

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

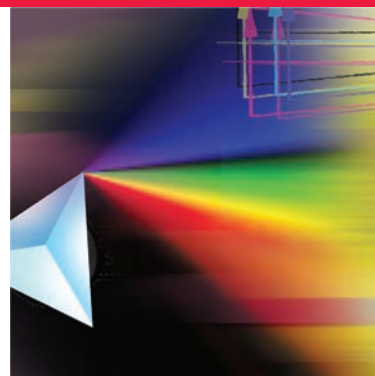
Fizică

F1 + F2

Manual pentru clasa a XI-a

Octavian Rusu
Livia Dinică

Constantin Trăistaru
Constantin Gavrilă



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Fizică

F1 + F2

Manual pentru clasa a XI-a

Octavian Rusu

Livia Dinică

Constantin Trăistaru

Constantin Gavrilă

Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului Educației și Cercetării nr. 4446 din 19.06.2006, în urma evaluării calitative organizate de către Consiliul Național pentru Evaluarea și Difuzarea Manualelor și este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordin al ministrului Educației și Cercetării nr. 3252 din 13.02.2006.

Date despre autori:

OCTAVIAN RUSU, profesor gradul I la Colegiul Național „Sfântul Sava” din București, autor și coautor de manuale școlare pentru clasele IX-XII și de auxiliare pentru liceu și pentru examenul de bacalaureat, coautor de soft educațional.

LIVIA DINICĂ, profesor gradul I la Colegiul Tehnic de Telecomunicații „Gheorghe Airinei” din București, autor de manuale școlare pentru liceu, autor și coautor de auxiliare școlare pentru clasele IX-XII și pentru examenul de bacalaureat.

CONSTANTIN TRĂISTARU, profesor gradul I la Colegiul Național „Sfântul Sava” din București, autor și coautor de auxiliare școlare pentru liceu și pentru examenul de bacalaureat.

CONSTANTIN GAVRILĂ, profesor gradul I la Colegiul Național „Sfântul Sava” din București, coautor de manuale școlare pentru liceu.

Referenți:

Prof. dr. **Florin Munteanu**, Universitatea „Politehnica”, Centrul pentru studii complexe, București

Conf. univ. dr. **Adrian Dafinei**, Facultatea de Fizică, Universitatea din București

Redactor: **Alice Raluca Petrescu**

Tehnoredactare computerizată: **Mihai Alexandru**

Coperta: **Valeria Moldovan**

Pentru comenzi și informații, adresați-vă la:

Editura CORINT EDUCAȚIONAL – Departamentul de Vânzări

Calea Plevnei nr. 145, sector 6, București, cod poștal 060012

Tel.: 021.319.88.22, 021.319.88.33, 0748.808.083, 0758.225.443

Fax: 021.319.88.66, 021.310.15.30

E-mail: vanzari@edituracorint.ro

www.grupulcorint.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

Fizică: F1+ F2: manual pentru clasa a XI-a / Octavian Rusu,
Livia Dinică, Constantin Trăistaru, Constantin Gavrilă. –
București: Corint Educațional, 2014

Bibliogr.

ISBN 978-606-8609-73-7

I. Rusu, Octavian

II. Dinică, Livia

III. Trăistaru, Constantin

IV. Gavrilă, Constantin

53(075.35)

ISBN 978-606-8609-73-7

Toate drepturile asupra acestei lucrări sunt rezervate Editurii CORINT EDUCAȚIONAL,
parte componentă a GRUPULUI EDITORIAL CORINT.

CUPRINS

<i>Prefață</i>	5
Capitolul 1. Oscilații și unde mecanice	7
1.1. Oscilatorul mecanic	8
1.1.1. Fenomene periodice. Procese oscilatorii în natură și în tehnică	8
1.1.2. Mărimi caracteristice mișcării oscilatorii	9
1.1.3. Oscilații mecanice amortizate	12
1.1.4. *Modelul „oscilator armonic”	14
1.1.5. Compunerea oscilațiilor paralele. * <i>Compunerea oscilațiilor perpendiculare</i>	20
Teste pentru autoevaluare	23
1.2. Oscilatori mecanici cuplați	27
1.2.1. Oscilații mecanice întreținute. Oscilații mecanice forțate	27
1.2.2. *Rezonanța	28
1.2.3. Consecințe și aplicații	30
Teste pentru autoevaluare	33
1.3. Unde mecanice	35
1.3.1. Propagarea unei perturbări într-un mediu elastic. Transferul de energie	35
1.3.2. *Modelul „undă plană”. Periodicitatea spațială și temporală	38
Teste pentru autoevaluare	42
1.3.3. Reflexia și refracția undelor mecanice	43
1.3.4. Unde seismice	46
1.3.5. Interferența undelor mecanice. Unde staționare	50
1.3.6. Acustica	57
1.3.7. * <i>Difracția undelor mecanice — studiu calitativ</i>	60
1.3.8. Ultrasunete și infrasunete. Aplicații în medicină, industrie, tehnică militară	61
Teste pentru autoevaluare	65
Capitolul 2. Oscilații și unde electromagnetice	69
2.0. * <i>Curentul alternativ</i> (recapitularea unor noțiuni de bază)	70
2.1. Circuitul RLC în curent alternativ	72
Test pentru autoevaluare	84
Teste pentru autoevaluare	89

2.2. Oscilații electromagnetice libere. Circuitul oscilant	91
2.3. Câmpul electromagnetic. Unda electromagnetică.....	98
2.4. Clasificarea undelor electromagnetice	102
2.5. Aplicații	105
Test pentru autoevaluare.....	108
 Capitolul 3. Optica ondulatorie	109
3.1. Dispersia luminii. <i>*Interpretare electromagnetică</i>	110
3.2. Interferența	113
3.2.1. <i>*Dispozitivul Young</i>	115
3.2.2. Interferența localizată. Aplicații	118
3.3. <i>*Difracția luminii. Aplicații</i>	121
3.4. <i>*Polarizarea luminii. Aplicații</i>	127
Test pentru autoevaluare.....	132
 Capitolul 4. <i>*Elemente de teoria haosului</i>	133
4.1. <i>*Determinism și predictibilitate. Condiții. Modele</i>	134
4.2. <i>*Determinism și impredictibilitate. Comportamentul haotic. Condiții</i>	137
4.3. <i>*Descrierea comportamentului haotic. Spațiul fazelor.</i> <i>Atractorii clasici și stranii</i>	140
Test pentru autoevaluare.....	145
4.4. <i>*Elemente de geometrie fractală</i>	146
Teste pentru autoevaluare.....	150
 Bibliografie selectivă	152

PREFAȚĂ

Autorii au urmărit să realizeze un manual de fizică optim structurat pentru elevii din clasa a XI-a, cu un nivel scăzut de dificultate, care respectă integral și uniform conținuturile și competențele specifice din noua programă de fizică.

Din rapoartele de evaluare ale referenților științifici, reiese faptul că manualul respectă rigurozitatea științifică, rămânând, totuși, accesibil tuturor elevilor, susținându-le interesul pentru noutățile din fizică și pentru investigare. Manualul oferă posibilitatea realizării competențelor specifice prevăzute de programa școlară în planul prezentării, al interpretării și în cel aplicativ; posibilități de organizare a activității de învățare-evaluare individual și în grup; modele de raționament inductiv/deductiv/analogic. În prezentarea noțiunilor, există un echilibru între accesibilitate, analiză corectă și limbaj științific adecvat, manualul prezentând exemple concludente. Informarea elevilor privind descoperirile din fizică sau aplicațiile lor tehnico-științifice se realizează printr-o gamă largă de instrumente de interacțiune cu elevii, cum ar fi: observații, lecturi pentru curioși, experimente, aplicații, tabele, scheme, probleme rezolvate, probleme propuse cu răspunsuri multiple, teste de recunoaștere a afirmațiilor adevărate/false sau a mărimilor și unităților, teste de autoevaluare. Reflectând deplin o bogată experiență didactică, de autori de carte școlară, manualul este elaborat într-o manieră modernă, cu metode eficiente și atractive în vederea unei învățări active. Conținuturile capitolelor sunt prezentate accesibil, cu o creștere progresivă a gradului de dificultate, într-o foarte bună corelare cu sarcinile de învățare, care oferă elevului experiențe aplicabile în situații de viață cotidiană. Conceptele noi prezentate nu suprasolicită elevul în activitatea de învățare. Acest manual permite profesorilor particularizarea sarcinilor de învățare asociate fiecărui conținut, spre a asigura elevilor progresul școlar. Limbajul în care sunt explicate noțiunile specifice fizicii este corect științific și nu generează confuzii.

Relațiile intra- și interdisciplinare, relevante pentru finalitățile prevăzute în programa școlară, sunt puse în evidență prin numeroase exemple și experimente. Concepția didactică a manualului este modernă, cu metode atractive și eficiente (scheme și modelări grafice pe calculator, analogii, demonstrații teoretice sau experimentale simple, dar intuitive) și reveniri asupra noțiunilor dificile. Experiența și colaborarea autorilor cu profesorii universitari de la Facultatea de Fizică din Universitatea București și de la Universitatea „Politehnica” din București se coroborează în respectarea conținutului științific și a terminologiei corecte.

Experimentele obligatorii stimulează activitatea în echipă, iar celelalte sunt opționale, în condițiile unei dotări necorespunzătoare a laboratorului școlar. Analiza unor experimente simulate pe calculator susține procesul de învățare eficientă, pentru că programa este orientată către stimularea curiozității elevilor față de fenomenele din lumea înconjurătoare și a spiritului inventiv al adolescenților, dar nu îngrădește libertatea profesorului de a alege alternativa clasică. Sunt notate cu asterisc (*) conținuturile suplimentare (curriculumul diferențiat pe profiluri) și conținuturile facultative (a căror parcurgere este decisă de profesor în funcție de nivelul și de nevoile elevilor, în cadrul orelor alocate în curriculumul la decizia școlii).

Deoarece manualul se adresează atât elevilor de la profilul F1, cât și celor de la profilul F2, s-au marcat cu linie verticală roșie, plasată lateral, toate secvențele care trebuie studiate numai de elevii de la profilul F2, urmând ca cei de la F1 să studieze tot manualul.

Lecturile *opționale (pentru curioși) se referă la istoria fizicii, la aplicații sau la noutățile științifice.

Textul este redactat într-un stil atrăgător, titlurile și subtitlurile redând sintetic conținuturile cu care sunt asociate. Definițiile, noțiunile noi și simbolurile mărimilor fizice sunt scrise cu alte caractere, pentru a rămâne în memoria vizuală. Abordarea fenomenelor fizice prin exemple sugestive, destul de cunoscute de elevi, dezvoltă gândirea critică și creativitatea lor tehnică. Schemele, rezumatele și tabelele din manual evidențiază aspecte semnificative pentru achizițiile de învățare ale elevilor. Exemplele concludente și tipurile de probleme rezolvate sunt bine alese și suficiente cantitativ.

Recapitularea unor noțiuni de circuite în curent alternativ, studiate în clasa a X-a, introdusă în capitolul al doilea, este absolut necesară.

Definițiile, demonstrațiile și explicațiile sunt clare. Modelările grafice și fotografiile, poziționate în imediata apropiere a informațiilor la care se referă, fac trimiteri la fenomenele analizate sau amintite în text, sprijină înțelegerea conținuturilor, sunt suficiente ca număr și bine echilibrate în raport cu textul.

