

CAPITOLUL 2

FIABILITATEA ECHIPAMENTELOR

2.1. Indicatori de fiabilitate

Pentru caracterizarea fiabilității unui echipament se poate utiliza limbajul teoriei probabilităților. Durata de funcționare până la defectare a unui echipament (T – figura 1.4) este o variabilă aleatoare continuă a cărei funcție de repartiție o notăm cu $F(t)$, [3]. În conformitate cu definiția unei funcții de repartiție a unei variabile aleatoare, $F(t)$ reprezintă probabilitatea ca durata T să fie mai mică decât valoarea t , adică reprezintă *probabilitatea ca echipamentul să se defecteze* în intervalul de timp $(0, t)$.

Probabilitatea ca în intervalul $(0, t)$ să nu se producă defectarea echipamentului reprezintă funcția de fiabilitate $R(t)$ și este *complementara probabilității de defectare* $F(t)$. Cele două funcții $F(t)$ și $R(t)$ se referă la evenimente care se produc sau nu în intervalul de timp scurs de la punerea în funcțiune a echipamentului la momentul $t=0$ și până în momentul curent t , și nu la evenimente care au loc la momentul t , așa cum ar reieși din notații. De fapt notațiile $F(t)$ și $R(t)$ reprezintă o formă simplificată pentru funcțiile $F(0, t)$ și $R(0, t)$.

Pentru un interval de timp oarecare, asociat unei misiuni de durată x inițializată la momentul t , probabilitatea de defectare a unui echipament poate fi determinată utilizând relația următoare:

$$F(t, t+x) = P(t \leq T < t+x) = F(t+x) - F(t) \quad (2.1)$$

În relația (2.1) apare o probabilitate totală, care însă nu reflectă în totalitate realitatea. Echipamentul, considerat fără reînnoire (prima defectare înseamnă și sfârșitul "vieții" echipamentului), se poate defecta în intervalul $(t, t+x)$ numai dacă nu s-a defectat în intervalul $(0, t)$. Rezultă că probabilitatea de defectare $F(t, t+x)$ în intervalul $(t, t+x)$ și funcția de fiabilitate $R(t, t+x)$ sunt probabilități condiționate de buna funcționare a echipamentului în intervalul $(0, t)$. Astfel, se poate scrie:

$$F(t, t+x) = \frac{P(t \leq T < t+x)}{P(T \geq t)} = \frac{F(t+x) - F(t)}{R(t)} \quad (2.2)$$

$$R(t, t+x) = \frac{P(T \geq t+x)}{P(T \geq t)} = \frac{R(t+x)}{R(t)} \quad (2.3)$$

Comportarea locală a echipamentului în jurul unui moment dat, poate fi descrisă cu ajutorul densității de probabilitate a variabilei aleatoare T , definită astfel:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \frac{dF(t)}{dt} \quad (2.4)$$

Densitatea de probabilitate $f(t)$ reprezintă limita raportului dintre probabilitatea totală de defectare în intervalul $(t, t+\Delta t)$ și mărimea acestui interval când aceasta tinde către zero. Densitatea de probabilitate $f(t)$ este numită și *lege de repartiție a timpului de funcționare până la defectare* a echipamentului și are semnificația unei probabilități totale de defectare în jurul momentului t , indiferent de comportarea anterioară a echipamentului.

Pentru a descrie pericolul de defectare în jurul unui moment dat al unui echipament aflat în bună stare până la acel moment, se definește un alt indicator care descrie comportarea locală a echipamentului din punct de vedere al fiabilității. Acest indicator, numit *rată de defectare*, este o probabilitate condiționată analogă ratei mortalității din studiile demografice și se definește ca probabilitatea de defectare în jurul unui moment dat, condiționată de buna funcționare a echipamentului până în acel moment.

$$z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{R(t) \cdot \Delta t} = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (2.5)$$

Din relațiile (2.4) și (2.5) se obține:

$$z(t) = -\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt} \quad (2.6)$$

iar prin integrarea ecuației diferențiale (2.6) în condiția inițială $R(0)=1$ se obține:

$$R(t) = e^{-\int_0^t z(u) du} \quad \text{și} \quad F(t) = 1 - R(t) \quad (2.7)$$

În afara indicatorilor prezentați, fiabilitatea unui echipament poate fi descrisă și prin caracteristicile numerice ale variabilei aleatoare care a stat la baza caracterizării acestuia și anume timpul de funcționare până la defectare, T . Aceste caracteristici sunt: media, abaterea medie pătratică, dispersia și cuantila timpului de funcționare.

Media timpului de bună funcționare se definește utilizând relația:

$$m = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt, \quad t \in (0, \infty) \quad (2.8)$$

$$\text{sau: } m = \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (2.9)$$

În lucrările de specialitate se folosesc notațiile următoare:

- MTBF – Mean Time Between Failures (media timpului de funcționare între defectări);
- MTTF – Mean Time To Failures (media timpului de funcționare până la defectare, pentru echipamente fără reînnoire);
- MTTFE – Mean Time To First Failures (media timpului de funcționare până la prima defectare).

Abaterea medie pătratică și dispersia timpului de funcționare se definesc cu ajutorul relațiilor următoare:

$$\Delta = \int_0^{\infty} (t - m)^2 \cdot f(t) dt \quad (2.10)$$

$$\sigma = \sqrt{\Delta} \quad (2.11)$$

Mărimile Δ și σ caracterizează gradul de uniformitate al performanțelor individuale ale unor echipamente de același tip din punct de vedere al fiabilității. Dacă procesul tehnologic de realizare a echipamentelor este bine controlat, valorile indicatorilor Δ și σ vor fi mici. De asemenea, creșterea valorilor indicatorilor Δ și σ , determinați în timpul derulării procesului de fabricație, reprezintă un indiciu în evaluarea gradului de uzură a liniei de fabricație.

Un alt indicator, independent de timp, este *cuantila timpului de funcționare* t_{α} , definită ca rădăcină a ecuației:

$$F(t_{\alpha}) = \alpha \quad (2.12)$$

Din ultima relație se poate observa că t_α poate fi interpretat ca un *timp de garanție*, adică timpul în care proporția de echipamente defectate dintr-o anumită colectivitate nu depășește valoarea prestabilită α .

2.2. Modelarea uzurii echipamentelor

În teoria fiabilității, noțiunea de *uzură* are un sens mai larg decât în limbajul obișnuit. În fiabilitate prin uzură se înțelege orice alterare în timp a caracteristicilor de fiabilitate, în sensul înrăutățirii sau ameliorării acestora. La baza acestei interpretări stă constatarea empirică conform căreia, în general, orice echipament parcurge trei perioade în evoluția sa:

- o perioadă a defectărilor timpurii, când caracteristicile de fiabilitate se îmbunătățesc în timp;
- o perioadă a duratei utile de viață, când performanțele echipamentului rămân constante;
- perioadă a uzurii propriu-zise, când are loc o înrăutățire rapidă a caracteristicilor de fiabilitate.

Pentru a putea caracteriza uzura echipamentelor este necesar să se prezinte definițiile următoare [3]:

Definiția 1. Se consideră funcția de fiabilitate a unui echipament pentru o misiune de durată x , inițializată la momentul t :

$$R(t, t+x) = \frac{P(T \geq t+x)}{P(T \geq t)} = \frac{R(t+x)}{R(t)} \quad (2.13)$$

Echipamentul este caracterizat de *uzură pozitivă* dacă funcția de fiabilitate $R(t, t+x)$ este descrescătoare în intervalul $t \in [0, \infty)$ pentru orice valoare a lui $x \geq 0$. Uzura pozitivă implică faptul că pentru orice misiune a echipamentului, fiabilitatea acestuia scade odată cu vârsta.

Echipamentul este caracterizat de *uzură negativă* dacă funcția de fiabilitate $R(t, t+x)$ crește cu t , oricare ar fi $x \geq 0$, adică pentru orice misiune a echipamentului, fiabilitatea acestuia crește odată cu vârsta sa.

Din punct de vedere matematic, uzura se poate exprima și prin rata de defectare a unui echipament. Din relația de definire a ratei de defectare se obține:

$$z(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(t) - R(t+x)}{x \cdot R(t)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(t, t+x)}{x} \quad (2.14)$$

Rata de defectare a unui echipament cu uzură pozitivă este crescătoare, iar rata de defectare a unui echipament cu uzură negativă este descrescătoare în timp. Această dependență este ilustrată și de relația:

$$R(t, t+x) = e^{-\int_t^{t+x} z(u) du} \quad (2.15)$$

din care se observă că pentru $z(u)$ crescătoare argumentul exponențialei rezultă crescător în valoare absolută și deci funcția $R(t, t+x)$ este descrescătoare cu t , iar pentru rata de defectare descrescătoare rezultă argumentul descrescător pentru exponențială (în valoare absolută) și deci funcția $R(t, t+x)$ crește cu t .

Definiția 2. Se numește echipament cu *uzură medie pozitivă*, echipamentul la care funcția $\frac{1}{t} \cdot \ln \frac{1}{R}$ este crescătoare în timp, iar un echipament cu *uzură medie negativă* are funcția $\frac{1}{t} \cdot \ln \frac{1}{R}$ descrescătoare în timp.

Această definiție este mai puțin restrictivă decât prima, astfel încât un echipament care este cu uzură negativă este și cu uzură medie negativă, iar dacă este cu uzură pozitivă este și cu uzură medie pozitivă, reciprocele acestor afirmații nu sunt adevărate întotdeauna.

Definiția 3. Un echipament este *degradabil* dacă funcția de fiabilitate asociată unei misiuni de durată x , inițializată la vârsta t a echipamentului, este mai mică decât funcția de fiabilitate în intervalul $(0, t)$, oricare ar fi vârsta t a acestuia și durata misiunii x . Matematic, echipamentul degradabil poate fi definit prin relația:

$$R(t, t+x) < R(t); \quad t, x \geq 0 \quad (2.16)$$

Din definiția anterioară rezultă că un echipament degradabil care a fost folosit este inferior unui echipament nou.

Noțiunea de echipament degradabil este mai puțin restrictivă decât aceea de echipament cu uzură pozitivă, care presupunea caracterul descrescător al funcției $R(t, t+x)$ cu vârsta t a echipamentului.

