NPN: a - emitor comun; b - bază comună; c - colector comun.

Pentru funcționarea ca amplificator, se folosește conexiunea emitor comun.

Regimul static de funcționare pentru tranzistorul bipolar NPN, conexiunea emitor comun, este fixat de curenții i_E , i_B , i_C respectiv tensiunile u_{CE} , u_{BE} și u_{CB} (fig. 8.6 a).

Legătura între curenți este stabilită de teorema întâi a lui Kirchhoff:

$$i_E = i_B + i_C$$

iar tensiunile satisfac teorema a doua a lui Kirchhoff:

$$u_{CB} + u_{BE} - u_{CE} = 0$$

În fig. 8.7 s-au reprezentat familiile de caracteristici statice pentru tranzistorul bipolar NPN conexiunea emitor-comun.

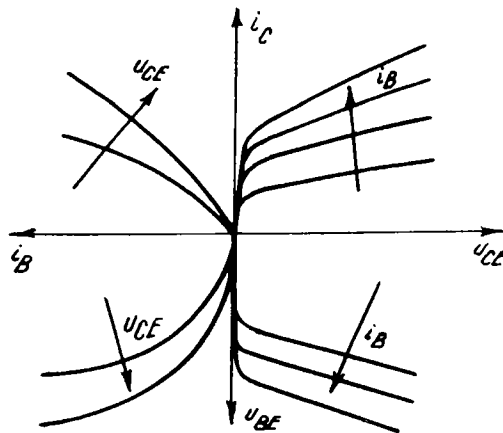


Fig. 8.7. Caracteristicile statice pentru tranzistorul bipolar NPN - emitor comun.

În regim dinamic de funcționare, relațiile dintre tensiunile variabile în timp și curenți de asemenea variabili în timp vor fi în general neliniare pentru că tranzistorul este un element neliniar. În anumite condiții, relațiile se pot liniariza. Aceste condiții sînt îndeplinite pentru semnal mic și joasă frecvență. Liniarizarea relațiilor dintre tensiunile și curenții de joasă frecvență

și amplitudine mică (semnal mic) creează posibilitatea înlocuirii tranzistorului bipolar printr-o schemă echivalentă. Procedul de înlocuire se aseamănă cu procedul de la dioda semiconductoare.

Se consideră funcționarea tranzistorului într-o schemă de amplificator (fig. 8.8). Pentru fixarea PSF, se utilizează două surse de curent continuu: E_B și E_C .

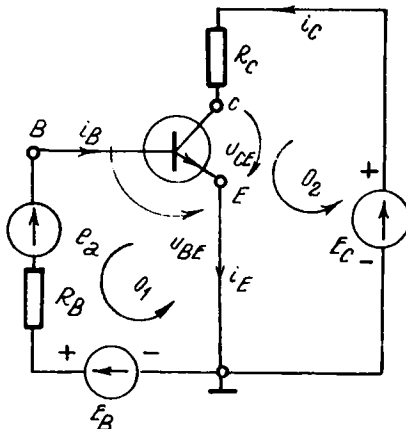


Fig. 8.8. Schemă de amplificare cu tranzistor NPN.

S-a plasat în circuitul de polarizare a bazei, sursa de semnal mic cu tensiune electromotoare:

$$e_a = E_a \sqrt{2} \sin \omega t .$$

Dacă lipsește această sursă, atunci tranzistorul are un regim static de funcționare impus de tensiunile electromotoare E_B și E_C și de rezistențele R_B și R_C .

Curenții și tensiunile pentru PSF se notează cu:

$$I_B, I_C, U_{CE} \text{ și } U_{BE} .$$

În prezența sursei de semnal alternativ sinusoidal e_a , valorile curenților și tensiunilor din PSF se modifică.

Noul regim de funcționare se numește regim dinamic iar curenții și tensiunile din acest regim se prezintă sub forma:

$$i_B = I_B + i_b \quad (8.17)$$

$$i_C = I_C + i_c$$

$$u_{CE} = U_{CE} + u_{ce}$$

$$u_{BE} = U_{BE} + u_{be}$$

Aici mărimile i_b , i_c , u_{ce} și u_{be} reprezintă variațiile față de valorile caracteristice ale PSF (punctul P din fig. 8.9 c).

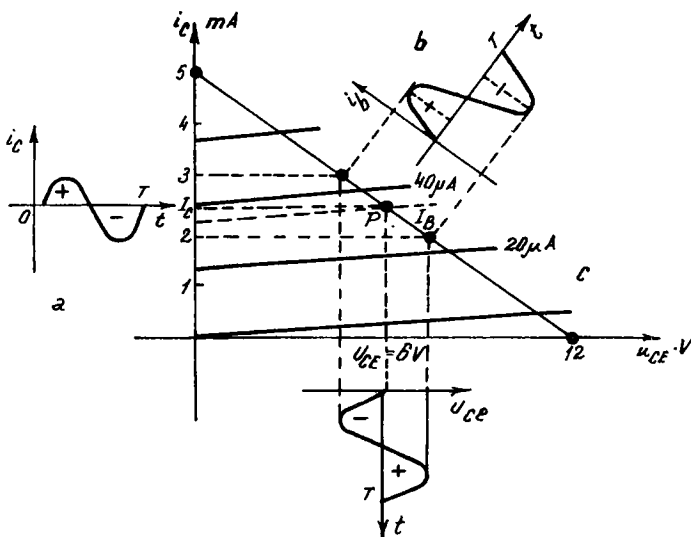


Fig. 8.9. a. Variația curenului i_c ; b. Variația curenului i_b ; c. Variația tensiunii u_{ce} .

Mărimile i_b , i_c , u_{ce} și u_{be} variază sinusoidal în timp avînd frecvența egală cu frecvența semnalului. De asemenea, aceste mărimi reprezintă mici variații (pe care le vom nota cu Δ) ale curenților și tensiunilor i_B, i_C, u_{CE} și u_{BE} . Se scriu astfel:

$$i_b = \Delta i_B ; i_c = \Delta i_C ; u_{ce} = \Delta u_{CE} \text{ și } u_{be} = \Delta u_{BE}$$

Cu aceste notații, relațiile (8.17) se scriu:

$$\Delta i_B = i_B - I_B$$

$$\Delta i_C = i_C - I_C$$

(8.18)

$$\Delta u_{CE} = u_{CE} - U_{CE}$$

$$\Delta u_{BE} = u_{BE} - U_{BE} .$$

Din fig. 8.9 se observă că mărimile i_c și i_b sînt în fază cu t.e.m. e_a iar u_{ce} (variația tensiunii de colector) este defazată cu π radiani față de această t.e.m.