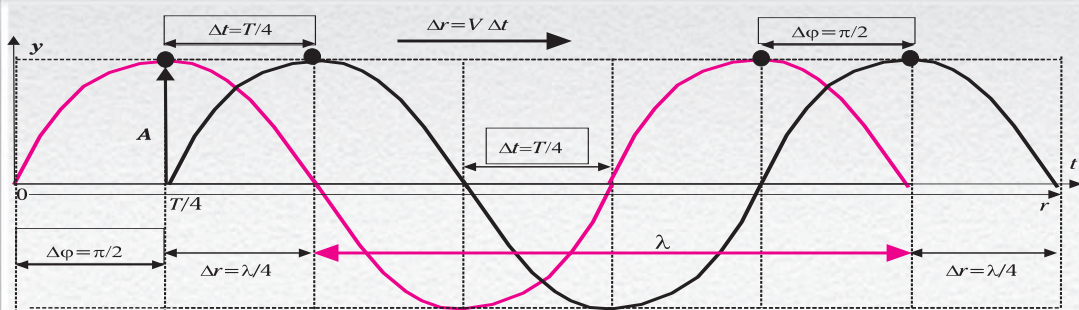
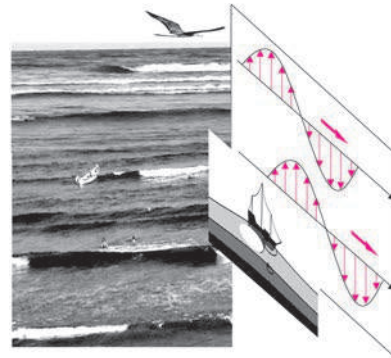
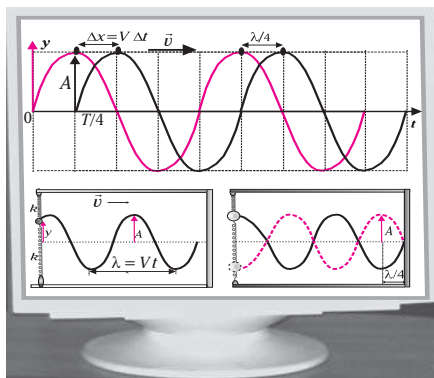
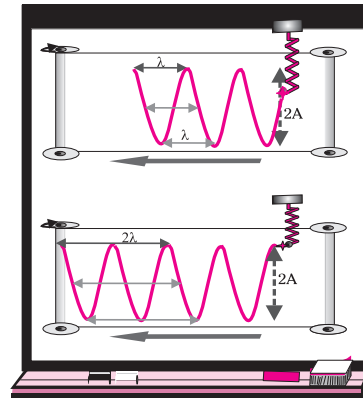
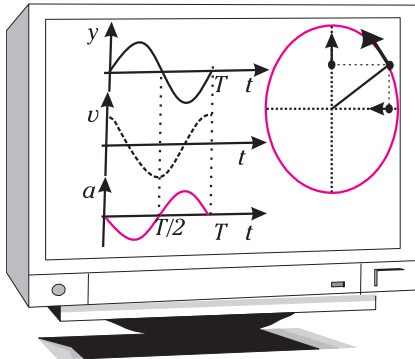
La fiecare temă există un număr satisfăcător de întrebări, teste de autoevaluare diferite, de fixare sau de recapitulare, cu dificultate gradată, care stimulează activitatea individuală. Problemele propuse, cu un grad mediu de dificultate, înregistrează o creștere progresivă a gradului de dificultate, iar ordinea lor poate fi schimbată la sugestia profesorului. La finalul fiecărui capitol există teste (modele pentru bacalaureat și pentru concursul de admitere în învățământul superior) care necesită cunoașterea unor relații și legi fizice importante, prevăzute prin standardele naționale de evaluare.

Vă dorim succes cu acest manual!

Autorii

OSCILAȚII ȘI UNDE MECANICE

CAPITOLUL 1



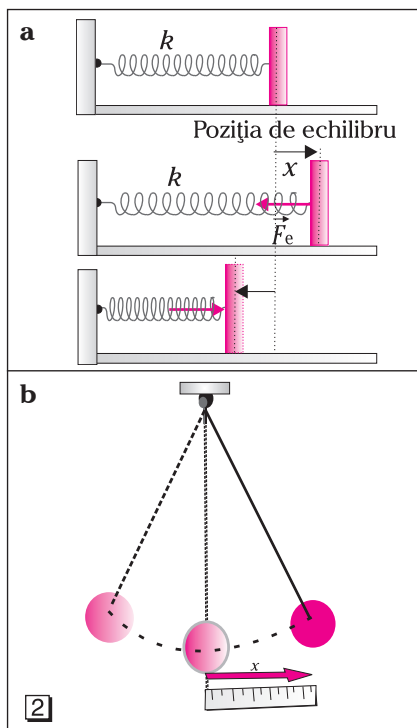
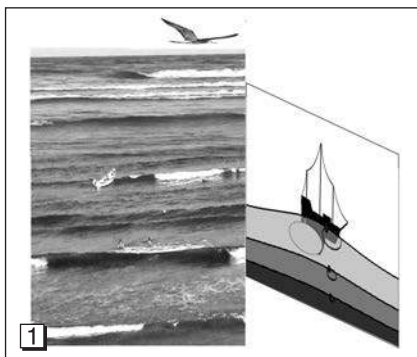
„Sunt convins că, dacă vreun om de știință din orice domeniu și-a adjudecat binemeritata recunoaștere a colectivității umane, acest lucru l-a realizat în mare măsură aplicând direct binefacerile fizicii ca legități, ca metodologie, ca instrumentar de lucru.”

Alfred Kastler — premiul Nobel, 1966



1.1. OSCILATORUL MECANIC

1.1.1. Fenomene periodice. Procese oscilatorii în natură și în tehnică



① *Analiza calitativă de tip cauză-efect a unor oscilații mecanice*

Sistemele scoase din poziția de echilibru de forțe exterioare execută mișcări oscilatorii față de poziția de echilibru, atunci când sunt lăsate libere, sub acțiunea:

- a) forței elastice din resort;
- b) componentei tangențiale a greutateii.

Oscilația este fenomenul fizic în decursul căruia o mărime fizică variază periodic.

Aproape la tot pasul, întâlnim fenomene care se repetă ciclic: vibrațiile unei lame sau corzi de instrument muzical, mișcarea unui balansoar sau a unui pendul, oscilațiile plantelor sau crengilor pomilor, vibrațiile geamurilor sau ale boxelor audio, mișcările pistoanelor motoarelor sau ale coloanelor de apă, mișcarea corpurilor care plutesc în apa cu valuri (vezi [1]). Oscilațiile atomilor din corpurile cu structură cristalină sau deplasările electronilor din circuitele de curent alternativ evoluează periodic între două stări extreme în care se schimbă sensul mișcării.

Sistemul care efectuează o mișcare oscilatorie este numit **oscilator**. Mișcarea oscilatorului (sistemului oscilant) se reia din poziția inițială după o perioadă. Sistemele scoase din poziția de echilibru de forțe exterioare tind să revină, atunci când sunt lăsate libere, în poziția de echilibru, după ce execută mișcări oscilatorii numite **oscilații**. Distanța oscilatorului (notată cu x sau y) față de poziția de echilibru, la un moment dat, este numită **elongație** (vezi [2]). La oscilatoarele elastice, cum ar fi lama elastică sau resortul elastic, forța de revenire este de natură elastică.

Din punct de vedere energetic, în mișcarea oscilatorie se transformă periodic o formă de energie în altă formă de energie, în mod reversibil (în cazul ideal, când energia totală se conservă) sau numai parțial reversibil (în cazul real, când intervin pierderi energetice). În cazul oscilațiilor mecanice ale unui corp față de o poziție de echilibru, energia cinetică se transformă periodic în energie potențială și invers. Analog se pot explica și alte procese oscilatorii din natură și din tehnică.

Amplitudinea A este depărtarea maximă față de poziția de echilibru. Micșorarea amplitudinii în timp, numită **amortizare**, se produce datorită pierderilor de energie prin frecare. Dacă oscilatorul este forțat să oscileze sub acțiunea unor forțe exterioare periodice, amplitudinea poate fi modificată sau menținută constantă. Pentru modelul de oscilator nedisipativ, mișcarea oscilatorie este neamortizată.

1.1.2. Mărimi caracteristice mișcării oscilatorii

• **Perioada T** a unei oscilații reprezintă intervalul de timp după care oscilatorul trece din nou printr-un punct, mișcându-se în același sens; $[T]_{\text{S.I.}} = \text{s}$.

Dacă notăm cu $f(t)$ mărimea fizică a unei oscilații și cu T perioada oscilației, atunci $f(t+T) = f(t)$, adică mărimea fizică are aceeași valoare la momentele t și $t+T$ (vezi [3]).

• **Frecvența ν** este raportul dintre numărul n de oscilații efectuate și timpul t în care se efectuează: $\nu = \frac{n}{t} = \frac{1}{T}$;
 $[\nu]_{\text{S.I.}} = \text{s}^{-1} = \text{Hz (Hertz)}$.

• **Elongația y** măsoară distanța momentană a centrului de masă al oscilatorului față de poziția de echilibru static. Valoarea maximă y_{max} a elongației într-o oscilație reprezintă amplitudinea A a oscilațiilor; $[y]_{\text{S.I.}} = [A]_{\text{S.I.}} = \text{m}$.

Să proiectăm mișcarea circulară uniformă a unei bile pe un plan perpendicular pe planul cercului de rază R (vezi [4]). Să considerăm că mobilul (bila) pleacă dintr-un punct M_0 , care este defazat cu un unghi φ_0 față de axa aleasă (vezi [5]). Proiecția vectorului de poziție, de modul $A = R$, când mobilul este în pozițiile M , caracterizate de unghiul fazei, $\varphi = \omega t + \varphi_0$, descrie pe axa Oy mișcarea oscilatorie de ecuație $y = R \sin \varphi$, adică:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

unde $y_{\text{max}} = A$, $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ reprezintă pulsația, T — perioada, iar $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ — frecvența mișcării.

• **Viteza de oscilație** este definită prin relația: $v = \frac{\Delta y}{\Delta t}$, unde $\Delta t \rightarrow 0$. Viteza de oscilație se poate obține prin proiecția vectorului viteză \vec{v}_M pe axa Oy . Obținem: $v = v_M \cos \varphi$;

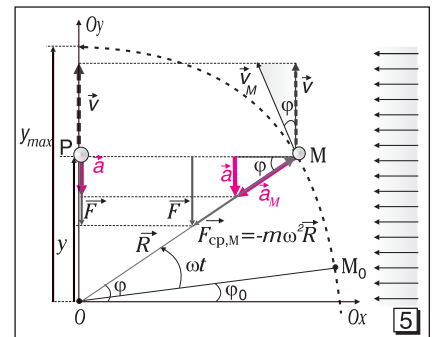
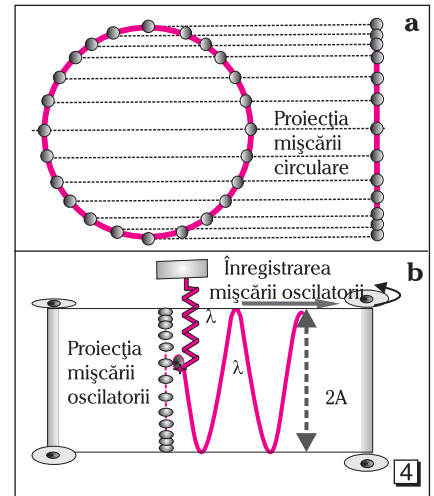
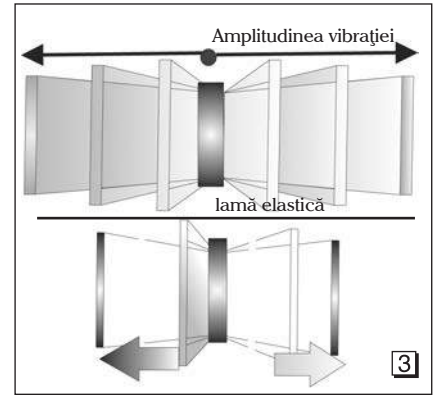
$$v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

unde $v_{\text{max}} = \omega R = \omega A$.