Echipamentele *nedegradabile* se definesc prin relația:

$$R(t, t+x) > R(t); \quad t, x \geq 0 \quad (2.17)$$

Conform acestei relații, echipamentele *nedegradabile* își îmbunătățesc performanțele de fiabilitate în timpul funcționării, astfel încât un echipament care a fost folosit este mai bun decât unul nou.

Definiția 4. Un echipament este în *medie degradabil* dacă media timpului de funcționare rămas este mai mică decât media timpului de funcționare a echipamentului:

$$m(t) < m \quad (2.18)$$

$$\text{sau } \int_0^\infty R(t, t+x)dx < \int_0^\infty R(x)dx \quad (2.19)$$

Relația (2.19) reprezintă de fapt integrarea relației (2.16) de definire a echipamentelor degradabile.

Un echipament este în *medie nedegradabil* dacă media timpului de funcționare rămas este mai mare decât media de funcționare a echipamentului:

$$\int_0^\infty R(t, t+x)dx > \int_0^\infty R(x)dx \quad (2.20)$$

Recapitulând cele patru definiții, care sunt din ce în ce mai puțin restrictive, se poate afirma că dacă un echipament este cu uzură pozitivă, atunci el este și cu uzură medie pozitivă, este degradabil și degradabil în medie. De asemenea, dacă un echipament este cu uzură negativă, atunci el este și cu uzură medie negativă, este nedegradabil și nedegradabil în medie.

Există însă și echipamente care nu se încadrează în nici unul din tipurile prezentate, și anume *echipamentele fără uzură*. Lipsa uzurii se definește cu relația:

$$R(t, t+x) = R(t); \quad t, x \geq 0 \quad (2.21)$$

Există o singură lege de repartiție a timpului de funcționare până la defectare care verifică relația (2.21), anume legea de repartiție exponențială, pentru care funcția de fiabilitate este:

$$R(t) = e^{-\lambda \cdot t} \quad (2.22)$$

Ceilalți indicatori de fiabilitate sunt dați de relațiile următoare:

$$\text{Probabilitatea de defectare:} \quad F(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\text{Densitatea de probabilitate:} \quad f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\text{Rata de defectare:} \quad z(t) = \lambda$$

$$\text{Media timpului de funcționare: } m(t) = m = \frac{1}{\lambda} \quad (2.23)$$

$$\text{Dispersia: } D = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\text{Cuantila timpului de funcționare: } t_\alpha = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{1}{1-\alpha}$$

Reprezentarea grafică a acestor indicatori este dată în figura 2.1.

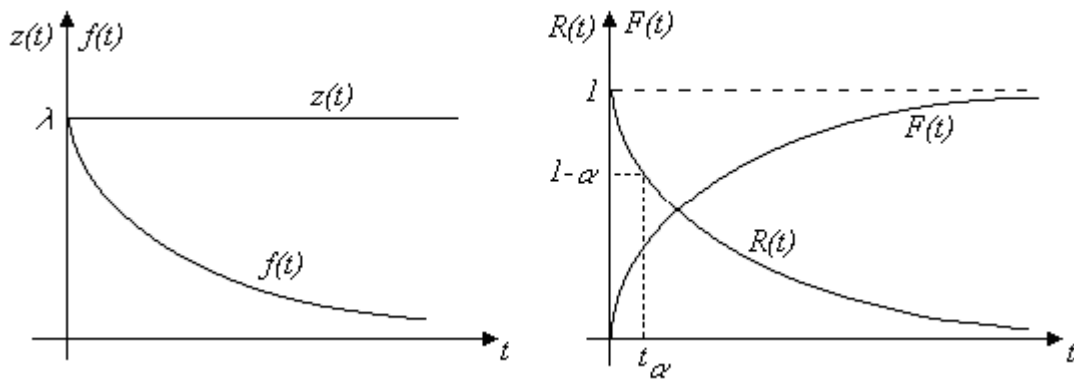


Fig. 2.1. Indicatori de fiabilitate pentru un echipament fără uzură

Se constată că media timpului de funcționare este aceeași, indiferent de vârsta echipamentului, fiind egală cu inversul ratei de defectare. Astfel de echipamente, caracterizate de o distribuție exponențială a timpului de funcționare sunt numite *echipamente fără memorie*.

În practică, distribuția exponențială este folosită pentru modelarea echipamentelor în perioada utilă de funcționare, în care rata de defectare este stabilă. Această perioadă este mai mare în cazul echipamentelor care nu conțin piese în mișcare, exemplu: echipamentele electronice, la care uzura este practic inexistentă în toată perioada utilizării lor. Lipsa uzurii nu trebuie să conducă la ideea că procesul tehnologic de fabricație ar fi deosebit de bine pus la punct. Există în acest caz o dispersie mare a timpului de funcționare, care indică o diversitate mare a echipamentelor individuale, caracteristică echipamentelor electronice, la care procesele tehnologice, utilajele și materialele folosite sunt mai complexe. O dispersie mică ar arăta că avem un proces tehnologic foarte bine controlat, caracteristic echipamentelor mecanice de mică complexitate.

Echipamentele fără memorie, caracterizate de legea de distribuție exponențială, sunt destinate de regulă unor misiuni repetate, ele fiind caracterizate de performanțe medii superioare, chiar dacă pe anumite intervale de timp comportarea lor lasă de dorit.

O problemă deosebită constă în identificarea tipului de uzură pentru un echipament. Se consideră funcția următoare:

$$t_S(F) = \int_0^{t_F} R(t) dt \quad (2.24)$$

unde t_F este cuantila de ordinul F a timpului de funcționare. Ordinul cuantilei F reprezintă probabilitatea de defectare a echipamentului, având valori între 0 și 1.

$$\text{Pentru: } F = 0 \Rightarrow t_F = 0 \Rightarrow t_S(F) = 0$$

$$\text{Pentru: } F = 1 \Rightarrow t_F \rightarrow \infty \Rightarrow t_S(F) = m \quad (2.25)$$

Funcția $t_S(F)$ poate fi normată prin împărțire la media timpului de funcționare a echipamentului. Rezultă:

$$T_S(F) = \frac{t_S(F)}{t_S(1)} = \frac{\int_0^{t_F} R(t) dt}{\int_0^{\infty} R(t) dt} = \frac{1}{m} \cdot \int_0^{t_F} R(t) dt \quad (2.26)$$

Această funcție are graficul înscris într-un pătrat de latură 1, din primul cadran. Funcția $T_S(F)$ este:

- *concavă* pentru echipamente cu uzură pozitivă;
- *convexă* pentru echipamente cu uzură negativă;
- *prima bisectoare* pentru echipamente caracterizate de lipsa uzurii.

Verificarea experimentală a tipului de uzură ce caracterizează un echipament se efectuează prin estimarea funcției $T_S(F)$ pe baza rezultatelor obținute în urma încercărilor de fiabilitate sau a rezultatelor obținute în exploatare. Funcția $T_S(F)$ se reprezintă grafic (figura 2.2), concluziile trăgându-se pe baza caracterului ei concav, convex sau liniar.

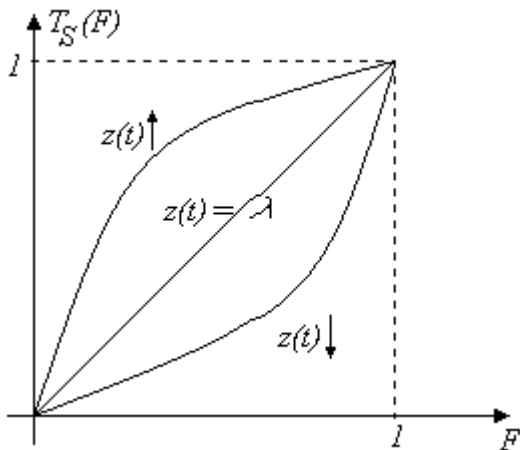


Fig. 2.2. Reprezentarea grafică a funcției $T_S(F)$

Rezultatele experimentale, fie că sunt obținute prin încercări de laborator, fie că sunt obținute în exploatare, constau din momentele de defectare ale unui eșantion de echipamente de același tip, urmărite în funcționare în condiții bine precizate, până la defectarea tuturor. Momentele de defectare $\{t_i, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$, ordonate crescător, formează o serie variațională. La momentul fiecărei defectări, se poate estima probabilitatea de defectare F prin raportul dintre numărul de ordine al defectării și volumul eșantionului. Între două momente de defectare consecutive, *probabilitatea de defectare* F estimată rămâne constantă. Se obține:

$$\hat{F}(t) = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ \frac{1}{n} & t_1 \leq t < t_2 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \frac{i}{n} & t_i \leq t < t_{i+1} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \frac{n-1}{n} & t_{n-1} \leq t < t_n \\ 1 & t \geq t_n \end{cases} \quad (2.27)$$

Probabilitatea de defectare estimată se mai numește *funcție de repartiție empirică* a timpului de funcționare. În continuare se poate obține *estimația funcției de fiabilitate*:

$$\hat{R}(t) = \begin{cases} 1 & t < t_1 \\ 1 - \frac{1}{n} & t_1 \leq t < t_2 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 1 - \frac{i}{n} & t_i \leq t < t_{i+1} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 1 - \frac{n-1}{n} & t_{n-1} \leq t < t_n \\ 0 & t \geq t_n \end{cases} \quad (2.28)$$

Această funcție se poate reprezenta grafic ca în figura 2.3. Se poate estima apoi funcția $T_S(F)$ la un moment de defectare oarecare, t_i , la care $\hat{F} = \frac{i}{n}$.