Dacă aplicăm teoremele lui Kirchhoff circuitul de amplificare din fig. 8.8 rezultă:

$$i_E = i_C + i_B$$

$$e_a + E_B = R_B i_B + u_{BE} \quad (\text{pe ochiul } o_1) \quad (8.19)$$

$$E_C = R_C i_C + u_{CE} \quad (\text{pe ochiul } o_2)$$

Dacă se înlocuiesc curenții și tensiunile cu expresiile:

$$\begin{aligned} i_E &= I_E + i_e ; i_B = I_B + i_b ; i_C = I_C + i_c ; u_{BE} = U_{BE} + u_{be} \text{ și } u_{CE} = \\ &= U_{CE} + u_{ce} \end{aligned}$$

rezultă:

$$\begin{aligned} I_E + i_e &= I_C + i_c + I_B + i_b \\ (8.20) \\ e_a + E_B &= R_B I_B + R_B i_b + U_{BE} + u_{be} \\ E_C &= R_C I_C + R_C i_c + U_{CE} + u_{ce} \end{aligned}$$

Dar în regim static de funcționare (PSF), prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff, se obțin ecuațiile de funcționare:

$$\begin{aligned} I_E &= I_C + I_B \\ E_B &= R_B I_B + U_{BE} \\ (8.21) \\ E_C &= R_C I_C + U_{CE} \end{aligned}$$

Identificînd și reducînd termenii în relațiile (8.20) se obțin ecuațiile pentru regimul dinamic și semnal mic de joasă frecvență:

$$\begin{aligned} i_e &= i_c + i_b \\ e_a &= R_B i_b + u_{be} \\ (8.22) \\ 0 &= R_C i_c + u_{ce} \end{aligned}$$

Aceste relații ne sugerează schema echivalentă din fig. 8.10. Se remarcă dispariția surselor de curent continuu.

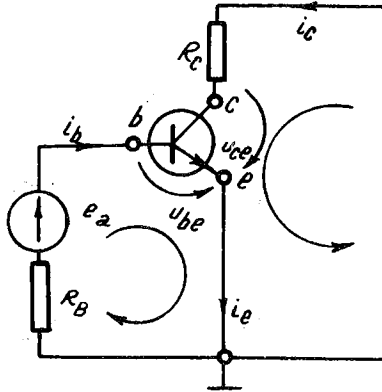


Fig. 8.10. Schema echivalentă a amplificatorului cu tranzistor NPN.

Dacă se consideră borna emitor e ca o bornă dublă, atunci schema pentru semnal mic și joasă frecvență a tranzistorului bipolar se poate asimila cu un circuit cu patru borne de acces - denumit cuadripol - între mărimile de intrare și ieșire existînd dependențe liniare (fig. 8.11).

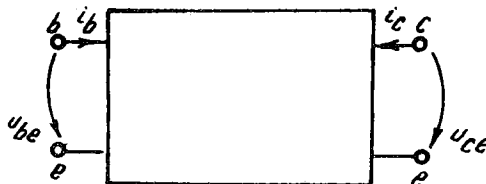


Fig. 8.11. Tranzistorul bipolar asimilat cu un cuadripol.

Aceste dependențe liniare se scriu sub forma unui sistem de ecuații în care se folosesc parametrii hibrizi (notați cu "h"). Denumirea lor provine din faptul că natura lor nu este omogenă.

Variabilele independente în sistemul de ecuații cu parametrii "h" sînt tensiunea de intrare (în acest caz u_{be}) și curentul de ieșire (în acest caz i_c). Sistemul de ecuații este următorul:

$$u_{be} = h_{11e} i_b + h_{12e} u_{ce} \quad (8.23)$$

$$i_c = h_{21e} i_b + h_{22e} u_{ce}$$

Coeficienții h_{11e} , h_{12e} , h_{21e} și h_{22e} - parametrii hibridi - se definesc astfel:

$$h_{11e} = \left. \frac{u_{be}}{i_b} \right|_{u_{ce}=0} = \left. \frac{\Delta u_{BE}}{\Delta i_B} \right|_{\Delta u_{CE}=0} = \left. \frac{\Delta u_{BE}}{\Delta i_B} \right|_{u_{CE}=\text{const.}} \quad (8.24)$$

Se mai notează $h_{11e} = h_{ie}$.

Se numește impedanță de intrare (input) cu bornele de ieșire c și e scurtcircuitate; se măsoară în ohmi.

$$h_{12e} = \left. \frac{u_{be}}{u_{ce}} \right|_{i_b=0} = \left. \frac{\Delta u_{BE}}{\Delta u_{CE}} \right|_{\Delta i_B=0} = \left. \frac{\Delta u_{BE}}{\Delta u_{CE}} \right|_{i_B=\text{const.}} \quad (8.25)$$

Se notează și $h_{12e} = h_{re}$;

Se numește factor de transfer invers (reverse) sau reacție în tensiune, cu intrare în gol; arată influența tensiunii de ieșire asupra tensiunii de intrare; este adimensional.

$$h_{21e} = \left. \frac{i_c}{i_b} \right|_{u_{ce}=0} = \left. \frac{\Delta i_C}{\Delta i_B} \right|_{\Delta u_{CE}=0} = \left. \frac{\Delta i_C}{\Delta i_B} \right|_{u_{CE}=\text{const}} \quad (8.26)$$

Se notează și $h_{21e} = h_{fe}$;

se numește factor de transfer direct (forward) sau amplificarea în curent cu ieșirea în scurtcircuit; este adimensional.

$$h_{22e} = \left. \frac{i_c}{u_{ce}} \right|_{i_b=0} = \left. \frac{\Delta i_C}{\Delta u_{CE}} \right|_{\Delta i_B=0} = \left. \frac{\Delta i_C}{\Delta u_{CE}} \right|_{i_B=\text{const}} \quad (8.27)$$

Se notează și

se numește admitanță de ieșire (output) cu intrare în gol; se măsoară în siemens (ohm^{-1}).

Indicele parametrilor "h" notat cu e arată modul de conexiune tranzistorului (emitor-comun).

În cea de a doua notație, primele litere a indicilor parametrilor "h" reprezintă inițiala cuvântului în limba engleză.

Din ecuațiile (8.23) se poate construi schema echivalentă a tranzistorului NPN cu emitor comun (fig. 8.12).

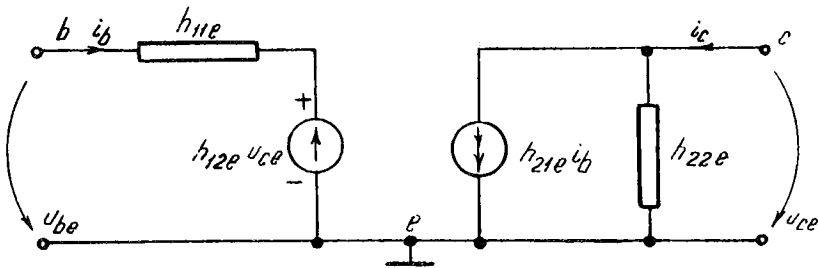


Fig. 8.12. Schema echivalentă cu parametrii "h" a tranzistorului NPN.

Înlocuind tranzistorul prin schema sa echivalentă cu parametrii "h" în fig. 8.10, se obține schema echivalentă a amplificatorului pentru regimul dinamic la semnale mici (fig. 8.13).

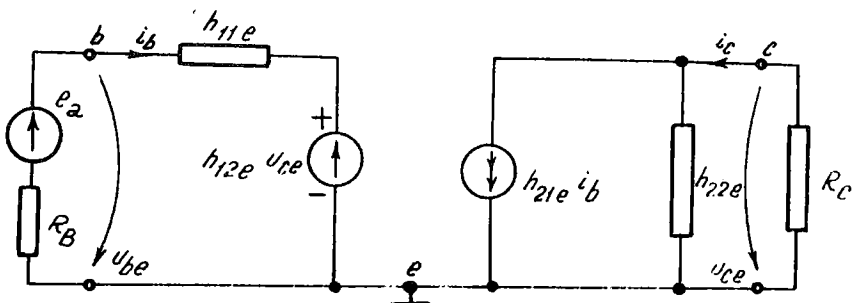


Fig. 8.13. Schema echivalentă a amplificatorului pentru semnale mici.