• **Accelerația de oscilație** este definită prin relația: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, unde $\Delta t \rightarrow 0$. Accelerația de oscilație se obține prin proiecția vectorului accelerație centripetă \vec{a}_M pe axa Oy : $-a = a_M \sin \varphi$;

$$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

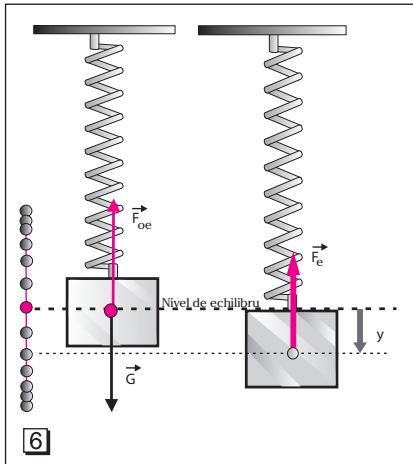
unde $a_{\text{max}} = \omega^2 R = \omega^2 A$.



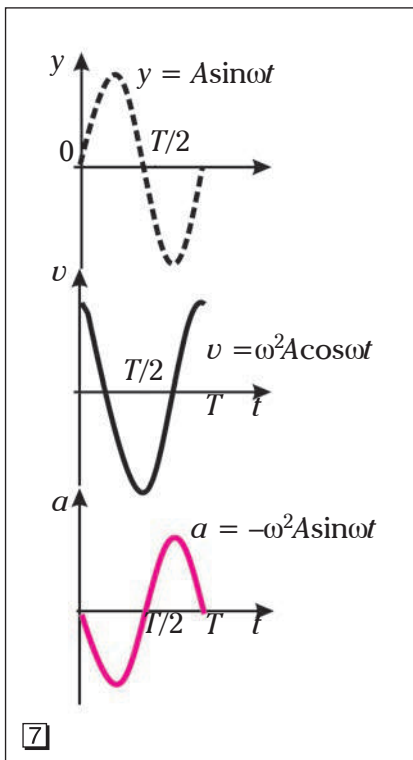
Faza mișcării oscilatorii este argumentul funcției trigonometrice:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0.$$

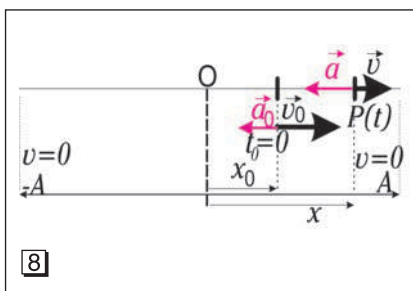
Dacă la momentul inițial, $t_0 = 0$, oscilatorul nu a fost în poziția de echilibru, atunci faza inițială este φ_0 (diferită de 0 sau π), $y_0 = A \sin(\varphi_0) \neq 0$.



[6]



[7]



[8]

Oscilațiile armonice sunt oscilații care se desfășoară sub acțiunea unei forțe rezultante de tip elastic

$$F = -ky,$$

unde y — elongația, k — constanta de elasticitate. Accelerația de oscilație este proporțională cu elongația, dar de sens contrar în orice mișcare oscilatorie liniar armonică. Mărimile caracteristice se pot exprima prin funcții trigonometrice (sinus, cosinus).

Pendulul elastic este un model idealizat pentru sistemele oscilante. Este format dintr-un resort elastic cu masa neglijabilă, de care este legat un corp cu masa m . Forța elastică $F = -ky$ este proporțională cu elongația, dacă nu se ajunge la limita de elasticitate a resortului (vezi [6]). Forțele de frecare sunt neglijabile când corpul are dimensiuni mici și pendulul oscilează în aer. Un sistem fizic izolat, care este pus în oscilație printr-un impuls, efectuează *oscilații libere*, cu o frecvență proprie.

Tipuri de oscilații:

- ♦ oscilații mecanice (energia cinetică se transformă în energie potențială și invers);
- ♦ oscilații electromagnetice (energia electrică se transformă în energie magnetică și invers);
- ♦ oscilații electromecanice (energia mecanică se transformă în energie electromagnetică și invers).

Oscilațiile se numesc:

- ♦ **nedisipative, ideale** sau **neamortizate** dacă energia totală se conservă;
- ♦ **disipative** sau **amortizate** dacă energia se consumă în timp;
- ♦ **forțate** sau **întreținute** dacă se furnizează energie din afara sistemului, pentru compensarea energiei consumate.

Problemă rezolvată

Oscilațiile unui pendul elastic au mărimile caracteristice din reprezentarea grafică [7]. În ce poziție, accelerația corpului care oscilează la un capăt al resortului elastic este minimă?

Rezolvare:

Deoarece accelerația de oscilație este proporțională cu elongația, dar de sens contrar în orice mișcarea oscilatorie armonică a pendul elastic, accelerația corpului care oscilează este minimă atunci când elongația este maximă (vezi [8]).



Probleme propuse

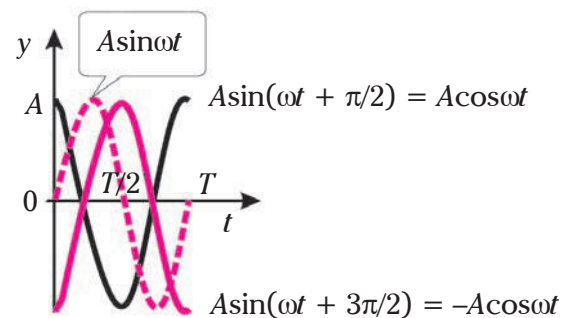
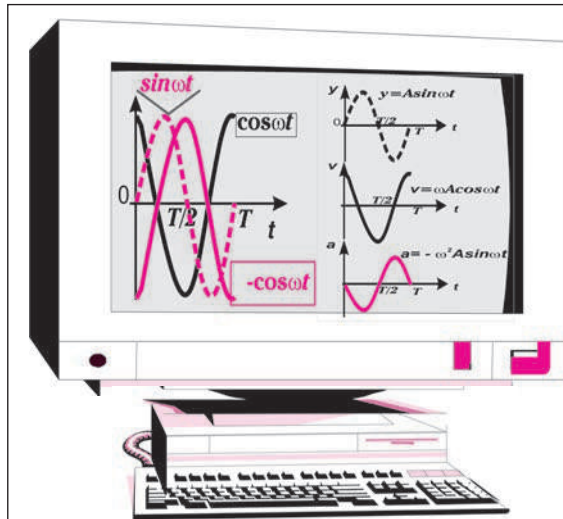
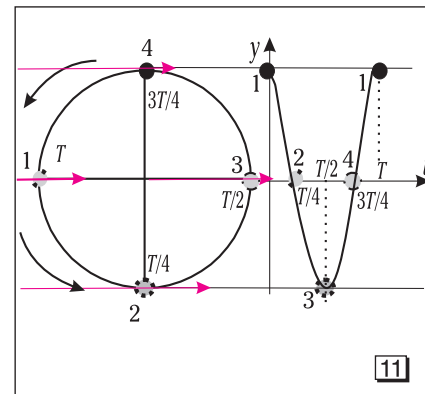
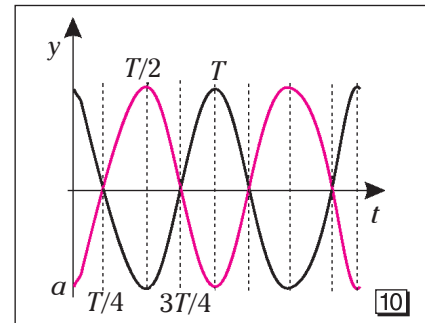
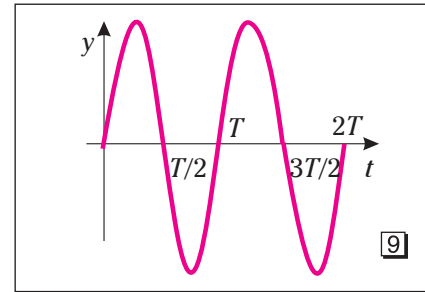
1. Legea de oscilație în cazul unei oscilații armonice (vezi [9]) este definită prin relația:
 - a) $y(t) = A \sin \omega t$;
 - b) $y(t) = A \omega \sin \omega t$;
 - c) $y(t) = A \omega \sin(\omega + t)$;
 - d) $y(t) = A \omega \sin(\omega - t)$.
2. Accelerația de oscilație este proporțională cu elongația, dar de sens contrar în orice mișcare oscilatorie armonică. Dacă $y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ și $a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0)$ (vezi [10]), la momentul inițial $t_0 = 0$ faza inițială φ_0 este egală cu:
 - a) π ; b) zero; c) 2π ; d) $0,5\pi$.
3. În cazul unei oscilații armonice, viteza maximă se atinge:
 - a) când corpul trece prin poziția de echilibru;
 - b) când elongația este maximă;
 - c) la o treime din perioadă;
 - d) la jumătate din perioadă.
4. Un corp efectuează o mișcare oscilatorie cu o perioadă $T=4$ s. La momentul $t = 0$, corpul trece prin poziția de elongație maximă (vezi [11]). Corpul ajunge în poziția de elongație minimă în timpul minim:
 - a) 0,5 s; b) 1 s; c) 2 s; d) 3 s.

Răspunsuri:

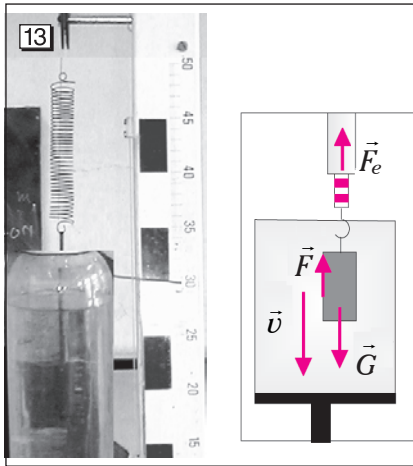
1. a. 2. d. 3. a. 4. c.

Observație:

Simulările pe calculator (vezi [12]) ne ajută să înțelegem mai bine mărimile caracteristice ale mișcării oscilatorii!



1.1.3. Oscilații mecanice amortizate



Amplitudinea rămâne constantă în cursul oscilațiilor libere neamortizate, deoarece frecările sunt neglijabile. Sistemele oscilante reale sunt supuse unor forțe de frânare. Cauza amortizării, adică a reducerii amplitudinii în cursul oscilațiilor, este pierderea de energie datorată frecărilor care apar în mediile vâscoase (vezi [13]). Acea parte a energiei care se pierde prin frecare se transformă în căldură. În condițiile în care oscilațiile se amortizează într-un interval de timp mare, atunci forțele de frecare sunt mici.

Oscilații se numesc **disipative** sau **amortizate** dacă energia se consumă în timp. Nivelul de echilibru static este definit prin deformația $y_0 = \Delta l_s$ a resortului, obținută prin proiecția relației

$$\vec{G} + \vec{F}_{0e} = 0 \quad (\text{vezi [14]}),$$

pe direcția verticală:

$$mg - ky_0 = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{mg}{k}.$$

Forța rezultantă în timpul oscilațiilor cu elongația y față de nivelul de echilibru static este:

$$\vec{F} = \vec{F}_y + \vec{G} = m\vec{a}.$$

Rezultă $-k(y + y_0) + mg = ma$ sau $-ky = ma$, deoarece $mg - ky_0 = 0$,

adică $a = -\frac{k}{m} \cdot y = -\omega^2 y$, unde $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Pulsația proprie a oscilațiilor libere este: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

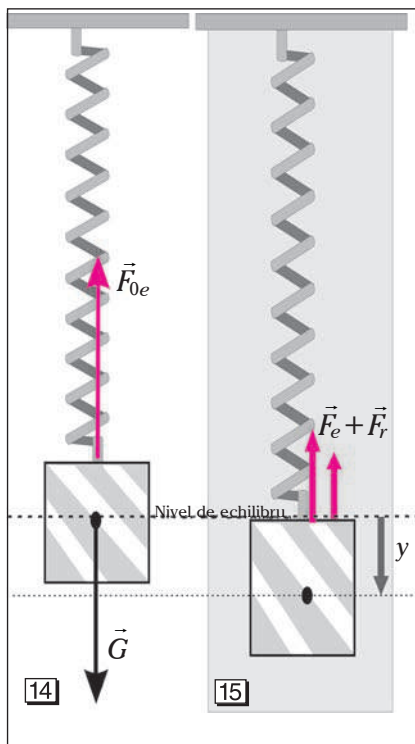
În majoritatea situațiilor în care vitezele atinse în mișcările oscilatorii sunt mici, se consideră că forțele de frecare sunt *proporționale cu vitezele de oscilație* și opuse acestora:

$$F_f = -rv,$$

unde r este factor de proporționalitate pozitiv care depinde de natura mediului fluid și de dimensiunile oscilatorului.