Se poate scrie:

$$\hat{T}_S\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{\hat{m}} \cdot \int_0^{t_i} \hat{R}(t) dt \quad (2.29)$$

Estimația mediei timpului de funcționare se obține ca medie aritmetică a duratei de funcționare până la defectare a echipamentelor urmărite:

$$\hat{m} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n t_i \quad (2.30)$$

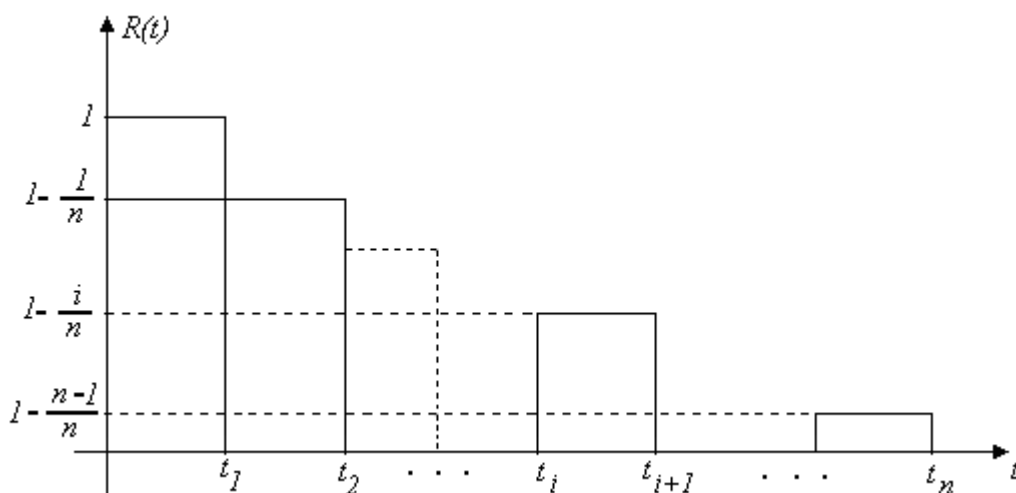


Fig.2.3. Funcția de fiabilitate estimată

Pornind de la relațiile (2.28), (2.29) și (2.30) se poate construi, pe baza rezultatelor experimentale, funcția $T_S(F)$, din reprezentarea ei grafică deducându-se caracterul uzurii echipamentului analizat. Procesul de verificare poate fi însoțit de erori ce pot apare datorită caracterului aleator al rezultatelor experimentale.

De exemplu, pentru un echipament fără uzură, din rezultatele experimentale se poate obține o estimație neliniară a lui $\hat{T}_S(F)$, care oscilează în jurul primei bisectoare ca în figura 2.4.

Ipoteza privind caracterul fără uzură al echipamentului considerat este acceptată dacă numărul de intersecții dintre

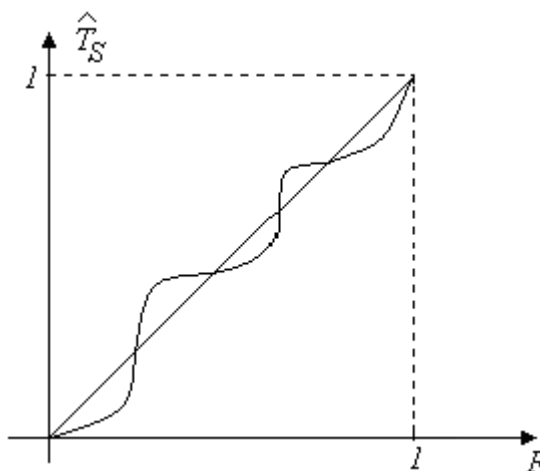


Fig.2.4. Funcția $\hat{T}_S(F)$ pentru un echipament fără uzură

funcția $T_S(F)$ estimată și prima bisectoare depășește o anumită limită, impusă de riscul de ordinul I, adică de probabilitatea de respingere a ipotezei când acesta este adevărată.

2.3. Legi de repartiție asociate mecanismelor de defectare

Exprimarea analitică a funcției de fiabilitate, constituie o problemă centrală în teoria fiabilității. Legile de repartiție utilizate de statistica matematică sau de alte domenii cum ar fi statistica descriptivă, economia, demografia, nu pot fi folosite în fiabilitate decât atunci când se cunosc foarte bine bazele fizice ale fenomenului de defectare, astfel încât domeniul de aplicare al legii respective să poată fi delimitat cât mai exact.

Utilizând raționamente de ordin fizic și în urma prelucrării unui volum foarte mare de date experimentale, s-au elaborat unele legi de repartiție specifice aplicațiilor legate de teoria fiabilității: legea Birnbaum-Saunders, legea valorii extreme (Gumbel), Weibull, alfa etc. În același timp au fost elaborate interpretări fizice intuitive pentru unele legi de repartiție clasice: legea normală, gama, Rayleigh etc., precizându-se care sunt domeniile în care se pot aplica aceste legi de repartiție.

Asocierea dintre o lege de repartiție teoretică și un echipament concret se face printr-un raționament care combină interpretarea fizică și verificarea experimentală, cel mai important argument fiind cel dat de confruntarea cu rezultatele experimentale. Construcția unei legi de repartiție unice, specifică unui anumit mecanism de defectare este practic imposibilă, de aceea, în mod obișnuit se recurge la selecția unei legi de repartiție dintre cele uzuale, lege care să fie adecvată mecanismului de defectare respectiv.

Criteriul fundamental în adoptarea legii de repartiție este corespondența dintre legea teoretică și rezultatele obținute pe cale experimentală. Procedeu de verificare este bazat pe teoria generală a verificării ipotezelor statistice. Astfel, se formulează ipoteza nulă H_0 privind natura legii de repartiție a timpului de funcționare și ipoteza alternativă H_1 , care exclude valabilitatea tipului de lege propus.

Decizia între ipotezele formulate se face pe baza rezultatelor experimentale obținute prin urmărirea unui eșantion din echipamentele care urmează să fie caracterizate, adică prin efectuarea unui test statistic de concordanță.

Decizia care se ia poate fi afectată de cele două riscuri de eroare:

- *riscul de ordinul I, α* : probabilitatea de respingere a ipotezei nule când aceasta este adevărată;
- *riscul de ordinul II, β* : probabilitatea acceptării ipotezei nule, când aceasta este falsă.

Criteriul de decizie trebuie ales astfel încât riscurile α și β să nu depășească anumite valori impuse inițial.

Criteriul utilizat cel mai frecvent este *Kolmogorov-Smirnov*, care presupune cunoașterea momentelor de defectare ale tuturor echipamentelor din eșantion supus analizei. Cu ajutorul acestor momente, $\{t_i, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ ordonate crescător, se poate estima funcția de repartiție $\hat{F}(t)$. Dacă $F(t)$ este funcția de repartiție teoretică, propusă pentru caracterizarea fiabilității echipamentului respectiv, teorema Kolmogorov-Smirnov arată că ecartul maxim $\sup_t |F(t) - \hat{F}(t)|$, dintre funcția de repartiție

teoretică și estimația ei este o variabilă aleatoare a cărei lege de repartiție depinde numai de volumul eșantionului, nu și de natura legii care se verifică. Criteriul de decizie pentru acceptarea sau respingerea ipotezei formulate este dat de cuantila de ordinul $1 - \alpha$ a distribuției Kolmogorov-Smirnov, care este tabelată. Ipoteza este acceptată dacă ecartul maxim dintre funcția de repartiție estimată și cea teoretică nu depășește valoarea cuantilei. Testul Kolmogorov-Smirnov are dezavantajul că presupune o încercare de fiabilitate prelungită până la defectarea tuturor elementelor eșantionului. Testul Kolmogorov-Smirnov se poate aplica și la încercări trunchiate și cenzurate. Prin micșorarea cantității de informație, rezultată din trunchiere și cenzurare, puterea testului de concordanță scade, astfel încât de multe ori testul lasă să se accepte mai multe ipoteze privind caracterul repartiției timpului de funcționare (ex. Weibull, normală și exponențială).

Pe lângă faptul că au o putere redusă, testele de concordanță bazate pe încercări trunchiate mai pot fi afectate de o eroare. Se face ipoteza că legea adoptată și acceptată de test este valabilă și dincolo de intervalul de timp în care s-a efectuat testul de concordanță. Se poate întâmpla însă ca, în timp, legea de distribuție să-și schimbe caracterul într-un mod care nu poate fi prevăzut pe baza încercărilor trunchiate efectuate.

O altă modalitate de verificare a concordanței dintre o lege teoretică și datele experimentale este dată de statistica informațională. Astfel, dacă se consideră două legi de repartiție discrete T și S , care asociază unei aceleași

variabile aleatoare sistemele de probabilități $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ și respectiv $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, astfel încât:

$$\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{j=1}^n q_j = 1 \quad (2.31)$$

Se definește *corelația informațională* între cele două distribuții S și T prin:

$$C_{S,T} = \sum_{i=1}^n p_i \cdot q_i \quad (2.32)$$

Corelația dintre distribuție și ea însăși se numește *energie informațională*:

$$\begin{aligned} C_{S,S} &= E_S = \sum_{i=1}^n p_i^2 \\ C_{T,T} &= E_T = \sum_{i=1}^n q_i^2 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Coeficientul de corelație informațională între repartițiile S și T rezultă prin normarea relației (2.32):

$$E_{S,T} = \frac{C_{S,T}}{\sqrt{E_S \cdot E_T}} \quad (2.34)$$

Din ultima relație rezultă că valoarea coeficientului de corelație informațională între două legi identice de repartiție este maximă și egală cu unitatea.

Să presupunem că S este o lege de repartiție empirică, estimată pe baza unui eșantion de date experimentale, iar T este legea de repartiție teoretică ce caracterizează echipamentul analizat. Cu cât volumul de date experimentale crește, cu atât repartiția empirică se apropie de cea teoretică, iar coeficientul de corelație informațională tinde către unitate. Pentru un anumit volum de date experimentale, coeficientul va fi cu atât mai aproape de unitate cu cât legea de repartiție teoretică adoptată este mai aproape de realitate.

O alternativă față de alegerea unei legi de repartiție anumite dintr-o mulțime de posibilități este construcția unei legi de repartiție generale, valabilă pentru toate echipamentele și care se particularizează prin precizarea valorilor numerice ale parametrilor care intervin în expresia ei analitică. O astfel de lege de repartiție atât de flexibilă, încât să includă toate legile particulare posibile – dacă ar exista – ar avea un număr foarte

mare de parametri astfel încât dificultatea ar fi translatată de la problema stabilirii naturii legii, la evaluarea parametrilor săi. Soluția constă în utilizarea legii de repartiție exponențială, care poate aproxima orice lege de repartiție printr-o combinație sau printr-o succesiune de legi de repartiție exponențiale.