Această schemă liniarizată se calculează cu metode de rezolvare a circuitelor de curent continuu.

Metoda cea mai indicată este metoda potențialelor la noduri.

Spre deosebire de circuitele de curent continuu la care se cerea determinarea curenților din laturi, când se cunoșteau tensiunile electromotoare, în cazul acestor scheme se cere determinarea altor mărimi. În cazul amplificatoarelor de joasă frecvență și semnal mic cu tranzistor în conexiune emitor comun, mărimile sînt:

- amplificarea de tensiune;
- amplificarea de curent;
- rezistența de intrare;
- rezistența de ieșire.

Pentru amplificatorul studiat, aceste mărimi se definesc astfel:

- amplificarea de tensiune:

$$A_u = \frac{u_{ce}}{u_{be}} \quad (8.28)$$

- amplificarea de curent:

$$A_i = \frac{i_c}{i_b} \quad (8.29)$$

- rezistența de intrare:

$$R_{in} = \frac{u_{be}}{i_b} \quad (8.30)$$

- rezistența de ieșire:

$$R_e = \frac{u_{ce}}{i_c} . \quad (8.31)$$

CAPITOLUL 9

LINII ELECTRICE LUNGI

Elementele de circuit analizate sînt considerate ca elemente concentrate; rezistența electrică este concentrată în rezistorul ideal, inductivitatea în bobina ideală iar capacitatea în condensatorul ideal.

Circuitele electrice care se compun din elemente de circuit concentrate se numesc circuite electrice cu constante concentrate.

În realitate, nu există circuite cu elemente concentrate. De exemplu o bobină este caracterizată printr-o inductivitate și o rezistență electrică; la frecvențe înalte, capacitățile dintre diferitele spire ale bobinei nu se mai echivalează cu o capacitate între bornele bobinei.

Circuitele electrice în care rezistențele, inductivitățile și capacitățile electrice nu mai sînt concentrate - cînd fiecare porțiune mică a circuitului este caracterizată printr-o rezistență, inductivitate, capacitate - se numesc circuite cu constante repartizate.

Studiul circuitelor cu constante repartizate nu se mai face cu metode cunoscute, nu se identifică noduri, laturi sau ochiuri. De asemenea, teoremele lui Kirchhoff nu pot fi aplicate în forma lor cunoscută.

Circuitul electric nu mai are porțiuni neramificate în care curentul să fie constant. În cazul circuitelor electrice cu constante repartizate, din fiecare porțiune mică a circuitului se derivă curenți către alte porțiuni ale circuitului.

O categorie importantă de circuite electrice cu constante repartizate, o formează liniile electrice lungi.

Se compun din două sau mai multe conductoare drepte, paralele, avînd secțiune uniformă, izolate între ele.

Fiecare mică porțiune din linia electrică lungă are o rezistență electrică, o inductivitate electrică.

Tot această mică porțiune de circuit are în raport cu porțiunea vecină o capacitate și o conductanță electrică.

Schema unei linii electrice lungi și circuitul echivalent sînt prezentate în fig. 9.1 a și b.

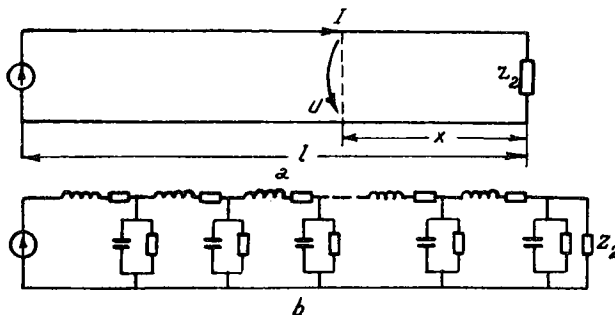


Fig. 9.1. Linie electrică lungă; a. Schemă; b. Circuit echivalent.

Prin urmare, în cazul liniilor electrice lungi, se pot introduce elemente noi de circuit: rezistența liniei pe unitatea de lungime, inductivitatea liniei pe unitatea de lungime, capacitatea liniei pe unitatea de lungime și conductanța liniei pe unitatea de lungime.

Dacă se consideră lungimea liniei egală cu l , atunci elementele de circuit repartizate vor fi

$$R_l = \frac{R}{l} ; L_l = \frac{L}{l} ; C_l = \frac{C}{l} \text{ și } G_l = \frac{G}{l} .$$

9.1. Fenomene pe linii electrice lungi

Prin studiul liniilor electrice lungi, se urmărește:

- cunoașterea repartizării curentului și tensiunii în lungul liniei;
- cunoașterea mărimilor caracteristice la bornele de intrare și de ieșire ale liniei.

Metoda constă în determinarea într-un punct de pe linie a tensiunii și curentului. Apoi prin metode matematice, care nu vor fi aplicate deoarece

depășește nivelul de înțelegere, se calculează repartitia curentului și tensiunii în lungul liniei întregi, relațiile între tensiuni și curenți la intrarea respectiv la ieșirea liniei electrice lungi. Se obține astfel o caracterizare globală a liniei.

Studiul se simplifică dacă se consideră o linie lungă ideală, adică o linie cu rezistența R_l egală cu zero și conductanța G_l egală cu infinit; linia conține numai capacități și inductivitate repartizată.

În practică, se pot întâlni astfel de linii; sînt liniile alimentate cu tensiuni de frecvențe înalte la care rezistența și conductanța se pot neglija în raport cu impedanța inductivă sau capacitivă.

În fig. 9.2 a este prezentată o linie electrică lungă ideală.

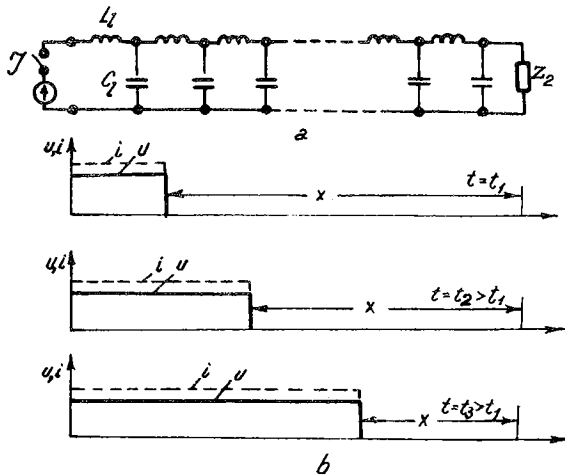


Fig. 9.2. Linia lungă ideală.

La momentul $t = 0$, se închide întreruptorul \mathcal{J} . Prima capacitate a primei porțiuni se încarcă prin inductivitatea bobinei echivalente. Încărcarea durează un timp care depinde de valorile lui L_l și C_l . Treptat, se realizează încărcarea liniei dar evident după un interval de timp. În tot acest interval, tensiunea înaintază în lungul liniei. Se spune că apare un fenomen de propagare în lungul liniei (fig. 9.2 b).

Unda de tensiune înaintează pe linie cu o viteză finită care se numește viteză de propagare în lungul liniei. Viteza depinde de valorile elementelor de circuit distribuite L_1 , C_1 și de mediul în care este plasată linia. Pentru mediu aer sau vid, se constată că această viteză este egală cu viteza luminii în vid.

Se constată că odată cu unda de tensiune se propagă și o undă de curent deoarece încărcarea condensatoarelor se face printr-un curent care va străbate inductivitățile repartizate în lungul liniei.

Cînd unda ajunge la cap de linie, este posibil să apară un fenomen de reflexie a undei.