Ecuția mișcării oscilatorii amortizate a unui corp, care oscilează sub acțiunea unei forțe de tip elastic F_e întâmpinând din partea mediului o forță de frecare F_f (vezi [15]), se obține folosind principiul fundamental al mecanicii newtoniene:

$$-ky - rv = ma.$$



Soluția acestei ecuații este elongația oscilatorului amortizat:

$$y = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

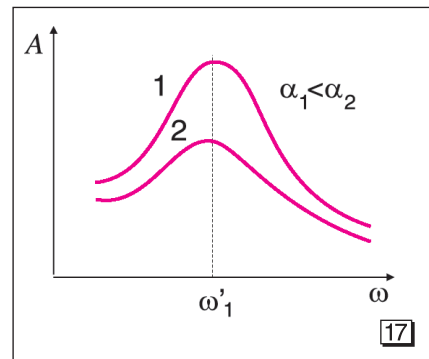
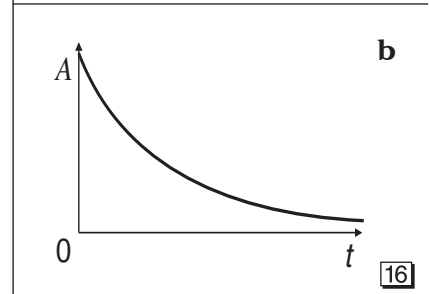
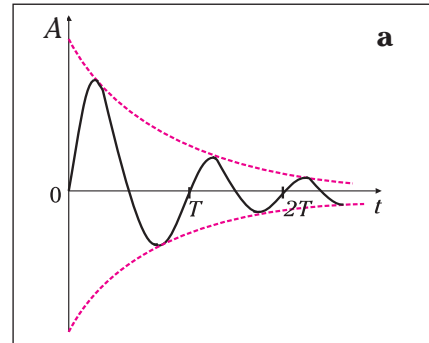
unde $\alpha = \frac{r}{2m}$ se numește **coeficient de amortizare**.

Dacă α are valori mici, mișcarea este *oscilatorie amortizată*, deoarece amplitudinea oscilațiilor scade exponențial în timpul mișcării (vezi [16]a).

Dacă α are valori mari, sistemul revine în poziția de echilibru fără să efectueze mișcări oscilatorii, adică mișcarea oscilatorului devine aperiodică (vezi [16]b).

Se constată experimental că perioada de oscilație a unui sistem în ulei este mai mare față de perioada de oscilație a sistemului în apă.

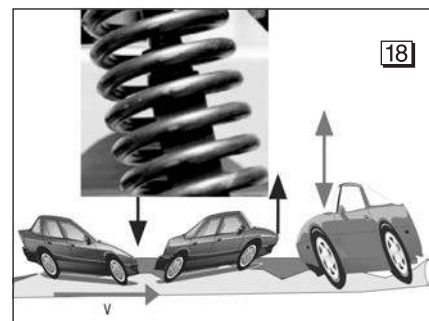
O amplitudine constantă a mișcării oscilatorii se poate menține dacă asupra oscilatorului acționează o forță exterioară periodică, ce efectuează în fiecare perioadă un lucru mecanic egal cu energia pierdută datorită amortizării. Astfel de mișcări oscilatorii, în care asupra oscilatorului acționează atât forțele elastice și forțele de frânare, cât și forțele periodice exterioare, se numesc **întreținute** sau **forțate**. Amplitudinea oscilatorului întreținut depinde de pulsația ω a forței periodice exterioare, prezentând un maximum pentru valori ω'_1 ale pulsației forței apropiate de pulsația proprie ω_0 a oscilatorului (vezi [17]).



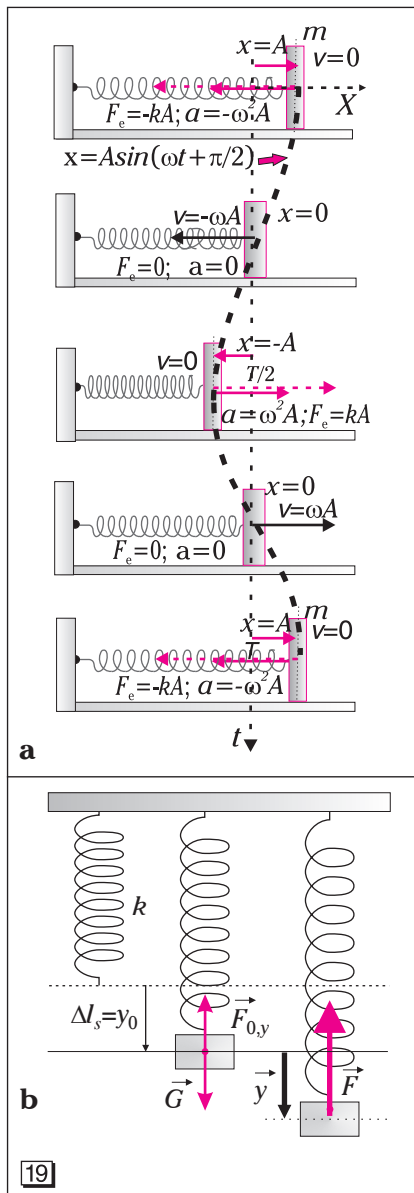
Probleme propuse

Analizează afirmațiile următoare și răspunde cu A (adevărat) sau F (fals):

1. Un resort, având capetele fixate pe axa roții și pe șasiul automobilului, asigură atenuarea oscilațiilor.
2. Amortizoarele pentru automobile sunt compuse dintr-un cilindru cu ulei în care se află un piston. Un amortizor este defect dacă automobilul efectuează mișcări oscilatorii pe verticală (vezi [18]).
3. Mișcarea oscilatorie a unui automobil, produsă de o denivelare a drumului, este aperiodică pe verticală dacă amortizoarele sunt bune.



1.1.4. *Modelul „oscilator armonic”



Forța rezultantă în timpul oscilațiilor pe verticală este:

$$\vec{F} = \vec{F}_y + \vec{G} = m\vec{a}.$$

Proiectăm relația vectorială pe verticală și obținem:

$$-k(y + y_0) + mg = ma.$$

Deoarece $mg - ky_0 = 0$, rezultă:

$$-ky = ma \Rightarrow a = -\frac{k}{m} \cdot y = -\omega^2 y.$$

Oscilațiile se numesc **liniar armonice** dacă se efectuează sub acțiunea unor forțe de tip elastic, îndreptate spre poziția de echilibru static, pentru care este valabilă legea lui Hooke:

$$F_e = -kx,$$

unde x este elongația (depărtarea față de poziția de echilibru), iar oscilatorul se numește **armonic** (vezi [19]a).

Semnul minus arată că forța elastică exercitată asupra corpului este opusă elongației, notată cu x sau y .

Dacă asupra unui oscilator acționează forțe de frecare mici, atunci oscilațiile sunt slab amortizate (se amortizează într-un interval de timp mare) și putem folosi modelul „**oscilator armonic**”. Oscilatorul armonic constituie modelul unui proces periodic ideal.

Considerăm că asupra corpului oscilant de masă m acționează o forță rezultantă elastică (vezi [19]b) sau cvasielastică (de natură neelastică):

$$ma = F_e = -ky,$$

$$\text{deci } a = -\frac{k}{m}y = -\omega^2 y, \text{ unde } \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Pulsția proprie a mișcării ω depinde de perioada T de oscilație:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

După înlocuiri, se obține expresia **perioadei oscilatorului armonic**:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Accelerația și elongația sunt proporționale, dar de semne opuse.

Pendulul elastic este un oscilator liniar armonic. Oscilațiile pendulului elastic sunt:

— liniare, deoarece sunt produse de o parte și de alta a poziției de echilibru static;

— armonice, deoarece sunt produse sub acțiunea forțelor de tip elastic, iar accelerația momentană este proporțională și de semn opus cu elongația (vezi [19]b).

Reține!

Un **oscilator** execută o **mișcare oscilatorie armonică** atunci când asupra acestuia acționează forțe rezultante de tip elastic, iar accelerația momentană este proporțională și de semn opus cu elongația. Elongația oscilatorului se exprimă prin funcții trigonometrice (sinus sau cosinus) cunoscute sub numele de **funcții armonice**.

*Descrierea oscilației armonice utilizând relațiile dintre mărimile caracteristice (recapitulare)

Știi că mișcarea oscilatorie liniar armonică, caracterizată de faza $\varphi = \omega t + \varphi_0$, unde ω reprezintă pulsația mișcării, coincide cu mișcarea proiecției pe diametrul vertical al punctului M care se rotește pe un cerc de rază egală cu amplitudinea oscilației (vezi [20]). Mișcarea oscilatorie liniar armonică are **legea de mișcare**:

$$y = A \sin \varphi = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Faza mișcării oscilatorii este argumentul funcției trigonometrice.

Dacă la momentul inițial $t_0 = 0$, faza inițială este φ_0 (diferită de 0 sau π), atunci $y_0 = A \sin(\varphi_0) \neq 0$, deci oscilatorul nu a fost în poziția de echilibru când am început cronometrarea oscilațiilor.

Viteza de oscilație este definită prin relația: $v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$.

Accelerația de oscilație este definită prin relația:

$$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y.$$

Defazajul inițial $\Delta\varphi_0$ dintre două mărimi oscilante care au aceeași pulsație ω , rămâne constant în timp: $\Delta\varphi = \Delta\varphi_0$ (se calculează ca diferență de fază pentru aceeași funcție trigonometrică). De la trigonometrie știm că:

$$\sin \varphi = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right), \quad \cos \varphi = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Mărimile fizice exprimate prin funcțiile trigonometrice sinus sau cosinus pot fi reprezentate prin **fazori** (vezi [21]). Viteza de oscilație ajunge la valorile maxime în avans față de elongație cu un defazaj temporal $\Delta t = T/4$, căruia îi corespunde un defazaj unghiular $\Delta\varphi = \pi/2$.

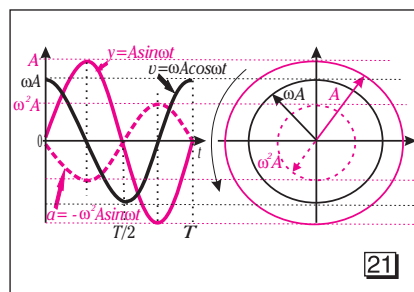
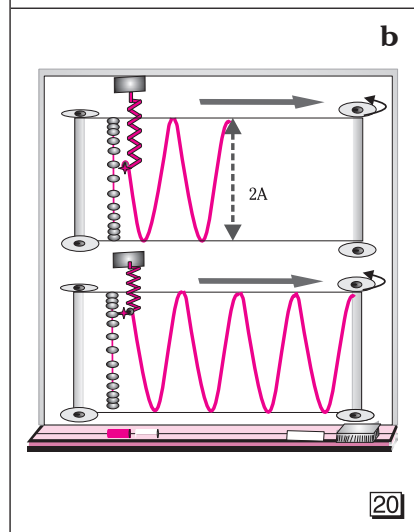
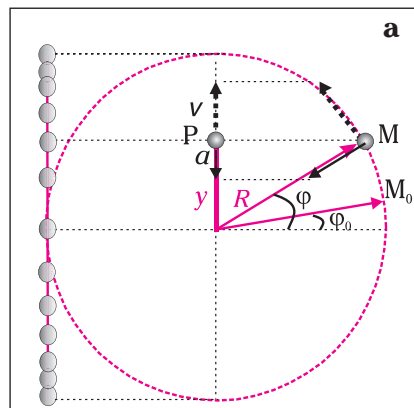
Elongația y , viteza de oscilație v și accelerația de oscilație a sunt mărimi oscilante defazate între ele cu $\Delta\varphi_{v-y} = \frac{\pi}{2}$, $\Delta\varphi_{a-v} = \frac{\pi}{2}$ și $\Delta\varphi_{y-a} = \pi$ sau temporal cu: $\Delta t_{v-y} = \frac{T}{4}$, $\Delta t_{a-v} = \frac{T}{4}$ și $\Delta t_{y-a} = \frac{T}{2}$.