Această aproximare prin combinații de exponențiale se mai numește și *aproximare continuă*. Modelele fundamentale ale aproximării continue sunt de tip serie, paralel sau triunghi.

În primul caz, aproximarea de tip serie se obține printr-o combinație liniară de repartiții exponențiale. Astfel, o repartiție oarecare $f(t)$ poate fi scrisă:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \lambda_i \cdot e^{-\lambda_i t}; \quad \text{cu} \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \quad (2.35)$$

Exemplu: Se consideră un echipament (o diodă semiconductoare) cu două moduri de defectare incompatibile: scurtcircuit și întrerupere. Se presupune că fiecărui mod de defectare i se asociază o repartiție exponențială de parametru λ_i , iar ω_i este probabilitatea ca defectarea să se producă prin modul particular i , rezultând o repartiție a timpului de funcționare dată de relația (2.35).

Conform modelului paralel, timpul de funcționare până la defectare este o sumă a unor durate aleatoare repartizate după legi exponențiale de parametri diferiți. Echipamentul trece deci prin stări intermediare, de la starea inițială de bună funcționare până la starea de defectare. Aceste stări intermediare pot reprezenta uzura pozitivă a echipamentului.

Al treilea model elementar al aproximării continue este modelul triunghi. Conform acestui model, echipamentul poate trece prin mai multe stări intermediare, ca în cazul modelului paralel, dar nu trebuie neapărat să le parcurgă pe toate pentru a atinge starea de defectare, aceasta fiind accesibilă din orice stare intermediară.

Reprezentând prin nodurile unui graf stările echipamentului și prin arce posibilitățile de tranziție, se obține modelul din figura 2.5, în care starea inițială este notată cu "0", iar starea de defectare este notată cu "k". Starea de defectare "k" este accesibilă din toate celelalte stări, cu probabilitățile de tranziție respective $\lambda_k \cdot \Delta t, \lambda_{k+1} \cdot \Delta t, \dots, \lambda_{k-l} \cdot \Delta t$. Probabilitățile de tranziție între stările de bună funcționare sunt: $\lambda_1 \cdot \Delta t, \lambda_2 \cdot \Delta t, \dots, \lambda_{k-1} \cdot \Delta t$.

Analiza cantitativă a acestui model se poate efectua prin *metoda lanțurilor Markov*.

Modelele elementare de tip serie, paralel și triunghi pot fi combinate între ele, rezultând o multitudine de legi de repartiție exprimate sub forma unei combinații de exponențiale și de repartiții gama de diferite ordine.

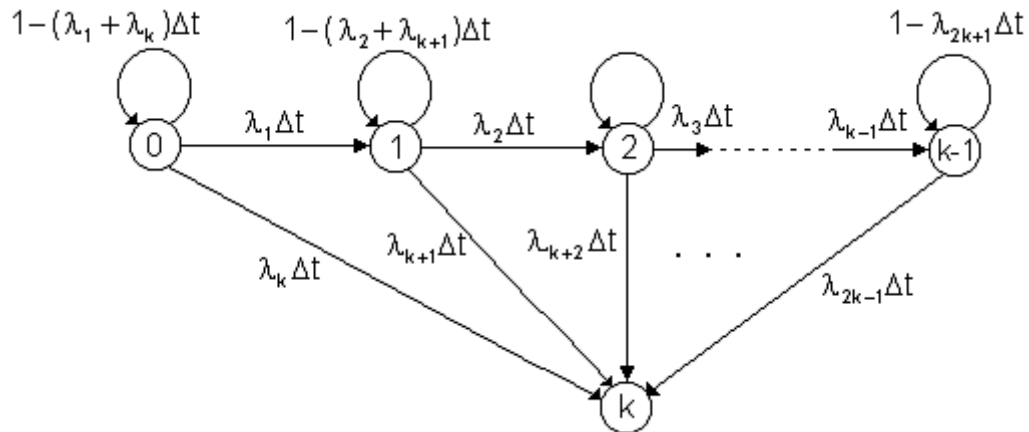


Figura 2.5. Modelul triunghi al aproximării continue

Deși nu înlătură dificultățile asociate testelor de concordanță, modelul aproximării continue a repartițiilor, este deosebit de elegant și util prin aceea că oferă o modalitate generală și comodă de exprimare a legilor de repartiție, care poate fi utilizată cu succes în analiza echipamentelor cu uzură prin metoda lanțurilor Markov.

2.4. Reînnoirea echipamentelor

2.4.1. Procese de reînnoire

Analiza fiabilității echipamentelor trebuie să țină seama și de faptul că asupra acestora se exercită intervenții exterioare care se opun degradării prin recondiționarea totală sau parțială a echipamentului. Aceste intervenții sunt posibile în cazul echipamentelor reparabile, acestea putând fi aduse, prin intervenții exterioare, în starea de funcționare “ca noi” sau într-o stare de bună funcționare, caracterizată însă de o anumită uzură, pornind din starea de “defectare”. Sunt însă și echipamente a căror evoluție se termină odată cu prima defectare, cum este cazul componentelor și echipamentelor nereparabile.

În cazul echipamentelor cu posibilități de reînnoire, eficiența lor în exploatare este determinată atât de caracteristicile lor intrinseci, cât și de

cele ale intervențiilor exterioare. În acest sens, se lărgeste sensul noțiunii de fiabilitate ca fiind capacitatea echipamentului de a-și îndeplini misiunea. Este esențial faptul că la asigurarea fiabilității unui echipament reparabil concură capacitatea echipamentului de a-și menține performanțele în timp (fiabilitatea în sens restrâns) și *capacitatea de restabilire* a acestor performanțe. Aceasta din urmă, numită **mentenabilitate**, ține atât de echipament, în măsura în care arhitectura acestuia ușurează activitățile de diagnoză tehnică și depanare, cât și de modul de organizare a întreținerii echipamentului: aprovizionarea cu piese de schimb, volumul și calificarea personalului de întreținere etc. **Mentenanța** poate fi definită ca ansamblul tuturor acțiunilor efectuate în scopul menținerii sau restabilirii unui echipament în stare normală de funcționare. *Mentenanța* poate fi *preventivă* sau *corectivă*. Mentenanța preventivă reprezintă intervențiile sistematice care au loc de regulă după un plan, în vederea asigurării corecte a echipamentului. Mentenanța corectivă reprezintă intervențiile, necesare în urma unor defectări accidentale, care au drept scop restabilirea capacității de funcționare a echipamentului la parametri nominali.

În scopul analizei proceselor de reînnoire se admite faptul că orice intervenție exterioară asupra unui echipament în vederea restabilirii performanțelor acestuia are loc la momentul unei defectări a echipamentului și este efectuată într-un timp neglijabil.

O asemenea intervenție, capabilă să pună echipamentul în stare de funcționare, va fi numită **reînnoire**, indiferent de amploarea influenței sale asupra echipamentului. Evoluția unui echipament va fi reprezentată deci de succesiunea unor momente de reînnoire t_1, t_2, \dots, t_n , și a intervalelor dintre acestea: $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ (figura 2.6).

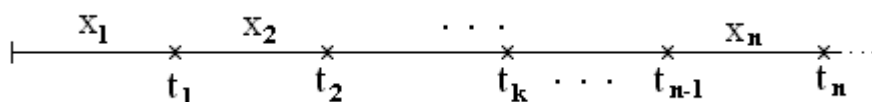


Fig. 2.6. Evoluția unui echipament cu reînnoire

Dacă se consideră un interval de timp oarecare $(0, t)$, numărul de reînnoiri N_t , efectuate în acest interval, este un proces aleator discret, numit **proces de reînnoire**. Dacă acest proces este complet cunoscut se pot face previziuni asupra comportării echipamentului cu reînnoire, utilizate în elaborarea programului de mentenanță.

Cunoașterea procesului aleator de reînnoire presupune calculul funcției de repartiție $P(N_t = r); \forall t, \forall r$, sau cel puțin al unor valori medii ale

procesului aleator N_t . Pentru aceasta se consideră anumite ipoteze asupra reînnoirilor, legate atât de caracteristicile operației de intervenție cât și de cele ale echipamentului.

Prima ipoteză privește caracterul independent al variabilelor aleatoare $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ care reprezintă duratele de funcționare ale echipamentului.

Se presupune deci că modul de comportare a echipamentului între două reînnoiri succesive nu este corelat cu comportarea sa în intervalul dintre alte două reînnoiri. În cazul cel mai general, prin operația de reînnoire echipamentul este complet transformat astfel încât, după fiecare reînnoire avem de-a face cu un echipament nou din punct de vedere al fiabilității. În aceste condiții, echipamentul va fi caracterizat în fiecare interval de funcționare $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ de indicatorii generali de fiabilitate.

În realitate, reînnoirea nu schimbă cu totul caracteristicile echipamentului prin trecerea sa din starea de defectare în starea de bună funcționare. Influența reînnoirii asupra echipamentului este orientată fie în sensul îmbunătățirii, fie în sensul înrăutățirii fiabilității acestuia, în funcție de performanțele activității de intervenție asupra echipamentului. Peste această influență se suprapune efectul uzurii acumulate în timp, uzură care poate fi pozitivă sau negativă. Din combinația dintre proprietățile intrinseci ale echipamentului cu cele ale operațiilor de intervenție rezultă modul de variație al funcției de fiabilitate.

Notăm cu $R_i(x)$ *funcția de fiabilitate* a echipamentului în intervalul dintre reînnoirea $(i-1)$ și reînnoirea i . Ținând seama de ordonarea funcțiilor $R_i(x)$, se poate face o clasificare a reînnoirilor.

Se numesc *reînnoiri propriu-zise* acele reînnoiri care aduc echipamentul mereu în aceeași stare, eliminându-se uzura acumulată de la reînnoirea precedentă. În acest caz este valabilă relația:

$$R_1(x) = R_2(x) = R_3(x) = \dots R_n(x) = R(x) \quad (2.36)$$

iar *procesul de reînnoire* se numește *simplu*.