Acest fenomen este posibil cînd energia transmisă de generator nu este absorbită integral de receptor.

Unda inversă care apare se propagă de la receptor către generator.

Prin urmare, pe o linie electrică lungă, pot apare două unde: undă directă și unda inversă (reflectată). În fiecare punct al liniei, curentul și tensiunea va reprezenta o suprapunere a undelor directă și reflectată de curent respectiv de tensiune.

În cazul generatorului sinusoidal de alimentare a liniei, au loc fenomene asemănătoare. Capacitățile se încarcă și se descarcă succesiv, tensiunea și curentul avînd o viteză de propagare constantă în lungul liniei. Prin urmare, variația sinusoidală în timp a tensiunii și curentului se păstrează dar apare un defazaj al tensiunii sau curentului dintr-un punct al liniei față de tensiunea sau curentul de la intrare. Adică, dacă ar fi posibil să se "vadă" tensiunea și curentul în lungul liniei la un moment dat $t = t_1$, s-ar observa că tensiunea sau curentul la intrare trece prin maximum iar într-un punct depărtat de intrare aceste mărimi trec prin zero.

De asemenea, dacă ar fi posibil să se "vadă" tensiunea și curentul sinusoidal în lungul liniei, s-ar observa că sinusoida se deplasează pe linie ca un "mobil". Adică există o variație sinusoidală în spațiu. Există prin urmare o variație sinusoidală în timp și o variație sinusoidală în spațiu a tensiunii și curentului în lungul liniei.

Această dublă dependență a curentului și tensiunii de timp și de lungime, este caracteristica circuitelor cu constante repartizate.

9.2. Linii electrice lungi cu pierderi

Fenomenele au același caracter ca în cazul liniilor electrice ideale dar spre deosebire, apare aici o "slăbire" a undelor denumită atenuare. Există în acest caz o pierdere de energie în lungul liniei.

9.3. Aplicație

O linie aeriană de telecomunicații de lungime $l = 100$ km (fig. 9.3) cu parametrii $R_l = 5,4 \Omega/\text{km}$, $L_l = 2 \cdot 10^{-3}$ H/km, $G_l = 1 \cdot 10^{-6} \Omega^{-1}/\text{km}$ și $C_l = 6 \cdot 10^{-9}$ F/km alimentează la extremitatea sa o impedanță egală cu impedanța caracteristică (Z_C). Tensiunea la bornele impedanței de sarcină este $u_2 = 10 \sqrt{2} \sin \omega t$ (V) iar frecvența $f = 800$ Hz.

Să se calculeze valorile eficace și instantanee ale tensiunii U_1 , u_1 și curentului I_1 , i_1 la bornele de intrare ale liniei.

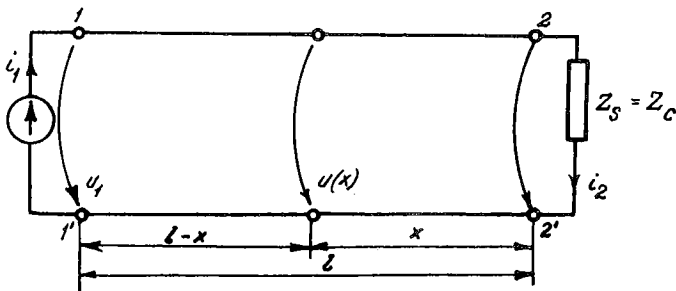


Fig. 9.3.

Rezolvare.

O linie electrică lungă este adaptată când impedanța de sarcină este egală cu impedanța caracteristică ($Z_s = Z_C$).

În acest caz, energia se transmite în lungul liniei în sensul de la sur-
să la receptor (undă directă). La bornele impedanței de sarcină toată energia
respectiv toată informația transmisă este captată de receptor fără reflexie.

În regimul - linie electrică adaptată ($\underline{Z}_s = \underline{Z}_C$) și cupierderi ($R_l \neq 0$
și $G_l \neq \infty$) - tensiunea complexă într-un punct oarecare al liniei aflat la dis-
tanța x de extremitatea sa este dată numai de unda directă (unda reflectată
este zero).

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_d = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_C}{2} e^{\underline{\Gamma} x} = \underline{U}_2 e^{\underline{\Gamma} x} .$$

deoarece

$$\underline{I}_2 \underline{Z}_C = \underline{U}_2$$

iar curentul direct

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_d = \frac{\underline{U}_d}{\underline{Z}_C} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} e^{\underline{\Gamma} x} = \underline{I}_2 e^{\underline{\Gamma} x}$$

în care:

\underline{U}_2 și \underline{I}_2 sînt tensiunea și curentul complex la extremitatea liniei;

$\underline{\Gamma}$ - constanta de propagare (mărimă complexă);

\underline{Z}_C - impedanța caracteristică a liniei.

În aceste două relații, nu sînt cunoscute:

- impedanța caracteristică \underline{Z}_C ;

- constanta de propagare $\underline{\Gamma}$.

Aceste două mărimi se numesc parametrii secundari ai unei linii
electrice lungi.

Calculul impedanței caracteristice \underline{Z}_C . Impedanța caracteristică sau
impedanța de undă a unei linii se calculează cu formula:

$$\underline{Z}_C = Z_C e^{j\theta} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}$$

în care: Z_0 este impedența de linie pe kilometru și egală cu

$$\underline{Z}_0 = R_l + j\omega L_l = 5,4 + j2\pi \cdot 800 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 5,4 + j10$$

și \underline{Y}_0 este admitanța de linie pe kilometru

$$\underline{Y}_0 = G_l + j\omega C_l = 10^{-6} + j2\pi \cdot 800 \cdot 6 \cdot 10^{-9} \cong 10^{-6}(1 + j30).$$

Rezultă

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{5,4 + j10}{10^{-6}(1 + j30)}} = 620 e^{-j 8^\circ 10'} \Omega.$$

Calculul constantei de propagare $\underline{\mathcal{T}}$.

Constanta de propagare

$$\underline{\mathcal{T}} = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0}$$

în care:

α - constanta de atenuare;

β - constanta de fază.

Rezultă prin înlocuire

$$\underline{\mathcal{T}} = \sqrt{(5,4 + j10)(1 + j30) 10^{-6}} = 4,8 \cdot 10^{-3} + j17,9 \cdot 10^{-3}$$

sau

$$\alpha = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ Np/km}$$

$$\beta = 17,9 \cdot 10^{-3} \text{ rad/km}$$

Calculul tensiunii și curentului la începutul liniei. Tensiunea \underline{U}_1 . Din datele problemei se cunoaște valoarea eficace a tensiunii $U_2 = 10 \text{ V}$ la extremitatea liniei. Faza inițială este zero.