Interpretarea defazajului

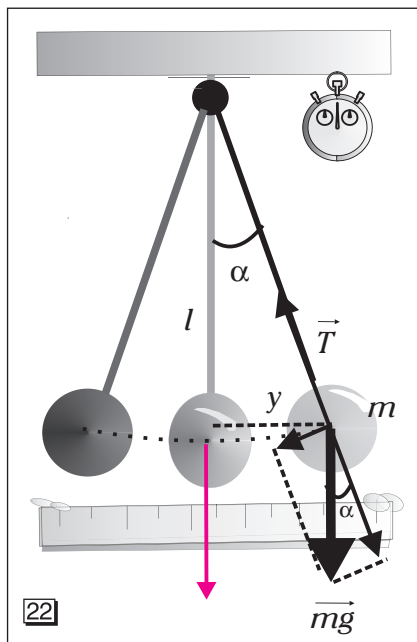
O mărime oscilantă își atinge valorile maxime, nule, minime sau intermediare după un interval de timp Δt în urma altei mărimi oscilante. Dacă o mărime este în avans față de altă mărime oscilantă

cu $\Delta t_{v-y} = \frac{T}{4}$, atunci $\Delta t_{y-v} = -\frac{T}{4}$. Într-un caz oarecare, poți folosi

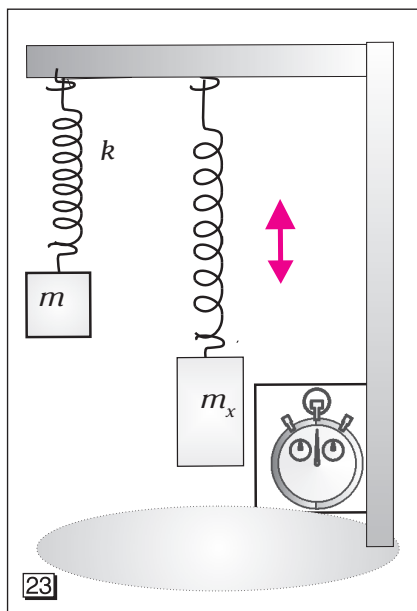
$$\text{regula de trei simplă: } \begin{cases} 2\pi \dots\dots\dots T \\ \Delta\varphi \dots\dots\dots \Delta t \end{cases} \Rightarrow \Delta t = \frac{T \Delta\varphi}{2\pi}.$$



Fazorul este un vector care se rotește în sens trigonometric cu viteza unghiulară ω egală cu pulsația mărimii reprezentate, cu modulul egal cu valoarea maximă a acelei mărimi și a cărei poziție depinde de faza mișcării oscilatorii.



① Pentru deviații mici, perioada de oscilație a unui pendul matematic este proporțională cu radicalul raportului dintre lungimea pendulului și accelerația gravitațională locală și este independentă de masa pendulului.



Se imprimă mișcări oscilatorii cu amplitudine mică.

*Modelul „oscilator armonic” în rezolvarea de probleme

1. Perioada de oscilație a pendulului elastic depinde de masa corpului care oscilează?

Rezolvare: Folosim relațiile de definiție ale pulsației:

$$\omega = 2\pi/T \text{ și } \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Perioada de oscilație a pendulului elastic este direct proporțională cu rădăcina pătrată din masa corpului care oscilează:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

2. **Pendulul gravitațional**, realizat dintr-un corp punctiform, de masă m , care atârnă de un fir inextensibil, cu masa neglijabilă și lungimea l , este tot un oscilator armonic (vezi [22]). Perioada de oscilație a pendulului gravitațional depinde de masa corpului care oscilează?

Rezolvare: Dacă este deviat cu un unghi $\alpha_{max} < 5^\circ$ față de verticala care trece prin poziția de echilibru și este lăsat liber să oscileze, forța de revenire G_{tg} nu este de natură elastică, dar este proporțională cu depărtarea față de poziția de echilibru și îndreptată în sens opus:

$$G_{tg} = -mg \sin \alpha = -mg \cdot \frac{y}{l} = -ky, \text{ unde } k = \frac{mg}{l} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{g}{l}.$$

Perioada de oscilație a pendulului matematic este direct proporțională cu rădăcina pătrată a raportului dintre lungimea pendulului și accelerația gravitațională locală:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

3. Cum putem cântări cu ajutorul oscilațiilor unui pendulului elastic (vezi [23])?

Rezolvare: În această **problemă experimentală**, perioadele de oscilație ale unui pendulului elastic se pot calcula cu relația $T_i = \frac{t_i}{n_i} T_i$, unde t_i este timpul în care s-au produs n_i oscilații.

Folosind un corp cu masa cunoscută m și un corp cu masa necunoscută m_x , exprimăm constanta de elasticitate k pentru fiecare caz: $k = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{T_1^2} = 4\pi^2 \cdot \frac{m_x}{T_2^2}$. Dacă numărăm tot atâtea oscilații n , obținem relațiile pentru calcularea masei necunoscute:

$$m_x = m \cdot \frac{T_2^2}{T_1^2} \text{ sau } m_x = m \cdot \frac{t_2^2}{t_1^2}.$$

*Situații în care se poate aplica modelul „oscilator armonic”

Modelul „oscilator armonic” este util pentru studiul oscilatorilor mecanici simpli (pendulul elastic, pendulul gravitațional).

Investigații experimentale

1. Determinarea accelerației gravitaționale cu un pendul elastic

Dacă lungimea resortului liber este l_0 , prin suspendarea de acesta a corpului cu masa m , lungimea resortului devine l și alungirea măsurată este: $y = l - l_0$ (vezi [24]).

În poziția de echilibru, forța de greutate este egală cu forța elastică: $mg = ky$, de unde rezultă $\frac{m}{k} = \frac{y}{g}$.

Înlocuim în perioada pendulului elastic și obținem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{y}{g}} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 y}{T^2}.$$

Modul de lucru:

♦ Se scoate corpul din poziția de echilibru și se numără n oscilații complete efectuate în intervalul de timp t , măsurat cu ajutorul unui ceasornic.

♦ Raportul $T = t/n$ reprezintă perioada oscilațiilor pendulului elastic. Rezultă $g = 4\pi^2 \cdot \frac{yn^2}{t^2}$.

♦ Se repetă măsurarea perioadei de câteva ori și se calculează valoarea medie a accelerației gravitaționale.

♦ Valorile măsurate se notează într-un tabel.

2. Determinarea accelerației gravitaționale cu un pendul gravitațional

Dispozitivul experimental este format dintr-un stativ pe care se fixează un pendul gravitațional simplu sau bifilar, care își conservă planul de oscilație (vezi [25]).

Modul de lucru:

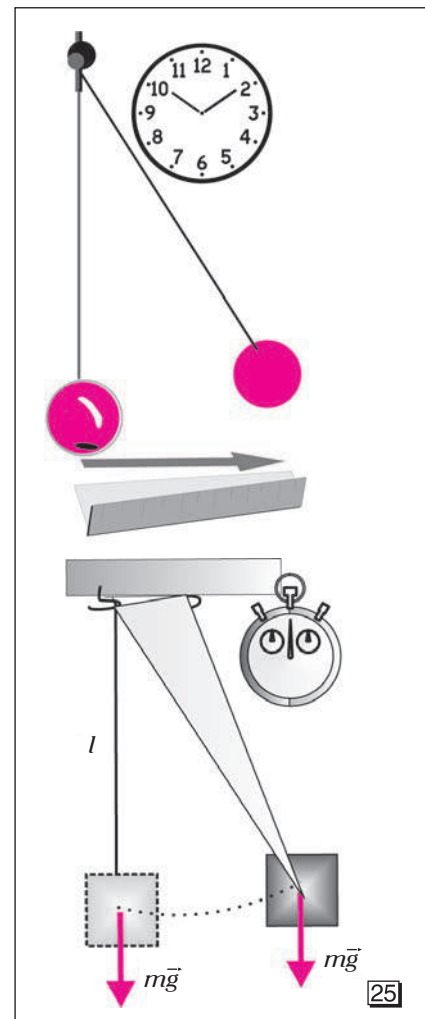
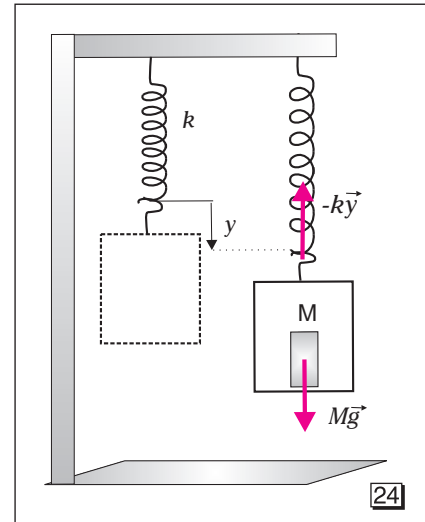
♦ Se măsoară cu rigla lungimea pendulului.

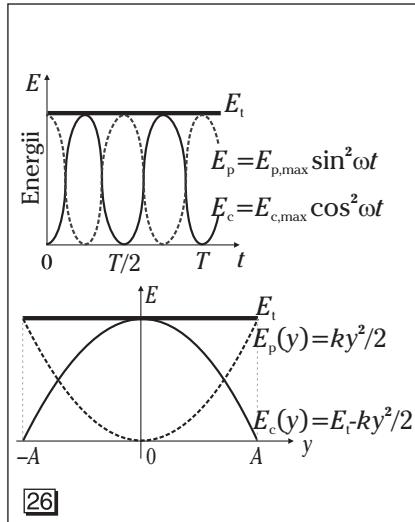
♦ Se scoate pendulul din poziția de echilibru sub un unghi mai mic de 5 grade, se lasă să oscileze și se numără $n \approx 50$ de oscilații complete în timpul t măsurat cu cronometrul.

♦ Se repetă experimentul de câteva ori, măbind de fiecare dată lungimea pendulului. Folosim relația:

$$g = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{T^2} = 4\pi^2 \cdot \frac{ln^2}{t^2}.$$

♦ Valorile măsurate se notează într-un tabel, din care putem determina erorile.





① Curba energiei potențiale sugerează interpretarea următoare: oscilatorul s-ar mișca într-o „groapă de potențial”, având viteza maximă pe fundul gropii și schimbând sensul de mișcare la marginile gropii.

Energia mecanică a oscilatorului armonic este egală cu energia cinetică maximă, respectiv cu energia potențială elastică maximă.

Energiile cinetică, potențială și totală pot fi reprezentate grafic și în funcție de elongația $y \in [-A, A]$.

Când $y = 0$, energia cinetică este maximă și energia potențială este nulă, iar când $y = \pm A$, energia cinetică este nulă și energia potențială este maximă (egală cu E_t).

*Conservarea energiei în oscilațiile armonice

În orice moment din cursul oscilațiilor, energia mecanică totală, $W = E_t$, a oscilatorului armonic este egală cu suma dintre energia cinetică E_c a oscilatorului de masă m și energia potențială $E_{p,e}$ de deformare elastică:

$$E_t = E_c + E_{p,e},$$

unde $E_c = \frac{mv^2}{2}$, $E_{p,e} = \frac{ky^2}{2}$, $k = m\omega^2$, $\omega = 2\pi\nu$,

cu $v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$ și $y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$.