Atunci când în urma efectuării unei reînnoiri echipamentul este adus într-o stare diferită de starea sa la momentul $t=0$, relația (2.36) se poate scrie:

$$\begin{aligned} R_2(x) = R_3(x) = \dots = R(x) \\ R_1(x) \neq R(x) \end{aligned} \quad (2.37)$$

În acest caz *procesul de reînnoire* se numește *general*.

În procesele simple, toți indicatorii de fiabilitate sunt identici în toate intervalele dintre reînnoiri succesive. În cazul proceselor generale există două tipuri de indicatori: cei definiți pe primul interval de funcționare (până la prima defectare – MTTF) și cei definiți pentru intervale dintre două defectări succesive (MTBF).

Procese de reînnoire propriu-zise sunt caracteristice echipamentelor formate din elemente fără uzură, la care reînnoirea constă din înlocuirea sau repararea elementelor defecte.

Se definesc *reînnoirile pozitive* prin:

$$R_1(x) > R_2(x) > R_3(x) > \dots > R_n(x) > \dots \quad (2.38)$$

În cazul unui echipament fără uzură sau cu uzură negativă reînnoirile pozitive sunt datorate unei calități necorespunzătoare a operațiilor de intervenție, în timp ce, în cazul echipamentelor cu uzură pozitivă, reînnoirile pot fi pozitive, chiar dacă ele contribuie la ameliorarea fiabilității echipamentului, acțiunea lor fiind contracarată de efectul uzurii acestuia.

Reînnoirile negative se definesc prin relația următoare:

$$R_1(x) < R_2(x) < R_3(x) < \dots < R_n(x) < \dots \quad (2.39)$$

Pentru echipamentele cu uzură pozitivă, reînnoirile negative se datorează unei calități deosebite ale operațiilor de întreținere. Reînnoirile pot fi negative chiar dacă ele contribuie la înrăutățirea caracteristicilor de fiabilitate ale echipamentului, acest lucru putându-se întâmpla datorită efectului de ameliorare al uzurii negative.

Încadrarea reînnoirilor într-una dintre cele trei categorii este oarecum restrictivă, întrucât nu toate reînnoirile efectuate asupra unui echipament pot fi de același tip, chiar dacă sunt efectuate de către aceeași echipă de mentenanță.

Pentru a lua în considerare posibilitățile ca printre reînnoiri pozitive să se includă și unele reînnoiri negative sau invers, se consideră **reînnoirile stohastic pozitive**, respectiv **stohastic negative**, definite prin relațiile:

$$\begin{aligned} R_1^{st}(x) &> R_2^{st}(x) > \dots > R_n^{st}(x) > \dots \\ R_1^{st}(x) &< R_2^{st}(x) < \dots < R_n^{st}(x) < \dots \end{aligned} \quad (2.40)$$

Considerăm un echipament fără uzură, asupra căruia se aplică o reînnoire propriu-zisă, procesul de reînnoire fiind simplu [3]. Ne interesează caracteristicile procesului aleator N_t , definit ca numărul de reînnoiri în intervalul $(0, t)$. Pentru aceasta se consideră un interval mic $(t, t + \Delta t)$ și se evaluează probabilitatea ca până la momentul $t + \Delta t$ să se producă r reînnoiri:

$$P_r(t + \Delta t) = P \cdot (N_{t+\Delta t} = r) \quad (2.41)$$

În intervalul $(0, t + \Delta t)$, cele r reînnoiri se pot produce astfel:

- r reînnoiri în $(0, t)$ și nici o reînnoire în $(t, t + \Delta t)$;
- $r - 1$ reînnoiri în $(0, t)$ și o reînnoire în $(t, t + \Delta t)$;
- $r - 2$ reînnoiri în $(0, t)$ și 2 reînnoiri în $(t, t + \Delta t)$;
- și așa mai departe.

Probabilitatea defectării unui echipament fără uzură într-un interval de timp $(t, t + \Delta t)$ este dată de $\lambda \Delta t + \varepsilon(\Delta t)$, unde $\varepsilon(\Delta t)$ este un infinit mic superior lui Δt , iar probabilitățile asociate defectărilor repetate în acest interval sunt infiniti mici superiori lui Δt . Se poate scrie următoarea relație de recurență:

$$P_r(t + \Delta t) = P_{r-1}(t) \cdot [\lambda \cdot \Delta t + \varepsilon(t)] + P_r(t) \cdot [1 - \lambda \cdot \Delta t + \varepsilon(\Delta t)] \quad (2.42)$$

Prin diferențierea relației (2.42) se obține:

$$\frac{dP_r(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_r(t) + \lambda \cdot P_{r-1}(t) \quad (2.43)$$

Pentru a rezolva ecuația (2.43) se adoptă forma următoare pentru probabilitatea $P_r(t)$:

$$P_r(t) = v_r(t) \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad (2.44)$$

Înlocuind relația (2.44) în relația (2.43) se obține:

$$\frac{dv_r(t)}{dt} = \lambda \cdot v_{r-1}(t) \quad (2.45)$$

Rezolvând ecuația (2.45) în condițiile inițiale:

$$\begin{aligned} v_0(t) &= 1 \\ v_r(0) &= 0 \quad \text{se obține: } v_r(t) = (\lambda t)^r / r! \\ r &= 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.46)$$

astfel încât procesul aleator este dat de:

$$P_r(t) = \frac{(\lambda t)^r}{r!} \cdot e^{-\lambda t} \quad (2.47)$$

Relația (2.47) reprezintă un proces aleator de tip Poisson, cel mai simplu proces de reînnoire. Procesul de reînnoire poate fi caracterizat în mod sintetic prin media și dispersia numărului de reînnoiri în intervalul $(0, t)$. Media numărului de reînnoiri în intervalul $(0, t)$ se numește **funcție de reînnoire** și are expresia următoare:

$$H(t) \stackrel{\Delta}{=} M(N_t) = \lambda t \quad (2.48)$$

Relația (2.48) arată faptul că numărul mediu de reînnoiri propriu-zise ale unui echipament fără uzură este proporțional cu mărimea intervalului de timp considerat.

Prin derivarea funcției de reînnoire se obține **densitatea de reînnoire** $h(t)$, interpretată ca probabilitatea producerii unei reînnoiri în jurul momentului t , indiferent de ordinul acesteia:

$$h(t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{dH(t)}{dt} = \lambda \quad (2.49)$$

Rezultă în acest caz o valoare constantă și egală cu rata de defectare a echipamentului.

Considerând acum un echipament cu uzură, negativă sau pozitivă, asupra căruia se efectuează reînnoiri care nu modifică gradul de uzură al echipamentului, se pot obține funcția și densitatea de reînnoire prin generalizarea relațiilor (2.48) și (2.49):

$$H(t) = \int_0^t z(t), \quad h(t) = z(t) \quad (2.50)$$

Se observă că funcția de reînnoire este egală cu logaritmul inversului funcției de fiabilitate. Determinarea tipului reînnoirilor se poate face pe baza unei metode care analizează primele trei durate de funcționare x_1, x_2, x_3 , înregistrate la un eșantion de n elemente. Pentru a alege între reînnoirile propriu-zise și cele pozitive, se formulează ipotezele nulă (H_0) și alternativă (H_1):

$$\begin{aligned} H_0 : R_1(x) &= R_2(x) = R_3(x) \\ H_1 : R_1(x) &> R_2(x) > R_3(x) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Se notează cu x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} , duratele de funcționare până la a treia reînnoire, corespunzătoare echipamentului i din eșantion ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Se definește variabila aleatoare z_i , pentru fiecare element al eșantionului:

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{pentru } x_{i1} < x_{i2} < x_{i3} \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases} \quad (2.52)$$

$(i = 1, 2, 3, \dots, n)$

Valorile $z_i = 1$ reprezintă argumentele împotriva caracterului pozitiv al reînnoirilor, astfel încât dacă în eșantion există numeroase valori z_i egale cu unitatea, se acceptă ipoteza H_0 și se infirmă ipoteza H_1 .

În vederea adoptării unei decizii se consideră variabila $S = \sum_{i=1}^n z_i$ și se acceptă ipoteza H_1 dacă $S \leq k$, în caz contrar acceptându-se ipoteza H_0 . Valoarea limitei de acceptare k se determină pe baza riscului α de respingere a ipotezei H_0 atunci când ea este adevărată.

Se presupune că în urma verificării s-a stabilit că reînnoirile efectuate sunt reînnoiri propriu-zise, adică prin reînnoire echipamentul este adus mereu în aceeași stare, starea de la momentul $t = 0$. Se obține astfel un proces simplu de reînnoire descris de relația:

$$P(N_t \geq r) = P(T_r < t) \quad (2.53)$$

relație ilustrată în figura 2.7:

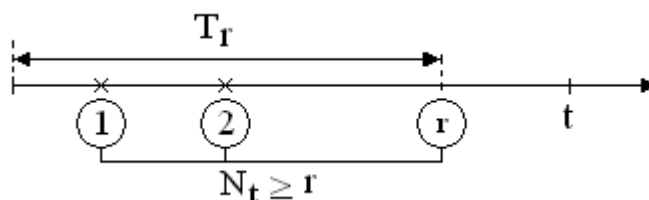


Fig. 2.7. Proces de reînnoire simplu

Numărul de reînnoiri produse în intervalul $(0, t)$ este mai mare decât r dacă și numai dacă durata scursă până la reînnoirea cu numărul de ordine r este mai mică decât t . Fie $K_r(t)$ funcția de repartiție a variabilei aleatoare T_r și $k_r(t)$ densitatea de probabilitate. Se observă distribuția discretă la un moment dat a procesului aleator N_t , care poate fi exprimată cu ajutorul funcției de repartiție continuă a variabilei T_r .

$$P(N_t = r) = P(N_t \geq r) - P(N_t \geq r+1) = K_r(t) - K_{r+1}(t) \quad (2.54)$$

$$r = 1, 2, \dots, K_0(t) = 1$$

Procesul de reînnoire este complet caracterizat dacă funcția de repartiție $K_r(t)$ poate fi exprimată cunoscând indicatorii de fiabilitate ai echipamentului. Întrucât toate intervalele de funcționare între reînnoiri consecutive sunt identic distribuite, cu densitatea de probabilitate $f(x)$, se poate scrie conform teoremei privind distribuția sumei de variabile aleatoare independente:

$$T_r = x_1 + x_2 + \dots + x_r$$

$$k_r(t) = \underbrace{f(t) \otimes f(t) \otimes \dots \otimes f(t)}_r \quad (2.55)$$

unde \otimes reprezintă produsul de convoluție.