Prin urmare în complex

$$\underline{U}_2 = 10 e^{j0^0} = 10 \text{ V}$$

Din relația

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_2 e^{\alpha x} e^{j\beta x} = 10 e^{\alpha x} e^{j\beta x}$$

și pentru $x = l$ în care caz

$$\underline{U}(x) = \underline{U}(l) = \underline{U}_1$$

vom avea

$$\underline{U}_1 = 10 e^{\alpha l} e^{j\beta l}$$

în care

$$\alpha l = 4,8 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,48 \text{ Np} \quad \text{și} \quad e^{0,48} = 1,62$$

$$\beta l = 17,9 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 1,79 \text{ rad} \quad \text{sau} \quad \beta l = 102^{\circ}30' (1 \text{ rad} = 57^{\circ}30').$$

Tensiunea complexă \underline{U}_1 va fi

$$\underline{U}_1 = 16,2 e^{j102^\circ 30'} \quad (V)$$

iar valoarea instantanee

$$u_1 = 16,2 \sqrt{2} \sin (\omega t + 102^\circ 30') (V)$$

în care valoarea efectivă:

$$U_1 = 16,2 \text{ V.}$$

Curentul \underline{I}_1 . Se calculează cu relația

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} e^{\underline{\varphi}_1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C}$$

deoarece

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 e^{\underline{\varphi}_1}.$$

Prin înlocuire se obține:

- curentul complex

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} = \frac{16,2 e^{j102^\circ 30'}}{620 e^{-j8^\circ 10'}} = 26,2 e^{j110^\circ 40'} \quad (mA);$$

- valoarea instantanee

$$i_1 = 26,2 \sqrt{2} \sin (\omega t + 110^\circ 40');$$

- valoarea eficace

$$I_1 = 26,2 \text{ mA}.$$

Calculul curentului I_2 la extremitatea liniei.

Curentul la extremitatea liniei ($x = 0$) se calculează din relația:

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_C} e^{j0} = \frac{U_2}{Z_C} = \frac{10}{620 e^{-j8^\circ 10'}} = 16,1 e^{j8^\circ 10'} \text{ mA};$$

- valoarea instantanee

$$i_2 = 16,1 \sqrt{2} \sin(\omega t + 8^\circ 10') \text{ mA};$$

- valoarea eficace

$$I_2 = 16,1 \text{ mA}.$$

Defazajele dintre tensiuni și curenți. În cazul liniei electrice lungi adaptate, defazajul impedanței de sarcină este egal cu defazajul impedanței caracteristice și cu cel al impedanței de intrare deoarece:

$$Z_{\text{intr}} = Z_s = Z_C = Z_C e^{j\theta} = 620 e^{-j8^\circ 10'} \Omega$$

Prin urmare, defazajul

$$\theta = -8^\circ 10'.$$

Același defazaj trebuie să fie între tensiunea și curentul de intrare \underline{U}_1 și \underline{I}_1 respectiv între tensiunea și curentul de ieșire \underline{U}_2 și \underline{I}_2 .

Verificare:

- defazajul dintre \underline{U}_1 și \underline{I}_1

$$(\omega t + 102^\circ 30') - (\omega t + 110^\circ 40') = - 8^\circ 10';$$

- defazajul dintre \underline{U}_2 și \underline{I}_2

$$\omega t - (\omega t + 8^\circ 10') = - 8^\circ 10'.$$

Reprezentarea grafică a variației tensiunii și curentului (valori efective) în lungul liniei.

Pentru reprezentarea grafică se înlocuiesc în expresiile:

$$U(x) = U_2 e^{\alpha x} = 10 e^{\alpha x}$$

și

$$I(x) = \frac{U_2}{Z_C} e^{\alpha x} = 16,1 e^{\alpha x}$$

diverse valori ale lui x . Valorile obținute se trec în tabelul 9.1.

Tabelul 9.1.

x km	0	25	50	75	100
$\alpha x, (Np)$	0	0,12	0,24	0,36	0,48
$e^{\alpha x}$	1	1,13	1,27	1,43	1,62
U (V)	10	11,3	12,7	14,3	16,2
I (mA)	16,1	18,2	20,5	23,0	26,2

În baza acestor date s-a trasat graficul tensiunii și curentului din fig. 9.4.

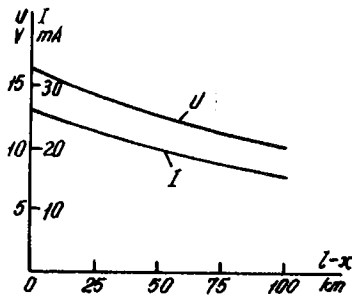


Fig. 9.4.

Din acest grafic se observă atenuarea undelor de tensiune și curent în timpul propagării de la începutul liniei electrice lungi spre extremitatea sa.

Atenuarea tensiunii și curentului pe linia electrică adaptată cu pierderi.

Din relațiile scrise mai sus, rezultă că pentru $x = l$ avem

$$U = U_1 \quad \text{și} \quad I = I_1.$$

Din rapoartele

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} = e^{\alpha l} = e^{0,48} = 1,62 ;$$

Prin urmare, curentul și tensiunea sînt atenuate în lungul liniei de 1,62 ori.

Exprimată în neperi, atenuarea tensiunii

$$a = \lg \frac{U_1}{U_2} = \lg 1,62 = \lg e^{0,48} = 0,48 \text{ Np}$$

care este același pentru curent.

CAPITOLUL 10

UNDE ELECTROMAGNETICE

S-a arătat la studiul legii inducției electromagnetice că un câmp magnetic variabil în timp \vec{B} generează într-o spirală conductoare, tensiune electromotoare. Ca urmare, va apare un curent electric. La rîndul său, curentul respectiv purtătorii de sarcină electrică - electronii - în deplasarea lor dă naștere unui câmp electric \vec{E} . Dar câmpul electric \vec{E} apare chiar și în lipsa spirei prin care circulă curentul electric; el apare ori de cîte ori variază câmpul magnetic (fig. 10.1). Câmpul electric de inducție are linii de câmp închise și este perpendicular pe câmpul magnetic variabil care îl generează (fig. 10.2).

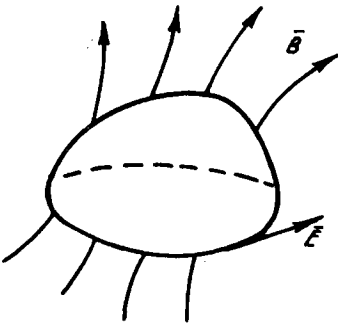


Fig. 10.1. Câmpul electric \vec{E} este generat de câmpul magnetic variabil \vec{B}

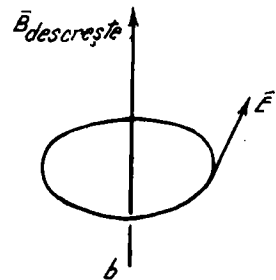
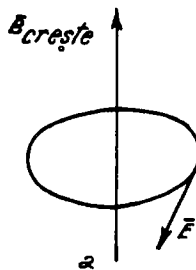


Fig. 10.2. Câmpul electric \vec{E} este perpendicular pe câmpul magnetic \vec{B} .

Dacă câmpul magnetic \vec{B} este crescător, atunci câmpul electric are un sens; când însă \vec{B} este descrescător, atunci câmpul electric \vec{E} are sens schimbat (fig. 10.2 a și b).

Prin urmare, orice câmp magnetic variabil se înconjoară cu un câmp electric cu linii de câmp închise a cărui intensitate este cu atât mai mare, cu cât variația în timp a câmpului magnetic este mai rapidă.