După înlocuiri, obținem:

$$E_c = \frac{m}{2} \cdot \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0), \quad E_{p,e} = \frac{k}{2} \cdot A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0),$$

$$E_t = \frac{m\omega^2}{2} \cdot A^2 \cos^2 \varphi + \frac{k}{2} \cdot A^2 \sin^2 \varphi, \quad \text{unde } \varphi = \omega t + \varphi_0.$$

Deoarece $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, rezultă că **energia totală a oscilatorului armonic se conservă**:

$$E_t = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = 2\pi^2 m \nu^2 A^2 = \text{const.}$$

Putem considera cazul particular al oscilatorului cu faza inițială $\varphi_0 = 0$ (vezi [26]).

În timpul oscilațiilor, o formă de energie se transformă în altă formă de energie. Energia cinetică maximă și, respectiv, energia potențială elastică maximă sunt egale cu energia totală:

$$E_c + E_p = E_{c,max} = E_{p,max} = \frac{1}{2} kA^2 = E_t.$$

Probleme rezolvate

1. Putem obține constanta elastică echivalentă a două oscilatoare armonice cu constantele elastice k_1 și k_2 din conservarea energiei (vezi [27])?

Rezolvare:

Energia totală a două oscilatoare armonice se conservă: $E = E_1 + E_2$. Dacă sunt legate în paralel, obținem:

$$\frac{k_{ep} A^2}{2} = \frac{k_1 A_1^2}{2} + \frac{k_2 A_2^2}{2}.$$

Deoarece $A_1 = A_2 = A$, obținem constanta echivalentă a resorturilor legate în paralel:

$$k_{ep} = k_1 + k_2.$$

Dacă oscilatoarele armonice sunt legate în serie, atunci forța elastică are aceeași valoare: $k_1 A_1 = k_2 A_2 = k_{es} A$, iar amplitudinea totală este $A = A_1 + A_2$. Din conservarea energiei, obținem constanta echivalentă a resorturilor legate în serie :

$$k_{es} A^2 = k_1 A_1^2 + k_2 A_2^2 = \frac{k_1^2 A_1^2}{k_1} + \frac{k_2^2 A_2^2}{k_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{es} A^2 = \frac{k_{es}^2 A^2}{k_1} + \frac{k_{es}^2 A^2}{k_2} \Rightarrow 1 = k_{es} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \Rightarrow \frac{1}{k_{es}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

2. Să demonstrăm expresia accelerației de oscilație dacă viteza de oscilație are expresia $v(t) = v_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0)$, unde $\omega = 2\pi\nu$, (ν este frecvența), $\varphi = \omega t + \varphi_0$, $v_{\max} = \omega A$.

Considerăm un interval de timp mic ($\Delta t \rightarrow 0$) între două momente de timp $t_1 = t$ și, respectiv, $t_2 = t + \Delta t$. Deoarece nu știm deocamdată limite și derivate, vom folosi definiția

accelerației: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$, și relația trigonometrică:

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}. \text{ Obținem:}$$

$$a = v_{\max} \cdot \frac{\cos[\omega(t + \Delta t) + \varphi_0] - \cos[\omega t + \varphi_0]}{\Delta t} =$$

$$= -v_{\max} \cdot \frac{2 \sin\left(\omega t + \frac{\omega \Delta t}{2} + \varphi_0\right) \sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\Delta t}.$$

Înmulțim expresia atât la numărător, cât și la numitor cu

$$\frac{\omega}{2} \text{ și o aranjăm astfel: } a = -\omega v_{\max} \cdot \frac{\sin\left(\omega t + \frac{\omega \Delta t}{2} + \varphi_0\right) \sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\frac{\omega \Delta t}{2}}.$$

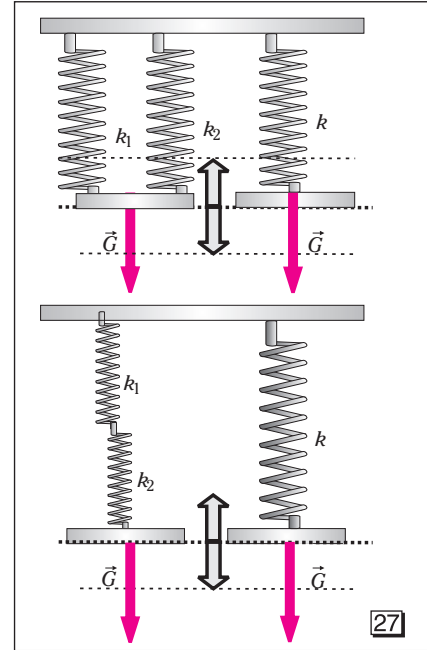
$$\text{Deoarece } \frac{\omega \Delta t}{2} \rightarrow 0, \text{ aproximăm: } \frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\frac{\omega \Delta t}{2}} \approx \frac{\omega \Delta t}{2}. \text{ Rezultă}$$

expresia: $a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y$, unde $a_{\max} = \omega^2 A$.

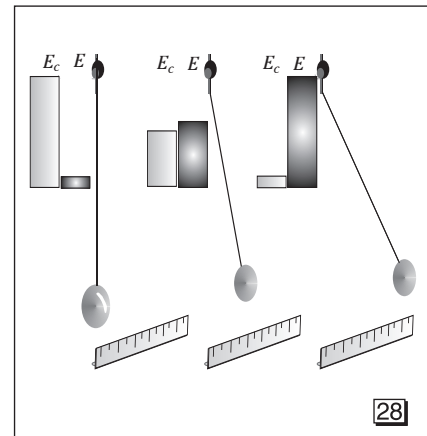
Observație:

Pentru expresia elongației $y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, se poate demonstra analog că pentru un interval de timp mic ($\Delta t \rightarrow 0$) se obține expresia vitezei de oscilație:

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0).$$



27



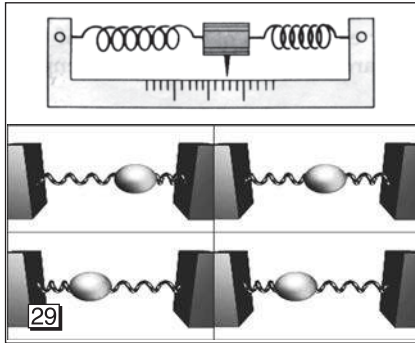
28

① Energia se conservă și cazul oscilațiilor pendului gravitațional. Pentru pendulul gravitațional cu masa m și lungimea l din figura [28], **energia totală se conservă:**

$$E_{c,\max} = E_c + E_p = E_{p,\max}.$$

1.1.5. Compunerea oscilațiilor paralele.

*Compunerea oscilațiilor perpendiculare



Descrierea calitativă a mișcării rezultate din compunerea a două oscilații

În practică, întâlnim situații în care mișcarea unui sistem este rezultatul compunerii unor oscilații. Astfel, un oscilator poate fi supus la două sau mai multe oscilații armonice paralele, de aceeași pulsație ω , sau două oscilatoare asupra cărora acționează forțe formează împreună un oscilator (vezi [29]). Oscilațiile pe care le-ar executa oscilatorul echivalent sub acțiunea a două forțe elastice paralele au aceeași pulsație ω , dar amplitudini și faze inițiale diferite.

*Descrierea cantitativă a compunerii a două oscilații paralele de frecvențe egale

Un oscilator efectuează sub acțiunea forței elastice F_1 o mișcare armonică descrisă de ecuația elongației:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}),$$

iar sub acțiunea forței elastice F_2 (paralelă cu F_1) efectuează o mișcare armonică descrisă de ecuația elongației:

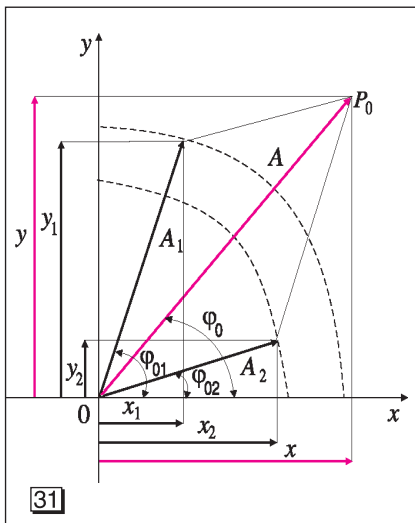
$$y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}) \quad (\text{vezi [30]}).$$

Dacă aceste două forțe acționează concomitent asupra oscilatorului considerat, atunci elongația va fi egală cu suma elongațiilor paralele, la orice moment de timp:

$$y = y_1 + y_2 = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

adică $A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$.

Oscilațiile liniare pot fi obținute prin proiecția pe o axă a unui vector \vec{A} al cărui modul este egal cu amplitudinea oscilației și care se rotește în plan cu viteza unghiulară ω (proiecțiile vârfului vectorului pe axe au aceeași dependență de timp ca și mișcările oscilatorii armonice).



Augustin Jean Fresnel (1788-1827), fizician francez, a folosit o reprezentare grafică cunoscută sub numele de **diagrama fazorială**, în care mișcărilor oscilatorii armonice le asociem câte un fazor, adică un vector rotitor, cu mărimea egală cu amplitudinea oscilației și înclinat față de direcția axei Ox cu unghiul fazei inițiale (vezi [31]).

Compunem vectorial amplitudinile A_1 și A_2 și obținem:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi_0}, \text{ unde } \Delta\varphi = \Delta\varphi_0 = \varphi_{01} - \varphi_{02}.$$

Proiecția vectorului amplitudine rezultantă A este egală cu suma proiecțiilor celor doi vectori A_1 și A_2 pe aceeași axă:

$$\begin{cases} A \sin \varphi_0 = A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02} \\ A \cos \varphi_0 = A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}.$$

Cazuri particulare:

a) Dacă $\Delta\varphi = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, atunci oscilațiile sunt în cuadratură și $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$.

b) Dacă $\Delta\varphi = 2n\pi$, atunci oscilațiile sunt în fază și $A = A_1 + A_2$.

c) Dacă $\Delta\varphi = (2n+1)\pi$, atunci oscilațiile sunt în opoziție de fază și $A = |A_1 - A_2|$ (vezi [32]).

d) **Bătăile** se obțin din compunerea a două oscilații armonice paralele de frecvențe diferite, $\omega_1 \neq \omega_2$, dar apropiate ca valoare.

Considerăm cazul $A_1 = A_2 = A$ (vezi [33]):

$$\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t = 2A \cos(\Delta\omega) t \sin \omega t,$$

unde am notat $\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ și $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$.

Bătăile sunt oscilații cu pulsația $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ și amplitu-

dinea variabilă periodic, de perioadă: $T_{bătăi} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}$.

Dacă diferența $\Delta\omega$ a pulsațiilor este mică, atunci primul factor, $\cos(\Delta\omega)t$, și amplitudinea rezultantă, $A_{rez} = 2A \cos(\Delta\omega)t$, se modifică lent în timp.

Amplitudinea oscilației rezultante trece printr-o valoare maximă și apoi minimă, valori care se succed cu frecvența:

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2.$$

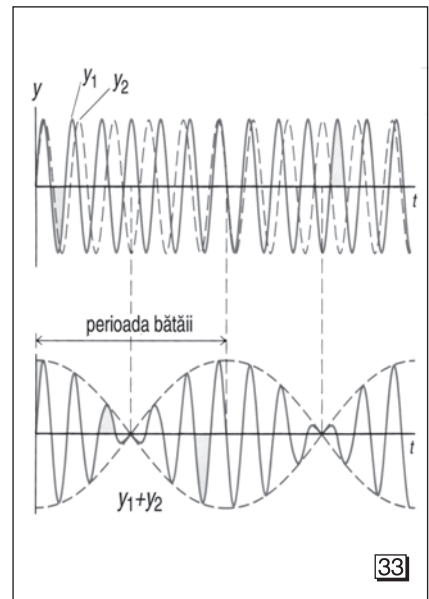
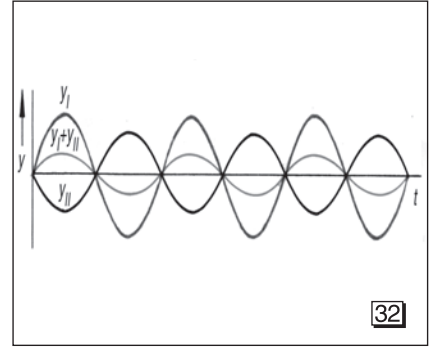
Urechile noastre deosebesc bătăile dacă $\Delta\nu < 10$ Hz.