Pornind de la relația (2.55) se poate calcula densitatea de probabilitate a duratei scurse până la reînnoirea r , prin integrarea căreia se obține funcția de repartiție utilizată în relația (2.54).

Folosind transformata *Laplace*:

$$g^*(s) = Lg(t) = \int_0^{\infty} g(t) \cdot e^{-st} dt \quad (2.56)$$

se obține: $k_r^*(s) = [f^*(s)]^r \quad (2.57)$

și $K_r^*(s) = \frac{1}{s} [f^*(s)]^r \quad (2.58)$

Cu aceasta procesul simplu de reînnoire este complet caracterizat. Dacă procesul de reînnoire este general, atunci trebuie făcută distincție între densitatea de probabilitate corespunzătoare primului interval $f_1(x)$ și densitatea $f(x)$ corespunzătoare tuturor celorlalte intervale. În acest caz funcția de repartiție trebuie calculată cu ajutorul relațiilor:

$$k_r^*(s) = f_1^*(s) \cdot [f^*(s)]^{r-1} \quad (2.59)$$

$$K_r^*(s) = \frac{1}{s} \cdot f_1^*(s) \cdot [f^*(s)]^{r-1} \quad (2.60)$$

Un proces general de reînnoire poate fi interpretat ca un proces simplu care începe să fie observat de la un moment oarecare al evoluției sale (figura 2.8). Indiferent de tipul procesului, relația fundamentală (2.54) rămâne valabilă, distincția între procesul simplu și cel general făcându-se prin modul de calcul al funcției de repartiție $K_r(t)$.

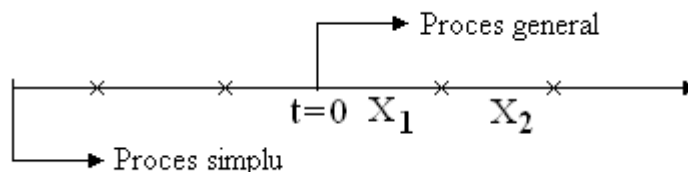


Fig. 2.8. Reprezentarea unui proces de reînnoire

Utilizarea practică a relației (2.54) nu este însă prea comodă, de aceea se preferă caracterizarea procesului de reînnoire cu ajutorul funcției de reînnoire $H(t)$, care reprezintă numărul mediu de reînnoiri produse în intervalul $(0, t)$. Pornind de la definiția mediei se obține:

$$\begin{aligned}
 H(t) &= \sum_{r=1}^{\infty} rP(N_t = r) = \sum_{r=1}^{\infty} r(K_r(t) - K_{r+1}(t)) = \\
 &= K_1(t) - K_2(t) + \\
 &+ 2 \cdot K_2(t) - 2 \cdot K_3(t) + \\
 &+ 3 \cdot K_3(t) - 3 \cdot K_4(t) + \\
 &\dots\dots\dots \\
 &= K_1(t) + K_2(t) + \dots = \sum_{r=1}^{\infty} K_r(t)
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Prin derivare se obține densitatea de reînnoire:

$$h(t) = \frac{dH(t)}{dt} = \sum_{r=1}^{\infty} k_r(t) \tag{2.62}$$

Această relație reprezintă probabilitatea producerii unei reînnoiri în jurul unui moment dat, indiferent de ordinul acesteia. Aplicând transformata Laplace relațiilor (2.57) – (2.62) se obține densitatea și funcția de reînnoire pentru procesul de reînnoire simplu:

$$h^*(s) = \sum_{r=1}^{\infty} [f^*(s)]^r = \frac{f^*(s)}{1 - f^*(s)} \tag{2.63}$$

$$H^*(s) = \frac{f^*(s)}{s \cdot [1 - f^*(s)]} \quad (2.64)$$

În cazul unui proces general de reînnoire relațiile (2.63) și (2.64) devin:

$$h^*(s) = \sum_{r=1}^{\infty} f_1^*(s) \cdot [f^*(s)]^{r-1} = \frac{f_1^*(s)}{1 - f^*(s)} \quad (2.65)$$

$$H^*(s) = \frac{f_1^*(s)}{s \cdot [1 - f^*(s)]} \quad (2.66)$$

Se analizează în continuare cazul unui proces general. Trecând în domeniul timp se obține pentru densitatea de reînnoire:

$$h(t) = f_1(t) + h(t) \otimes f(t) = f_1(t) + \int_0^t h(\tau) \cdot f(t - \tau) d\tau \quad (2.67)$$

Ecuția (2.67) se numește *ecuația reînnoirii*.

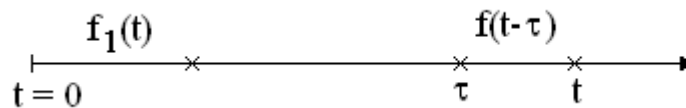


Fig. 2.9. Explicativă la ecuația reînnoirii

În jurul momentului t se poate produce prima reînnoire, probabilitatea acestui eveniment fiind $f_1(t)$. Fie acum o reînnoire de ordin oarecare produsă în jurul momentului t și fie τ momentul reînnoirii precedente (figura 2.9). Produsul $h(\tau) \cdot f(t - \tau)$ reprezintă probabilitatea ca în jurul momentului τ să fi avut loc o reînnoire oarecare, iar proxima reînnoire să se producă în jurul momentului t . Însușind aceste probabilități pentru toate valorile $\tau \in (0, t)$ și adăugând pe $f_1(t)$ se obține probabilitatea unei reînnoiri în jurul momentului t , indiferent de ordinul acesteia, adică se obține densitatea de reînnoire.

Exemplu de mod de calcul al densității și funcției de reînnoire [3]:

Se consideră un echipament format dintr-un element de bază și o rezervă pasivă care preia funcționarea în caz de defectare a elementului de bază. Se

presupune că elementele echipamentului sunt fără uzură. Rezultă că durata de funcționare până la defectare a echipamentului se obține însumând duratele de funcționare ale celor două elemente.

Repartiția timpului de funcționare va fi convoluția a două repartiții exponențiale identice:

$$\begin{aligned} f(t) &= \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \otimes \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \\ f^*(s) &= \frac{\lambda^2}{(s + \lambda)^2} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Trecând în domeniul timp, rezultă repartiția timpului de funcționare a echipamentului de tip gama, cu parametrii $\alpha = 2$ și $\beta = \lambda$:

$$f(t) = \lambda \cdot (\lambda \cdot t) \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad (2.69)$$

Media timpului de funcționare este egală cu dublul mediei timpului de funcționare a unui element, adică va fi $\frac{2}{\lambda}$. Dacă echipamentul este urmărit de la punerea în funcțiune, procesul de reînnoire este simplu, iar funcția și densitatea de reînnoire se obțin din:

$$h^*(s) = \frac{f^*(s)}{1 - f^*(s)} = \frac{\lambda^2}{s \cdot (s + 2 \cdot \lambda)} \quad (2.70)$$

$$H^*(s) = \frac{\lambda^2}{s^2 \cdot (s + 2 \cdot \lambda)} \quad (2.71)$$

Aplicând transformata inversă *Laplace*, se obține :

$$h(t) = \frac{\lambda}{2} \cdot \left(1 - e^{-2 \cdot \lambda \cdot t} \right) \quad (2.72)$$

$$H(t) = \frac{\lambda \cdot t}{2} - \frac{1}{4} \cdot \left(1 - e^{-2 \cdot \lambda \cdot t} \right) \quad (2.73)$$

Se observă că densitatea de reînnoire tinde asimptotic către o valoare constantă, care este inversul mediei timpului de funcționare, iar funcția de reînnoire are ca asimptotă o dreaptă cu panta egală cu inversul mediei timpului de funcționare. Aceasta arată că, după trecerea unui timp suficient

de îndelungat, probabilitatea producerii unei reînnoiri în jurul unui moment dat este constantă iar numărul mediu de reînnoiri într-un interval de timp este proporțional cu lungimea acestuia, aspecte reflectate în figura 2.10.

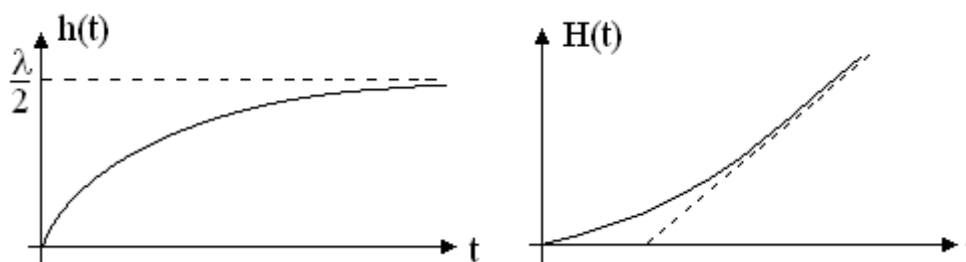


Fig. 2.10. Evoluția densității și a funcției de reînnoire

2.4.2. Strategii de reînnoire

O metodă de creștere a eficienței echipamentelor în exploatare este planificarea unor revizii care să asigure reînnoirea echipamentelor *înainte* de defectarea acestora. Momentele efectuării acestor revizii, numite și reînnoiri profilactice sau preventive, constituie o strategie de reînnoire. Ca și reînnoirile propriu-zise (efectuate în cazul defectărilor accidentale), reînnoirile preventive elimină complet uzura echipamentului, aducându-l în starea inițială.

Dacă reînnoirile analizate până acum erau evenimente aleatoare, generate de defectările echipamentului, reînnoirile preventive pot fi evenimente aleatoare sau deterministe, după modelul în care sunt concepute strategiile de reînnoire. Astfel, peste procesul aleator al reînnoirilor propriu-zise se suprapune strategia aleatoare sau deterministă a reînnoirilor preventive. Strategiile de reînnoire pot fi clasificate în două categorii [3]:

- periodice;
- neperiodice.