La rîndul său, cîmpul electric variabil în timp generează cîmp magnetic. S-a prezentat anterior că un curent electric care parcurge un conductor generează în domeniul din apropierea conductorului un cîmp magnetic. Dacă curentul electric este alternativ în timp, generează în jurul conductorului pe care îl străbate de asemenea un cîmp magnetic. Se ştie că într-un circuit electric simplu în care este plasat un condensator electric, curentul alternativ străbate circuitul electric, condensatorul electric comportîndu-se ca o reactanță capacitivă a cărei valoare este cu atît mai mică cu cît frecvența curentului alternativ este mai mare. În acest circuit electric (fig. 10.3), există o deplasare de purtători de sarcină numai în conductoarele electrice; în condensatorul electric nu trec însă purtători de sarcină electrică pentru că între

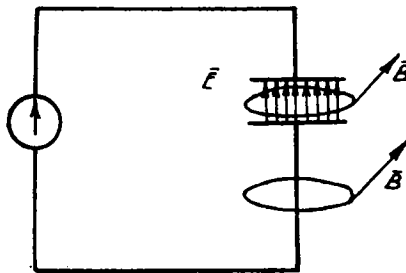


Fig. 10.3. Cîmpul magnetic \vec{B} există între armăturile condensatorului C.

armături se află dielectricul. Între armăturile condensatorului este prezent însă un cîmp electric \vec{E} variabil în timp, alternativ. Se constată însă că avem cîmp magnetic în jurul conductoarelor unde circulă purtătorii de sarcină dar apare cîmp magnetic și între armăturile condensatorului unde este prezent un cîmp electric variabil în timp.

Concluzia este că în porțiunea de circuit dintre plăcile condensatorului unde lipsește un curent electric de conducție, cîmpul electric variabil dintre armăturile condensatorului generează un cîmp magnetic.

Prin urmare, este adevărată și reciproca: câmpul electric variabil generează un câmp magnetic.

De altfel, această ipoteză a fost emisă de James Clark Maxwell în 1865 care a afirmat că orice câmp electric variabil se înconjoară cu un câmp magnetic cu linii de câmp închise, a cărui intensitate este cu atât mai mare cu cât câmpul electric variază mai rapid.

Câmpul magnetic este perpendicular pe câmpul electric variabil generator, sensul lui depinzând de modul în care crește sau scade câmpul electric; dacă câmpul electric \vec{E} este crescător, atunci câmpul magnetic \vec{B} are un sens iar dacă câmpul electric este descrescător atunci câmpul magnetic are sens contrar (fig. 10.4 a și b).

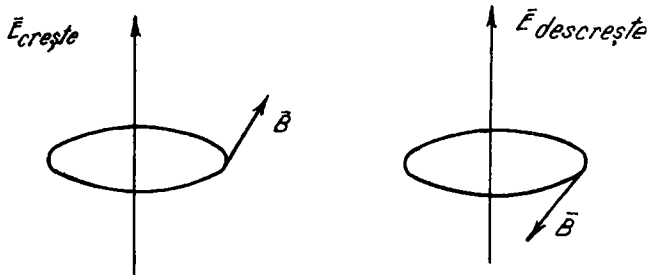


Fig. 10.4. Sensul câmpului magnetic \vec{B} depinde de variația câmpului \vec{E} .

Așadar, între câmpul electric \vec{E} și câmpul magnetic \vec{B} există o legătură în sensul că unul din ele se generează prin variația celui alt.

Sistemul de câmpuri magnetic și electric care oscilează și se generează reciproc, se numește câmp electromagnetic.

10.1. Propagarea câmpului electromagnetic

O proprietate importantă a câmpului electromagnetic cu largi aplicații în tehnică este că acesta se propagă în spațiul înconjurător.

Să considerăm un câmp electric periodic sinusoidal \vec{E}_1 care generează un câmp magnetic periodic \vec{B}_1 (fig. 10.5). La rândul său, câmpul magnetic \vec{B}_1 - fiind variabil în timp - va genera în jurul său

un câmp electric variabil \vec{E}_2 . În acest proces de generare, câmpul electric s-a propagat din a în b. La rândul său, câmpul \vec{E}_2 din punctul b va genera în jurul său un câmp magnetic variabil în timp \vec{B}_2 care va genera un câmp electric variabil în timp etc.

Prin urmare, se constată o propagare din aproape în aproape a acestui sistem de câmpuri magnetic și electric adică a câmpului electromagnetic.

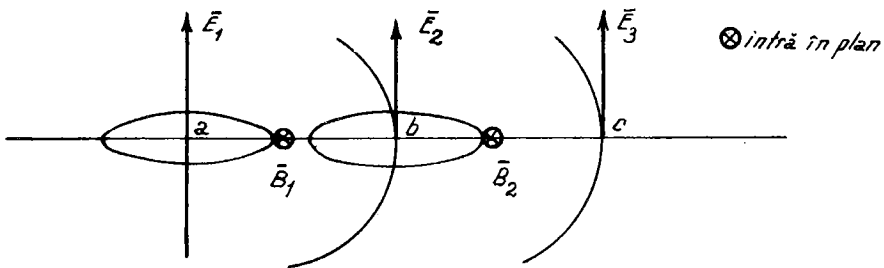


Fig. 10.5. Câmpul electric \vec{E} generează câmpul magnetic \vec{B} și reciproc.

Forma de propagare a câmpului electromagnetic care variază periodic, se numește undă electromagnetică.

Se constată deci că într-o undă electromagnetică câmpul electric \vec{E} și câmpul magnetic \vec{B} oscilează în plane perpendiculare între ele și perpendiculare pe viteza de propagare a undei notată cu \vec{v} (fig. 10.6).

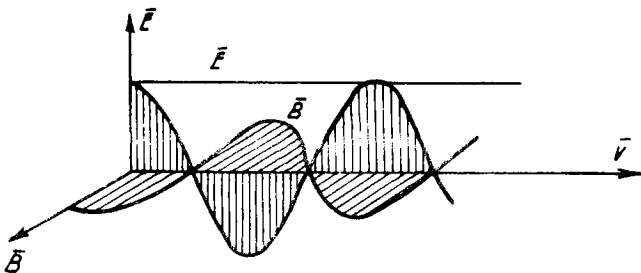


Fig. 10.6 Unda electromagnetică se propagă cu viteza \vec{v} .

Cele două câmpuri, electric și magnetic oscilează în fază și trec în același timp prin maxime și minime.

S-a demonstrat că viteza undelor electromagnetice în vid este

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (10.1)$$

în care

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ F/m}$$

permitivitatea electrică a vidului și

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

permeabilitatea magnetică a vidului.

Dacă se înlocuiește, se obține viteza undelor electromagnetice în vid:

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Valoarea vitezei undelor electromagnetice este egală cu viteza luminii în vid.

Intr-un mediu oarecare caracterizat prin permitivitatea relativă ϵ_r și permeabilitatea relativă μ_r , viteza undelor electromagnetice este mai mică decât în vid și este dată de relația

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (10.2)$$

10.2. Generarea undelor electromagnetice

Undele electromagnetice sînt generate cu ajutorul unui oscilator care se obține dintr-un circuit oscilant prin deschiderea respectiv îndepărtarea una de alta a armăturilor condensatorului; s-a realizat un circuit **oscilant deschis** (fig. 10.7).

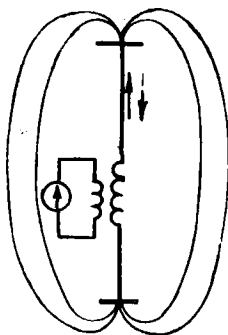


Fig. 10.7. Circuit oscilant deschis.