Reține!

Amplitudinea rezultantă a două oscilații paralele de frecvențe egale este:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi_0},$$

unde $\varphi_0 = \arctg \varphi_0$; $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}$.

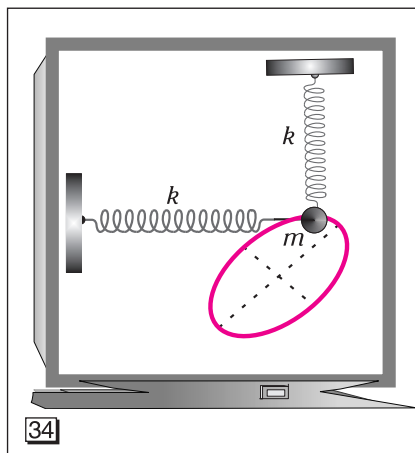


Bătăile sunt oscilații cu pulsația

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \text{ și amplitudinea variabilă}$$

periodic, de perioadă:

$$T_{bătăi} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}.$$



*Descrierea cantitativă a compunerii a două oscilații perpendiculare de frecvențe egale

Considerăm un punct material de masă m , care este sollicitat simultan să oscileze armonic sub acțiunea a două resorturi elastice identice legate pe două direcții perpendiculare, ca în figura 34.

Considerăm cazul particular când cele două mișcări oscilatorii perpendiculare au frecvențele egale.

Scriem ecuațiile elongațiilor pe cele două direcții:

$$x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}); \quad y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}).$$

Eliminăm timpul din aceste două ecuații, scrise astfel:

$$\frac{x}{A_1} = \sin(\omega t + \varphi_{01}) = \sin \omega t \cos \varphi_{01} + \cos \omega t \sin \varphi_{01};$$

$$\frac{y}{A_2} = \sin(\omega t + \varphi_{02}) = \sin \omega t \cos \varphi_{02} + \cos \omega t \sin \varphi_{02}.$$

Înmulțim ecuațiile cu $\cos \varphi_{02}$ și, respectiv, cu $\cos \varphi_{01}$. După aceea, le scădem și dăm factor comun $\cos \omega t$, între termenii din dreapta. Obținem:

$$\frac{x}{A_1} \cos \varphi_{02} - \frac{y}{A_2} \cos \varphi_{01} = \cos \omega t (\sin \varphi_{01} \cos \varphi_{02} + \sin \varphi_{02} \cos \varphi_{01}),$$

unde am folosit formula trigonometrică:

$$\sin \varphi_{01} \cos \varphi_{02} + \sin \varphi_{02} \cos \varphi_{01} = \sin(\varphi_{02} - \varphi_{01}).$$

Analog înmulțim ecuațiile cu $\sin \varphi_{02}$ și, respectiv, cu $\sin \varphi_{01}$. După aceea, le scădem și dăm factor comun $\sin \omega t$ între termenii din dreapta. Obținem:

$$\frac{x}{A_1} \sin \varphi_{02} - \frac{y}{A_2} \sin \varphi_{01} = \sin \omega t (\cos \varphi_{01} \sin \varphi_{02} - \cos \varphi_{02} \sin \varphi_{01}),$$

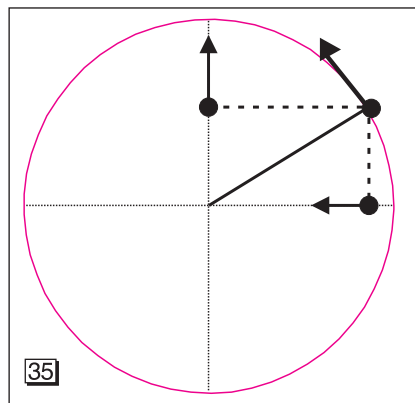
unde am folosit aceeași formula trigonometrică.

Ridicăm la pătrat ecuațiile obținute și, după adunarea lor, rezultă:

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2} \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \sin^2(\varphi_{02} - \varphi_{01}).$$

Această ecuație este cunoscută ca **ecuația generalizată a elipsei** (rotită față de axele de coordonate). Dacă

$$\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \text{ atunci: } \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 = 1 \text{ (vezi 35).}$$



① Traectoria eliptică din figura 34 devine circulară ca în figura 35 dacă amplitudinile oscilațiilor sunt egale ($A_1 = A_2$).

Dacă oscilațiile sunt în fază:

$\Delta\varphi = 2n\pi$, sau în opoziție de fază:

$\Delta\varphi = (2n+1)\pi$, atunci obținem ecuațiile:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 &= 0 \Rightarrow y = \pm \frac{A_2}{A_1}x, \end{aligned}$$

deci traectoria eliptică devine liniară.

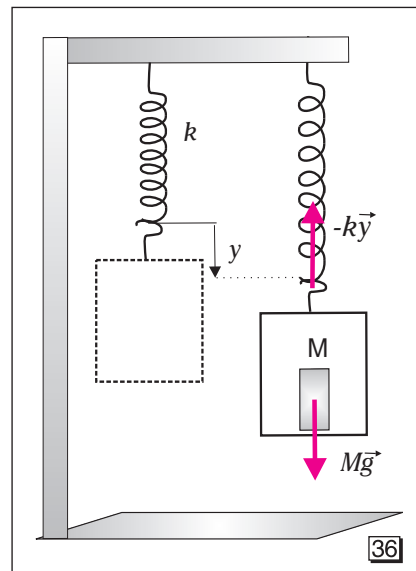


Teste pentru autoevaluare

Testul 1

I. Problemă experimentală

Un pendul elastic cu masa m_1 cunoscută este scos din poziția de echilibru static și lăsat să oscileze liber (vezi [36]). Se cronometrează timpul t în care se efectuează N oscilații și se calculează valoarea perioadei $T = t/N$. Calculează valoarea constantei de elasticitate pentru mai multe corpuri (cu masele m_2, m_3, m_4, \dots), valoarea medie și erorile. Descoperă expresia de calcul a constantei de elasticitate a resortului cu valorile mărimilor de mai sus.



II. Găsește răspunsul corect la problemele următoare:

1. Defazajul între elongația și accelerația de oscilație a oscilatorului linear armonic (vezi [37]) este:

a) $\Delta\varphi = 0$; b) $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$; c) $\Delta\varphi = \pi$; d) $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

2. Valoarea maximă a vitezei oscilatorului armonic este:

a) $v_{\max} = -\omega^2 A$; b) $v_{\max} = \omega A$; c) $v_{\max} = \frac{\omega^2}{A}$; d) $v_{\max} = \omega^2 A$.

3. În punctele în care energia cinetică este egală cu energia potențială elastică, elongația oscilatorului armonic este:

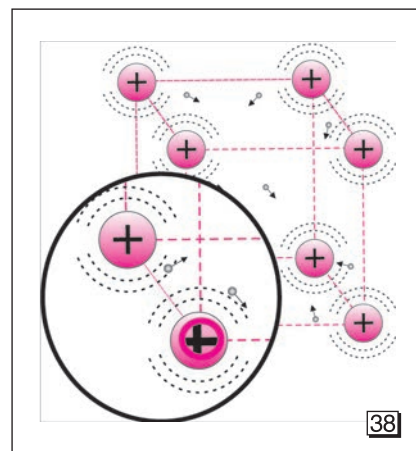
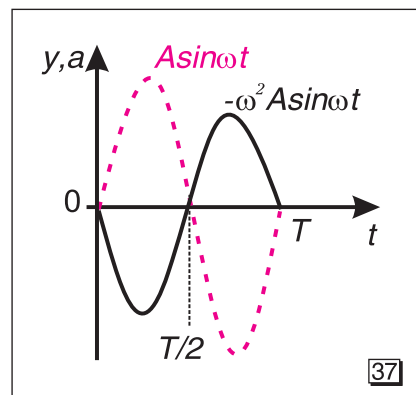
a) $y = \pm \frac{A\sqrt{3}}{3}$; b) $y = \pm A\sqrt{3}$; c) $y = \pm A\sqrt{2}$; d) $y = \pm \frac{A\sqrt{2}}{2}$.

4. În punctele în care elongația este jumătate din amplitudine, raportul între energia cinetică și cea potențială elastică a oscilatorului armonic este:

a) $\frac{E_c}{E_p} = 1$; b) $\frac{E_c}{E_p} = 2$; c) $\frac{E_c}{E_p} = 3$; d) $\frac{E_c}{E_p} = 4$.

5. Oscilațiile ionilor din rețeaua cristalină a unui metal sunt oscilații mecanice? Amplitudinea de oscilație a ionilor dintr-o rețea cristalină depinde de:

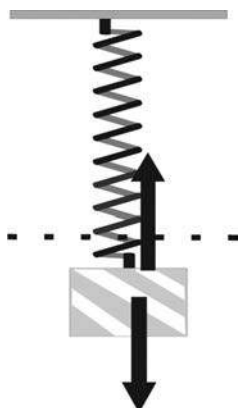
- a) temperatura metalului; b) densitatea metalului;
c) masa metalului; d) volumul metalului.



Răspunsuri:

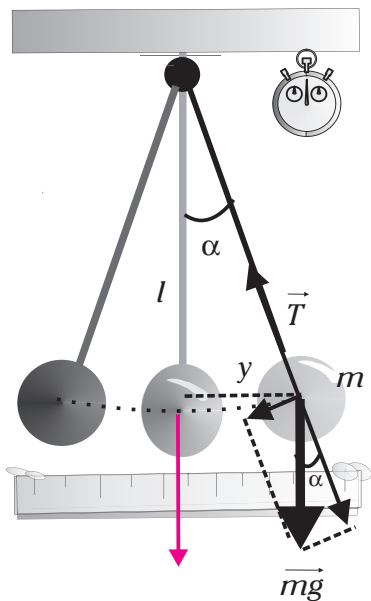
I. Din legea perioadei pendulului elastic, obținem expresia de calcul a constantei de elasticitate a resortului: $k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$.

II. 1. c. 2. b. 3. d. 4. c. 5. Nu sunt oscilații mecanice; a (vezi [38]).

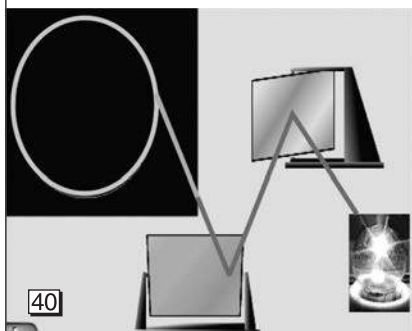


39

a



b



40

Testul 2

Rezolvă problemele următoare (grad mic de dificultate):

1. Un corp de masă $m = 0,1$ kg, fixat de un resort, execută o mișcare oscilatorie armonică cu frecvența $\nu = 20$ Hz și amplitudinea $A = 0,15$ m (vezi [39]). Calculează elongația oscilatorului atunci când energia cinetică este egală cu energia potențială.
2. Calculează lungimea firului de suspensie al unui pendul gravitațional de perioadă $T = 2$ s (vezi [40]a). Dacă pendulul execută $n = 10$ oscilații complete în 20 s, calculează valoarea accelerației gravitaționale în locul unde oscilează.
3. Un punct material oscilează după legea de mișcare $y(t) = A \sin(\pi t + \pi/4)$ cm. Calculează raportul dintre energia cinetică și cea potențială pentru momentul de timp $t = T/4$.
4. Ce mărime rămâne constantă în timp la mișcările oscilatorii armonice? Când este maximă energia cinetică?
5. Un oscilator armonic liniar are legea de mișcare $y(t) = A \sin(\omega t + \pi/6)$. Cât este valoarea elongației la momentul inițial?
6. Un pendul elastic cu masa $m = 1$ kg are în timpul mișcării viteza maximă $v_{\max} = 0,1$ m/s și accelerația maximă $a_{\max} = 2$ m/s². Calculează constanta elastică.
7. Dacă legea de mișcare a unui oscilator armonic este $y = 4 \cos(10\pi t + \pi)$ [cm], calculează perioada de oscilație. Calculează valoarea elongației la momentele de timp $t = 0$ și $t = T/2$.
8. Energia potențială maximă a oscilatorului armonic depinde de timp?
9. Două mișcări oscilatorii armonice paralele cu aceeași pulsație au ecuațiile: $y_1 = 3 \sin 10t$ [cm] și $y_2 = 4 \cos 10t$ [cm]. Găsește amplitudinea mișcării rezultante.
10. Ce traiectorie descrie spotul luminos pe ecran, dacă cele două oglinzi oscilează în jurul unor axe perpendiculare (vezi [40]b)?