Strategiile neperiodice pot fi elaborate ținând seama de vârsta echipamentului, de uzura acestuia sau de alte mărimi ce evoluează aleator. Ele sunt deci strategii ce au un caracter aleator.

Strategiile de reînnoire periodice sunt caracterizate de o durată constantă între două reînnoiri preventive consecutive. Această durată fiind cunoscută, rezultă că aceste strategii au un caracter determinist.

Proiectarea strategiilor de reînnoire se poate face pe baza unor criterii diferite. Indiferent de criteriul adoptat în elaborarea strategiei, este

important să se evalueze pentru fiecare strategie, costul mediu de întreținere a echipamentului în unitatea de timp. În acest scop se consideră costul unei reînnoiri propriu-zise egal cu unitatea și se exprimă costurile reînnoirilor preventive cu fracțiuni din costul reînnoirii propriu-zise.

Trebuie precizat faptul că abordarea strategiilor prin prisma costului mediu nu implică neapărat o viziune pur economică, deoarece costurile individuale reprezintă în general expresii numerice ale dificultății, de orice natură ar fi, întâmpinate în efectuarea unei reînnoiri.

Cea mai simplă strategie de reînnoire periodică constă în reînnoirea echipamentului fie la defectarea sa, fie la momentele de timp egal distanțate $\{kT, k=1, 2, \dots\}$. Această strategie este cunoscută în literatură sub numele de BRP (Block Replacement Policy).

Un prim criteriu de proiectare a acestei strategii, respectiv de calcul al perioadei T , constă în impunerea unui anumit nivel minim al funcției de fiabilitate în intervalul dintre două reînnoiri succesive:

$$R(T) \geq R_0 \quad (2.74)$$

Costul mediu de întreținere a echipamentului într-o perioadă de timp T este format din costul unei reînnoiri preventive b , și costul mediu al reînnoirilor efectuate la defectarea echipamentului, numeric egal cu numărul mediu al acestor reînnoiri.

Dacă se neglijează duratele de reînnoire, numărul mediu al reînnoirilor neprevăzute dintr-o perioadă este dat de funcția de reînnoire $H(T)$, astfel încât costul mediu al întreținerii echipamentului în unitatea de timp prin strategia BRP este dat de relația următoare:

$$C_{BRP} = \frac{1 \cdot H(T) + b}{T} \quad (2.75)$$

Costul dat de relația (2.75) trebuie comparat cu costul mediu de întreținere a echipamentului în unitatea de timp în absența reînnoirilor preventive. Situația în care nu se execută reînnoiri preventive este numită strategie FRP (Failure Replacement Policy). În acest caz o reînnoire se execută în medie la un interval de timp egal cu media timpului de funcționare m , astfel încât costul mediu în unitatea de timp va fi:

$$C_{FRP} = \frac{1}{m} \quad (2.76)$$

Expresia (2.76) se obține din (2.75) pentru o perioadă T tinzând spre infinit.

Exemplu: Se consideră un echipament având funcția de fiabilitate următoare [3]:

$$\begin{aligned} R(t) &= 2 \cdot e^{-\lambda \cdot t} - e^{-2 \cdot \lambda \cdot t} \\ \lambda &= 10^{-4} \text{ ore}^{-1} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Un astfel de echipament este cu redundanță activă, care se defectează atunci când se defectează ambele elemente care îl compun. Strategia de reînnoire periodică trebuie calculată din condiția ca funcția de fiabilitate în intervalul dintre două reînnoiri preventive consecutive să nu scadă sub nivelul impus, $R_0 = 0,99$. Din relațiile (2.74) și (2.77) se obține:

$$e^{-2 \cdot \lambda \cdot T} - 2 \cdot e^{-\lambda \cdot T} + 0,99 \leq 0 \Rightarrow T \leq \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{0,9} = 1053,6 \text{ ore} \quad (2.78)$$

Pentru a calcula costul mediu al întreținerii echipamentului în unitatea de timp se evaluează funcția de reînnoire a echipamentului pornind de la expresia funcției de fiabilitate (2.77). Se obține succesiv:

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= -\frac{dR(t)}{dt} = 2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} - 2 \cdot \lambda \cdot e^{-2 \cdot \lambda \cdot t} \\ f^*(s) &= \frac{2 \cdot \lambda}{s + \lambda} - \frac{2 \cdot \lambda}{s + 2 \cdot \lambda} = \frac{2 \cdot \lambda^2}{(s + \lambda) \cdot (s + 2 \cdot \lambda)} \\ h^*(s) &= \frac{f^*(s)}{1 - f^*(s)} = \frac{2 \cdot \lambda^2}{s \cdot (s + 3 \cdot \lambda)} \\ h(t) &= \frac{2 \cdot \lambda}{3} \left(1 + e^{-3 \cdot \lambda \cdot t} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(t) = \int_0^t h(t) dt = \frac{2 \cdot \lambda \cdot t}{3} + \frac{2}{9} \cdot e^{-3 \cdot \lambda \cdot t} - \frac{2}{9} \quad (2.79)$$

Dacă se adoptă un cost b al reînnoirii preventive periodice egal cu 20% din costul unei reînnoiri propriu-zise ($b=0.2$), folosind relația (2.75) se obține costul mediu în unitatea de timp al strategiei BRP, cu perioada T dată de condiția (2.78):

$$C_{BRP} = \frac{\frac{2 \cdot \lambda \cdot T}{3} + \frac{2}{9} \cdot e^{-3 \cdot \lambda \cdot T} - \frac{2}{9} + 0,2}{T} = 3,08 \cdot 10^{-4} \text{ ore}^{-1} \quad (2.80)$$

În absența reînnoirilor preventive, costul mediu de întreținere a echipamentului în unitatea de timp poate fi calculat utilizând relația (2.76):

$$m = \int_0^{\infty} R(t) dt = \frac{3}{2 \cdot \lambda} \quad (2.81)$$

$$C_{FRP} = \frac{2 \cdot \lambda}{3} = 0,66 \cdot 10^{-4} \text{ ore}^{-1}$$

Analizând rezultatele obținute în relațiile (2.80) și (2.81) rezultă că întreținerea echipamentului prin strategia BRP este mai costisitoare dar are avantajul asigurării unei fiabilități mai ridicate. Dacă analiza se limitează la un punct de vedere pur economic, atunci este clar că în perioada staționară a procesului de reînnoire, adoptarea unei strategii de reînnoire de tip BRP nu poate prezenta avantaje. În cazul unui proces de reînnoire staționarizat avem $H(T) = \frac{T}{m}$, astfel încât:

$$C_{BRP} = \frac{1 \cdot H(T) + b}{T} = \frac{1}{m} + \frac{b}{T} > \frac{1}{m} = C_{FRP} \quad (2.82)$$

Din ultima relație rezultă că strategia de reînnoire periodică poate prezenta avantaje economice numai în perioada tranzitorie a procesului de reînnoire, respectiv în perioada incipientă a întreținerii echipamentului în exploatare.

În proiectarea strategiilor de reînnoire se urmărește minimizarea costului mediu de întreținere a echipamentului în unitatea de timp, astfel încât punând condiția de minim expresiei (2.75) se obține:

$$T^* \cdot h(T^*) - H(T^*) = b \quad (2.83)$$

O condiție suficientă de existență a soluției T^* pentru ecuația (2.83) este caracterul crescător al densității de reînnoire $h(t)$, sau, cu alte cuvinte caracterul pozitiv al uzurii echipamentului. Înlocuind valoarea T^* , în relația (2.74), se obține costul mediu minim al întreținerii echipamentului în unitatea de timp atunci când se aplică strategia BRP.

$$C_{BRP}^* = h(T^*) \quad (2.84)$$

unde C_{BRP}^* este o funcție crescătoare de b , prin intermediul lui T^* .

Pentru echipamentul cu funcția de fiabilitate dată de relația (2.77) perioada optimă se obține introducând expresia lui $H(T)$ dată de relația (2.79) în ecuația (2.83):

$$\left(1 - \frac{9}{2} \cdot b\right) \cdot e^{y^*} = y^* + 1; \quad y^* = 3 \cdot \lambda \cdot T^* \quad (2.85)$$

Ultima ecuație fiind transcendentă, se rezolvă grafic. Condiția de existență a perioadei optime de reînnoire este $b < \frac{2}{9}$. Cum s-a presupus $b=0.2$ această condiție este îndeplinită. Valoarea minimă a costului strategiei BRP se obține introducând soluția ecuației (2.85) în expresia (2.84) și ținând seama de relațiile (2.79):

$$C_{BRP}^* = \frac{2 \cdot \lambda}{3} \cdot \left(1 - e^{-3 \cdot \lambda \cdot T^*}\right) \quad (2.86)$$

Așa cum se observă din exemplul anterior, elaborarea strategiei periodice optime din punct de vedere al costului mediu în unitatea de timp nu este dificilă, dacă este posibil calculul funcției și densității de reînnoire. Acest calcul este uneori dificil datorită imposibilității obținerii analitice a transformatei *Laplace* pentru anumite legi de repartiție a tipului de funcționare (ex. legea Weibull).

Strategia periodică descrisă (BRP) are inconvenientul planificării inflexibile, astfel încât este posibil ca, la scurt timp după efectuarea unei reînnoiri propriu-zise a echipamentului, să urmeze o reînnoire preventivă planificată. Pentru evitarea unor asemenea situații, s-a recurs la modificarea strategiei periodice. Reînnoirile preventive se execută la momentele de timp $\{k \cdot T, k=1, 2, \dots\}$. După orice defectare apărută în intervalele $\{(k \cdot T - T_D, k \cdot T), k=1, 2, \dots\}$, echipamentul nu este reînnoit, așteptându-se momentul proximei reînnoiri preventive. Defectările apărute în intervalele $\{[(k-1) \cdot T, k \cdot T - T_D], k=1, 2, \dots\}$ se remediază în mod obișnuit, rezultând reînnoiri propriu-zise. Strategia de reînnoire se numește DRP (Delayed Replacement Policy).