Un circuit oscilant deschis se poate constitui dintr-un fir conductor liniar în care se induce o tensiune electromotoare de înaltă frecvență și care la rîndul său dă naștere unui curent de asemenea de frecvență foarte înaltă. Acest fir a căpătat denumirea de dipol electric (fig. 10.8). În cazul dipolului, capacitatea și inductivitatea circuitului oscilant nu mai sînt concentrate, aceste

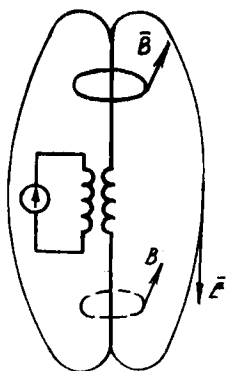


Fig. 10.8. Dipolul electric oscilant.

elemente de circuit vor fi repartizate (distribuite) în lungul dipolului electric. Totuși, pentru generarea unei t.e.m. de frecvență înaltă, s-a prevăzut la mijlocul dipolului o bobină în care se induce această tensiune electromotoare.

În cazul circuitului oscilant deschis (dipolului electric) câmpul electric nu mai este concentrat între armăturile condensatorului ca în cazul circuitului oscilant închis. Acesta se extinde la un domeniu mult mai mare din jurul dipolului.

La rîndul său, câmpul magnetic generat de câmpul electric se va extinde de asemenea la o zonă din spațiu apărînd în acest mod în spațiul din jurul dipolului electric un câmp electromagnetic care va oscila periodic cu o frecvență egală cu a curentului electric din dipol.

Oscilațiile câmpului electromagnetic se propagă în spațiu după modul în care s-a prezentat mai sus. Astfel, dipolul electric radiază în spațiu unde electromagnetice. Dar cum în câmpul electromagnetic este concentrată energie, rezultă că dipolul prin undele electromagnetice radiază energie în spațiu.

BIBLIOGRAFIE

1. Andronescu Pl. - Bazele electrotehnicii. Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1972.
2. Cristea N şi colectiv. - Culegere de probleme de electrotehnică Bucureşti. Atelierul de multiplicare I.P.B., 1979.
3. Lunze Klaus - Einführung in die Electrotechnik. Berlin VEB Verlagtechnik, 1978.
4. Nemoianu C. şi Cristea N. - Electrotehnică. Bucureşti. Atelierul de multiplicare I.P.B., 1976.
5. Răduleş R. - Bazele teoretice ale electrotehnicii. Bucureşti. Litografia învăţământului, 1955-1956.
6. Sora C. - Bazele electrotehnicii. Bucureşti. Editura didactică şi pedagogică, 1982.
7. Timotin A şi colectiv. - Lecţii de bazele electrotehnicii. Bucureşti. Editura didactică şi pedagogică, 1964.
8. Tugulea A şi colectiv. - Electrotehnică. Bucureşti. Editura didactică şi pedagogică, 1982.
9. Zaitchik Y.M. - Problèmes et excercices d'electrotechnique générale. Moscou. Editions MIR 1980.
10. Doncescu D. - Studiul actual al metodelor teoretice şi experimentale privind determinarea câmpurilor magnetice în regim deformant. Referat doctorat, I.P.B., 1978.

C U P R I N S

	Pag.
CAP. 1 Introducere.....	5
1.1. Noțiuni de calcul vectorial.....	6
1.2. Simbolurile mărimilor fizice.....	9
CAP. 2 Electrostatica.....	11
2.1. Fenomene electrice. Sarcina electrică. Câmp electric. Intensitatea câmpului electric în vid.....	11
2.1.1. Conductori, semiconductori, izolanti.....	14
2.1.2. Formula lui Coulomb.....	14
2.1.3. Câmpul electric al unei sarcini electrice punctuale.....	15
2.1.4. Unități de măsură.....	17
2.2. Tensiunea și potențialul electric.....	17
2.2.1. Unități de măsură.....	21
2.2.2. Aplicații.....	22
2.3. Câmpul electrostatic în vid al unor repartiții de sarcini. Superpoziția.....	25
2.3.1. Aplicație.....	27
2.4. Câmpul electrostatic în conductoare.....	28
2.5. Câmpul electric în substanță.....	32
2.5.1. Dielectricii nepolari.....	32
2.5.2. Dielectricii polari.....	35
2.6. Intensitatea câmpului electric în interiorul corpurilor polarizate. Inducția electrică.....	37
2.6.1. Polarizarea electrică temporară.....	39
2.7. Fluxul electric.....	40

	Pag.
2.8. Condensatoare electrice.....	41
2.8.1. Teorema capacității electrice.....	43
2.8.2. Capacitatea condensatorului plan.....	43
2.8.3. Capacități echivalente. Condensatoare legate în serie și condensatoare legate în paralel.....	45
CAP. 3 Electrocinetica.....	49
3.1. Starea electrocINETICĂ. Intensitatea curentului de conducție.....	49
3.2. Densitatea curentului electric de conducție.....	51
3.3. Natura fizică a curentului electric de conducție.....	53
3.4. Curentul electric în semiconductoare.....	53
3.5. Curentul electric în vid.....	57
3.6. Curentul electric în gaze.....	59
3.7. Curentul electric în electroliti.....	60
3.8. Câmpuri electrice imprimare.....	62
3.8.1. Câmpuri electrice imprimare de accelerație.....	64
3.8.2. Câmpuri electrice imprimare de natură termică....	65
3.8.3. Câmpuri electrice imprimare de concentrație.....	65
3.8.4. Câmpuri electrice imprimare de contact voltaice.....	66
3.8.5. Câmpuri electrice imprimare de contact termice.....	66
3.8.6. Câmpuri electrice imprimare de contact galvanice.....	68
3.8.7. Elemente galvanice primare (pile electrice). Pila Volta. Pila Daniel. Pila Leclanché.....	70
3.8.8. Elemente galvanice secundare (acumulatoare). Acumulatoare cu plumb. Acumulatoare alcaline....	72
3.9. Generatorul electric (sursa electrică). Tensiunea elec- tromotoare.....	74
3.10. Legile electrocINETICII.....	77
3.10.1. Legea de conservare a sarcinii electrice.....	77
3.10.2. Legea conducției electrice.....	80

3.10.3. Legea transformării energiei în conduc- toare parcurse de curenți electrici. (Le- gea Joule-Lenz).....	89
3.10.4. Aplicații în tehnică ale efectului electro- caloric.....	94
3.11. Circuite de curent continuu.....	96
3.11.1. Rezistorul ideal.....	97
3.11.2. Sursa ideală de tensiune.....	99
3.11.3. Sursa ideală de curent.....	100
3.11.4. Sursa reală de tensiune.....	101
3.11.5. Sursa reală de curent.....	102
3.11.6. Echivalența surselor electrice.....	104
3.11.7. Legarea surselor electrice ideale.....	105
3.12. Elementele topologice ale circuitelor de curent continuu....	107
3.13. Teoremele lui Kirchhoff pentru circuite de curent continu.....	109
3.13.1. Teorema întâi a lui Kirchhoff.....	109
3.13.2. Teorema a doua a lui Kirchhoff.....	111
3.14. Puteri în circuite de curent continuu.....	114
3.15. Teorema transferului maxim de putere.....	116
3.16. Metode de rezolvare a circuitelor liniare de curent continu.....	119
3.16.1. Metoda teoremelor lui Kirchhoff.....	121
3.16.2. Metoda superpoziției.....	129
3.16.3. Metoda curenților ciclici.....	132
3.16.4. Metoda tensiunilor la noduri.....	142
3.17. Metode de simplificare a circuitelor electrice.....	154
3.17.1. Metoda rezistențelor echivalente.....	154
3.17.2. Legarea în serie a rezistoarelor. Divizorul de tensiune.....	155
3.17.3. Legarea în paralel a rezistoarelor. Divizorul de curent.....	157
3.17.4. Teorema lui Vaschy.....	161

	Pag.
3.18. Metode de rezolvare parțială a unui circuit de curent continuu.....	164
3.18.1. Metoda generatorului echivalent de tensiune.....	164
3.18.2. Metoda generatorului echivalent de curent.....	170
3.19. Circuite neliniare de curent continuu.....	174
3.19.1. Calculul circuitelor cu elemente neliniare.....	180
3.19.2. Legarea în serie.....	180
3.19.3. Legarea în serie a unui rezistor neliniar cu o sursă.....	181
3.19.4. Echivalarea unui element neliniar cu elemente liniare de circuit.....	183
3.19.5. Legarea în paralel.....	184
3.19.6. Aplicație.....	184
CAP. 4 Electrodinamica.....	189
4.1. Câmpul magnetic în vid.....	189
4.1.1. Linia de câmp magnetic.....	191
4.1.2. Fluxul magnetic.....	192
4.2. Forțe în câmp magnetic.....	194
4.2.1. Forța lui Lorentz (Forța magnetică). Aplicație.....	194
4.2.2. Forța lui Laplace (Forța electromagnetică).....	197
4.2.3. Forța lui Ampère (Forța electrodinamică). Aplicație.....	199
4.3. Formula lui Biot-Savart.....	201
4.4. Intensitatea câmpului magnetic. Aplicație.....	202
4.5. Tensiunea magnetomotoare. Solenația. Aplicații.....	203
4.6. Câmpul magnetic în corpuri.....	207
4.6.1. Magnetizarea temporară și permanentă.....	208
4.6.2. Interpretarea microscopică a magnetizației.....	210

	Pag.
4.6.3. Intensitatea câmpului magnetic și inducția magnetică în interiorul corpurilor.....	212
4.6.4. Fluxul magnetic în corpuri introduse în câmp magnetic. Legea fluxului magnetic. Aplicații.....	214
4.6.5. Fluxul magnetic dintr-o bobină.....	216
4.6.6. Feromagnetismul.....	217
4.6.7. Materiale feromagnetice moi.....	219
4.6.8. Materiale feromagnetice dure.....	220
4.6.9. Materiale ferimagnetice.....	220
4.7. Circuite magnetice.....	221
4.7.1. Reluctanța magnetică.....	221
4.7.2. Legea lui Ohm pentru o latură de circuit magnetic.....	223
4.7.3. Legea lui Ohm pentru un circuit magnetic închis. Aplicație.....	223
4.7.4. Teoremele lui Kirchhoff pentru circuite magnetice. Aplicație.....	225
4.7.5. Analogia cu circuitele electrice. Aplicație.....	227
4.7.6. Calculul circuitelor magnetice. Calculul geometriei circuitelor magnetice. Calculul solenaiilor. Calculul inducției magnetice în întrefier. Aplicație.....	229
4.8. Bobine electrice.....	235
4.8.1. Inductivitatea unei bobine. Aplicații.....	236
4.8.2. Inductivități proprii și mutuale.....	240
4.8.3. Coeficient de cuplaj. Aplicații.....	241
4.9. Legea inducției electromagnetice.....	244
4.9.1. Regula lui Lenz.....	247
4.9.2. Inducția magnetică prin transformare.....	247
4.9.3. Inducția magnetică prin mișcare.....	249
4.9.4. Aplicație.....	251
4.10. Curenții turbionari.....	255

	Pag.
4.11. Efectul Hall.....	256
4.12. Energia din câmpul magnetic.....	257
4.13. Densitatea de volum a energiei magnetice.....	261
4.14. Forța în câmpul magnetic. Aplicație.....	263
CAP. 5 Curentul alternativ sinusoidal.....	268
5.1. Generarea tensiunii electromotoare alternative sinusoidale. Curentul alternativ sinusoidal.....	269
5.1.1. Mărime periodică. Perioadă. Frecvență. Pulsație.....	272
5.1.2. Valoare medie. Mărime alternativă. Valoare efectivă. Aplicații.....	274
5.1.3. Caracteristicile mărimilor sinusoidale. Aplicații.....	282
5.1.4. Precizări în legătură cu caracteristicile mărimilor sinusoidale.....	290
5.2. Reprezentarea mărimilor sinusoidale.....	290
5.2.1. Reprezentarea în instantaneu.....	291
5.2.2. Reprezentarea carteziană.....	291
5.2.3. Reprezentarea în complex . Aplicații.....	292
5.3. Elemente ideale de circuit în regim sinusoidal.....	301
5.3.1. Elemente de circuit pasive. Aplicații.....	302
5.3.2. Elemente de circuit active.....	318
5.4. Circuite simple în regim sinusoidal.....	320
5.4.1. Impedanța. Admitanța. Aplicație.....	320
5.5. Circuite serie și paralel.....	323
5.5.1. Circuitul RL serie.....	323
5.5.2. Circuitul RC serie.....	328
5.5.3. Circuitul RLC serie.....	332
5.5.4. Circuitul RLC paralel.....	336

5.6. Rezonanța în circuite electrice de curent alternativ sinusoidal.....	339
5.6.1. Rezonanța serie.....	340
5.6.2. Rezonanța paralel.....	347
5.6.3. Rezonanța multiplă.....	353
5.6.4. Ferorezonanța.....	354
5.7. Puterea în curent alternativ sinusoidal.....	358
5.7.1. Puterea activă. Puterea reactivă. Puterea aparentă.....	364
5.7.2. Reprezentarea puterilor în complex. Aplicații.....	370
5.7.3. Transferul maxim de putere activă.....	379
5.7.4. Teorema conservării puterilor complexe în circuite de curent alternativ sinusoidal.....	382
5.8. Metode de rezolvare a circuitelor electrice liniare de curent alternativ sinusoidal.....	384
5.8.1. Metoda legii lui Ohm.....	385
5.8.2. Metoda impedanțelor echivalente. Aplicație.....	387
5.8.3. Metoda teoremelor lui Kirchhoff. Aplicație.....	393
5.8.4. Metoda superpoziției.....	399
5.8.5. Metoda curenților ciclici. Aplicație.....	399
5.8.6. Metoda potențialelor la noduri. Aplicație.....	402
5.8.7. Metoda generatoarelor echivalente. Aplicație.....	407
CAP. 6 Regimul tranzitoriu în circuitele electrice.....	413
6.1. Circuitul RL.....	415
6.2. Circuitul RC.....	418
6.3. Circuitul R.....	422
6.4. Aplicații.....	424
CAP. 7 Circuite neliniare în regim sinusoidal.....	434
7.1. Rezistorul neliniar.....	434
7.2. Dioda semiconductoare.....	434

	Pag.
7.3. Redresorul electric.....	436
7.4. Bobina neliniară.....	442
7.5. Condensatorul neliniar.....	445
CAP. 8 Scheme echivalente a elementelor neliniare pentru semnal mic.....	448
8.1. Schema echivalentă a diodei pentru semnal mic și joasă frecvență.....	450
8.2. Schema echivalentă a tranzistorului pentru semnal mic și joasă frecvență.....	455
CAP. 9 Linii electrice lungi.....	467
9.1. Fenomene pe linii electrice lungi.....	468
9.2. Linii electrice lungi cu pierderi.....	471
9.3. Aplicație.....	471
CAP.10 Unde electromagnetice.....	479
10.1. Propagarea câmpului electromagnetic.....	481
10.2. Generarea undelor electromagnetice.....	484