Pentru evaluarea costului mediu al întreținerii echipamentului în unitatea de timp este necesar să se considere alături de costul b al reînnoirilor preventive și costul d al stagnării echipamentului (sau al funcționării sale incorecte) în unitatea de timp. Costul mediu într-o perioadă T este format din:

- a) costul reînnoirii preventive b ;
 b) costul reînnoirii propriu-zise (al reparărilor în caz de defectare).

$$1 \cdot H(T - T_D)$$

- c) costul duratei medii de stagnare:

$$d \cdot \int_0^{T_D} x \cdot h \cdot (T - x) dx$$

Se obține costul mediu în unitatea de timp:

$$C_{DRP}(T, T_D) = \frac{1}{T} \cdot \left[b + H \cdot (T - T_D) + d \cdot \int_0^{T_D} x \cdot h \cdot (T - x) dx \right] \quad (2.87)$$

Prin minimizarea expresiei (2.87) după T_D , se obține valoarea optimă:

$$T_D^* = \frac{1}{d} \quad (2.88)$$

Înlocuind expresia (2.88) în (2.87), pentru $T_D^* \ll T$ se obține:

$$C_{DRP}(T, T_D^*) = C_{BRP}(T) - \frac{h(T)}{2 \cdot d} \quad (2.89)$$

Considerând acum perioada optimă a reînnoirilor preventive, dată de relația (2.83) $T^* \cdot h(T^*) - H(T^*) = b$, se poate obține costul minim al strategiei DRP utilizând relația (2.89):

$$\begin{aligned} C_{DRP}^* &= C_{DRP}(T^*, T_D^*) = C_{BRP}(T^*) - \frac{h(T^*)}{2 \cdot d \cdot T^*} = \\ &= h(T^*) \cdot \left[1 - \frac{1}{2 \cdot d \cdot T^*} \right] = h(T^*) \cdot \left(1 - \frac{T_D^*}{2 \cdot T^*} \right) \end{aligned} \quad (2.90)$$

Trecând la analiza strategiilor neperiodice de reînnoire vom considera cea mai simplă strategie, la care reînnoirea preventivă este determinată de atingerea de către echipament a unei anumite vârste, x . Această strategie este cunoscută în literatură sub denumirea ARP (Age Replacement Policy).

Datorită caracterului neperiodic al reînnoirilor preventive, realizarea efectivă a strategiei este mai dificilă, fapt care se exprimă printr-un cost asociat unei reînnoiri preventive de tip ARP mai mare decât cel corespunzător reînnoirii preventive periodice ($a > b$).

În vederea determinării vârstei echipamentului la care trebuie efectuată reînnoirea preventivă se pot utiliza diverse criterii:

- asigurarea unui anumit nivel de fiabilitate;
- condiția de extrem pentru o mărime dependentă de x ;
- minimizarea costului mediu al întreținerii echipamentului în unitatea de timp.

În continuare se va utiliza criteriul de minimizare a costului mediu de întreținere. Pentru stabilirea acestui cost se neglijează duratele în care se efectuează reînnoirea echipamentului. Costul întreținerii echipamentului în toată durata vieții sale va fi egal cu unitatea dacă echipamentul se defectează în intervalul $(0, x)$ și cu costul a al reînnoirii preventive dacă echipamentul nu se defectează în acest interval. Rezultă costul mediu al întreținerii echipamentului $F(x) + a \cdot R(x)$. Împărțind expresia costului mediu la durata medie de viață a echipamentului rezultă costul mediu în unitatea de timp dat de relația următoare:

$$C_{ARP}(x) = \frac{F(x) + a \cdot R(x)}{\int_0^x R(t) dt} \quad (2.91)$$

Minimizând relația (2.91), rezultă ecuația vârstei optime la care trebuie să se execute reînnoirea preventivă a echipamentului:

$$\frac{\partial C_{ARP}(x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow z\left(x^*\right) \cdot \int_0^{x^*} R(t) dt + R\left(x^*\right) = \frac{1}{1-a} \quad (2.92)$$

Condiția suficientă de existență a valorii optime x^* este ca rata de defectare să fie crescătoare (echipamentul să fie caracterizat de uzură pozitivă). Valoarea medie minimă a costului se obține înlocuind soluția x^* a ecuației (2.92) în relația (2.91):

$$C_{ARP}^* = C_{ARP}\left(x^*\right) = (1-a) \cdot z\left(x^*\right) \quad (2.93)$$

Costul mediu minim dat de relația (2.93) este o funcție crescătoare de costul a al unei reînnoiri preventive.

Exemplu: Se consideră același echipament descris de ecuația (2.77):

$$R(t) = 2 \cdot e^{-\lambda \cdot t} - e^{-2 \cdot \lambda \cdot t}$$

Înlocuind indicatorii de fiabilitate ai acestui echipament în expresia (2.92) se obține:

$$(1-a) \cdot R^{*2} - (2-3 \cdot a) \cdot R^* + 1 - 3 \cdot a = 0 \quad (2.94)$$

$$R^* = e^{-\lambda \cdot x^*}$$

Ecuția (2.94) are soluții reale pentru orice $a \in [0, 1]$. Soluțiile sunt pozitive pentru $a < \frac{1}{3}$ și în acest caz cea mai mică este subunitară, deci acceptabilă.

Ca urmare, vârsta optimă a reînnoirii preventive se obține din relațiile:

$$R^* = \frac{2-3 \cdot a - \sqrt{a \cdot (4-3 \cdot a)}}{2 \cdot (1-a)} \quad (2.95)$$

$$x^* = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{R^*} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{2 \cdot (1-a)}{2-3 \cdot a - \sqrt{a \cdot (4-3 \cdot a)}}$$

Condiția de existență a strategiei optime ARP este deci $a < \frac{1}{3}$. Dacă această condiție este îndeplinită, costul mediu minim rezultă conform relației (2.93):

$$C_{ARP}^* = (1-a) \cdot 7 \cdot (x^*) = 2 \cdot \lambda \cdot (1-a) \cdot \frac{a + \sqrt{a \cdot (4-3 \cdot a)}}{2-a + \sqrt{a \cdot (4-3 \cdot a)}} \quad (2.96)$$

Pentru $a=25\%$ și $\lambda = 10^{-4} \text{ ore}^{-1}$ se obțin valorile numerice:

$$x^* = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{6}{5 - \sqrt{13}} = 14552 \text{ ore} \quad (2.97)$$

$$C_{ARP}^* = 2 \cdot \lambda \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{13} + 1}{4\sqrt{13} + 7} = 0,65 \cdot 10^{-4} \text{ ore}^{-1}$$

Dacă nu s-ar efectua reînnoiri preventive, costul mediu de întreținere în unitatea de timp ar fi $0,66 \cdot 10^{-4} \text{ ore}^{-1}$. Strategia optimă ARP este deci avantajoasă față de absenta oricărei strategii de reînnoire.

Alegerea între diferite strategii de reînnoire trebuie făcută prin prisma unui criteriu unitar și având în vedere variantele optime ale diverselor strategii. Astfel, se consideră strategiile ARP, BRP și FRP, [3]. Criteriul de comparație între aceste strategii este costul mediu minim al întreținerii echipamentului în unitatea de timp. Pentru a arăta procedeul de decizie trebuie reamintit faptul că expresiile costurilor C_{ARP} și C_{BRP} sunt funcții crescătoare de costul individual al reînnoirilor preventive. Există deci două

valori unice a_0, b_0 de la care începând, sunt adevărate inegalitățile următoare:

$$\begin{aligned} C_{ARP}^*(a) &> C_{FRP} & a > a_0 \\ C_{BRP}^*(b) &> C_{FRP} & b > b_0 \end{aligned} \quad (2.98)$$

Din aceste inegalități rezultă că pentru $a > a_0$ și $b > b_0$ trebuie adoptată strategia FRP, pentru $a > a_0$ și $b < b_0$ trebuie adoptată strategia BRP, iar pentru $a < a_0$ și $b > b_0$ trebuie adoptată strategia ARP. Rămâne cazul $a < a_0$ și $b < b_0$ când trebuie făcută o alegere între strategiile ARP și BRP. Întrucât funcțiile costurilor C_{ARP} și C_{BRP} sunt crescătoare, există o valoare unică $b^*(a)$ pentru care $C_{BRP}^*(b^*) = C_{ARP}^*(a)$. Cunoscând funcția $b^*(a)$ se poate decide ușor asupra strategiei de adoptat, ținând seama de monotonia funcției $C_{BRP}^*(b)$. Dacă $b > b^*$ se adoptă strategia ARP și dacă $b < b^*$ se adoptă strategia BRP. Algoritmul de alegere a strategiei optime este prezentat în figura 2.11:

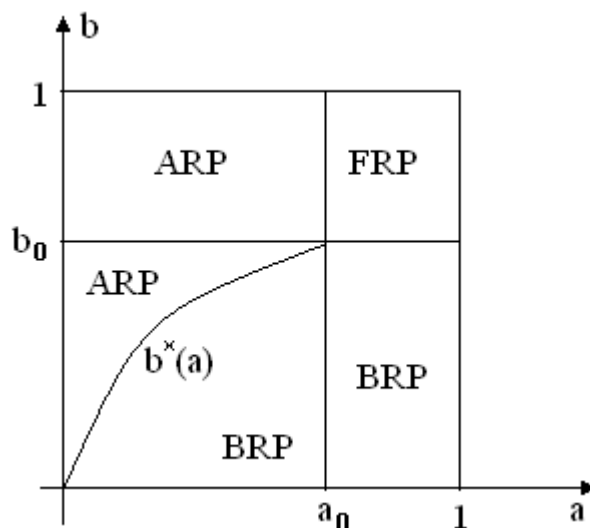


Fig. 2.11. Alegerea strategiei optime de reînnoire

În literatura de specialitate mai sunt prezentate și alte strategii utilizate în reînnoirea echipamentelor. În cadrul capitolului 6 se va prezenta o strategie evolutivă de reînnoire care face parte din categoria strategiilor de tip CRP (Continuous Replacement Policy). Implementarea strategiei tip CRP necesită o supraveghere continuă a echipamentului prin intermediul mărimilor măsurate, iar determinarea momentului proximei reînnoiri preventive se face în funcție de evoluția parametrilor echipamentului, determinați prin tehnici de diagnostică.