Răspunsuri:

1. $y = 0,707 A$.
2. $l = 1$ m; $g = 9,8$ m/s².
3. $E_c/E_p = 1$.
4. Energia totală; la trecerea oscilatorului liniar armonic prin poziția de echilibru.
5. $y = 0,5 A$.
6. $k = 400$ N/m.
7. $T = 0,2$ s. $y(0) = -A$. $y(T/2) = A$.
8. nu.
9. $A = 5$ cm.
10. Spotul luminos descrie pe ecran mișcarea rezultată din compunerea celor două oscilații perpendiculare ale oglinzilor.

Testul 3

Rezolvă problemele următoare (grad mediu de dificultate):

1. Un pendul elastic are la un moment dat elongația y_1 și viteza v_1 (vezi [41]). La un alt moment are elongația y_2 și viteza v_2 . Amplitudinea mișcării oscilatorii se determină cu relația:

$$\text{a) } A = \sqrt{\frac{v_2^2 y_1^2 + v_1^2 y_2^2}{v_2^2 + v_1^2}}; \quad \text{b) } A = \sqrt{\frac{v_2^2 y_1^2 - v_1^2 y_2^2}{v_2^2 - v_1^2}};$$

$$\text{c) } A = \sqrt{\frac{v_2^2 y_1^2 + v_1^2 y_2^2}{v_2^2 - v_1^2}}; \quad \text{d) } A = \sqrt{\frac{v_2^2 y_1^2 - v_1^2 y_2^2}{v_2^2 + v_1^2}}.$$

2. Două mișcări oscilatorii armonice paralele sunt descrise de ecuațiile elongațiilor reprezentate în figura [42]. Găsește defazajul între elongațiile acestor mișcări.
3. Două resorturi verticale de lungimi egale, având constantele elastice k_1 și, respectiv, k_2 , sunt fixate de podea. Capetele din partea lor superioară sunt unite printr-o bară rigidă de greutate neglijabilă, așa încât să fie paralele. Sistemul astfel realizat este supus acțiunii unei forțe F , care acționează vertical la mijlocul barei rigide. Constanta elastică echivalentă a sistemului este:

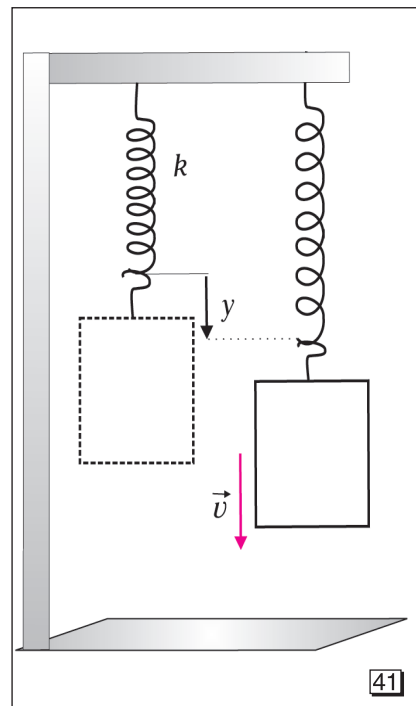
$$\text{a) } k_e = \frac{4k_1 k_2}{k_1 + k_2}; \quad \text{b) } k_e = \frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2}; \quad \text{c) } k_e = k_1 + k_2; \quad \text{d) } k_e = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

4. Un pendul elastic, cu masa $m = 0,1$ kg, oscilează liniar armonic cu pulsația $\omega = 3,14$ rad/s. Calculează constanta elastică a resortului.
5. Ecuația elongației unui oscilator liniar armonic este $y = 10\sin(5t + \pi)$ [m]. Care sunt valorile amplitudinii oscilațiilor și fazei inițiale a oscilațiilor?
6. Un corp execută mișcarea oscilatorie liniar armonică descrisă de ecuația elongației $y = 2\sin(3,14t + \pi)$ [m]. Află valorile maxime ale vitezei și accelerației oscilațiilor.
7. Legea de oscilație a unui punct material, de masă $m = 2$ kg, este $y = 4(\sin 20t + \sqrt{3}\cos 20t)$ [cm]. Calculează amplitudinea oscilației și faza inițială a oscilației.

Răspunsuri:

1. b. 2. $\Delta\varphi = \pi/2$. 3. a. 4. $k = 0,1$ N/m. 5. $A = 10$ m; $\varphi_0 = \pi$ rad.

6. $v_{\max} = 6,28$ m/s. $a_{\max} = 20$ m/s². 7. $A = 8$ cm, $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$.



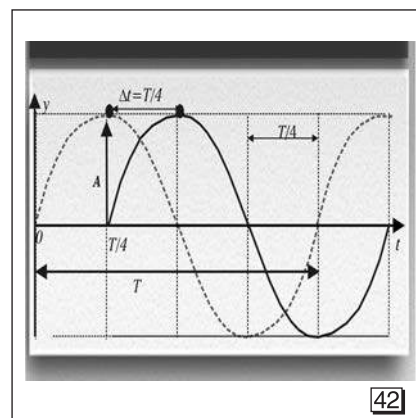
Indicație:

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1;$$

$$\begin{cases} y_1 = A \sin \varphi_1 \\ v_1 = \omega A \sin \varphi_1 \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} y_2 = A \sin \varphi_2 \\ v_2 = \omega A \sin \varphi_2 \end{cases}$$



Testul 4

***Rezolvă problemele următoare (grad ridicat de dificultate):**

1. O bară omogenă este plasată în echilibru pe doi tamburi identici, cu axele orizontale și la același nivel. Tamburii se rotesc înspre interior la contactul cu bara, în sens invers unul față de celălalt. Distanța dintre axele tamburilor este $2a$, iar coeficientul de frecare între bară și tamburi este μ . Bara poate efectua mici oscilații armonice stânga-dreapta. Perioada acestor oscilații este:

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{\mu g}}$; b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{3a}{2\mu g}}$; c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{2\mu g}}$; d) $T = \infty$.

2. Un taler de masă M este atârnat în capătul de jos al unui resort de masă neglijabilă și constantă de elasticitate k . De la înălțimea h cade pe acesta o bucată de plastilină de masă m , sistemul începând să oscileze. Amplitudinea oscilațiilor sistemului este:

a) $A = \frac{mg}{k} \cdot \sqrt{1 + \frac{2kh}{(M+m)g}}$; c) $A = \frac{mg}{k} \cdot \frac{kh}{Mg}$;

b) $A = \frac{mg}{k} \cdot \sqrt{1 - \frac{2kh}{(M+m)g}}$; d) $A = \frac{mg}{k}$.

3. Pe capătul superior al unui resort nedeformat, de masă neglijabilă și constantă de elasticitate k , este așezat un corp de masă m (vezi [43]). Calculează amplitudinea oscilațiilor sistemului, considerând că oscilațiile libere încep din punctul O de pe nivelul 1, sub acțiunea corpului de masă m .

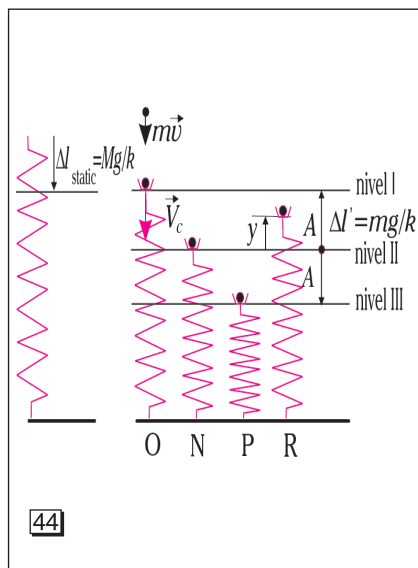
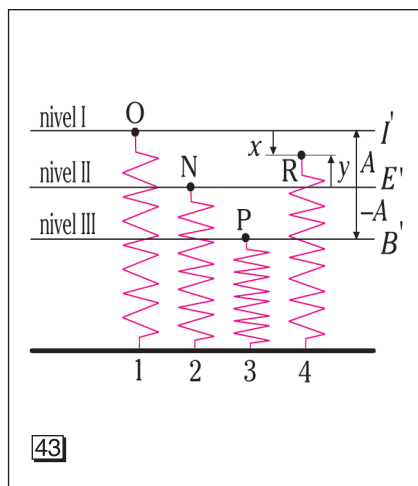
4. Pe capătul superior al unui resort nedeformat, de masă neglijabilă și constantă de elasticitate k , este așezat un taler de masă M , care este ciocnit plastic de un corp de masă m și cu viteza v , pe verticală de sus în jos (vezi [44]). Notăm cu A amplitudinea oscilațiilor și cu y elongația în starea R. În care din stările O, N, P, R față de cele trei nivele se verifică legea conservării energiei?

5. Un resort cu constanta de elasticitate k se taie în n bucăți de lungime identică. Cele n resorturi obținute se leagă în paralel. Constanta elastică a acestui sistem este:

a) $k_e = n^2k$; b) $k_e = nk$; c) $k_e = 0,5nk$; d) $k_e = k$.

Răspunsuri:

1. a. 2. a. 3. $A = mg/k$. 4. Legea conservării energiei se verifică în stările O, N, P, R față de cele trei nivele. 5. a.





1.2. OSCILATORI MECANICI CUPLAȚI

1.2.1. Oscilații mecanice întreținute. Oscilații mecanice forțate

După ce un leagăn sau un pendul este împins cu mâna și apoi este lăsat liber, oscilațiile sale se amortizează datorită frecărilor cu aerul și a celor din sistemul de prindere.

Oscilațiile nu se amortizează, adică amplitudinea acestora rămâne constantă dacă sistemul oscilant primește din exterior energia pierdută prin frecări, la intervale de timp egale cu perioada oscilațiilor libere.

Oscilațiile unui sistem aflat sub acțiunea periodică a altui sistem se numesc **oscilații forțate**.

Dacă transmitem oricărui oscilator impulsuri periodice, la intervale de timp diferite de perioada oscilațiilor libere, atunci oscilațiile acestuia sunt forțate, amplitudinile atingând valori mari dacă frecările sunt mici (vezi [1]). La turații mici ale volantului, firul antrenat de volant dă impulsuri periodice resortului dinamometrului și se obțin oscilații cu amplitudini comparabile cu raza volantului.

La turații din ce în ce mai mari ale volantului, se constată experimental că amplitudinea măsurată devine maximă la o anumită frecvență a acestora, iar la turații și mai mari, amplitudinea scade. Constatăm experimental că transferul energiei de la un sistem oscilator la alt sistem oscilator are caracter selectiv și este optim dacă perioadele acestora sunt egale sau aproximativ egale. Explică ce se va constata dacă oscilatorul se introduce total sau parțial într-un lichid.

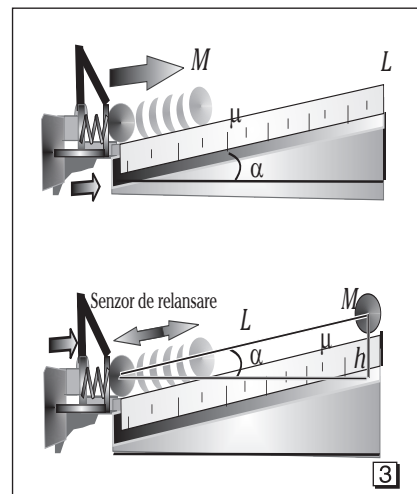
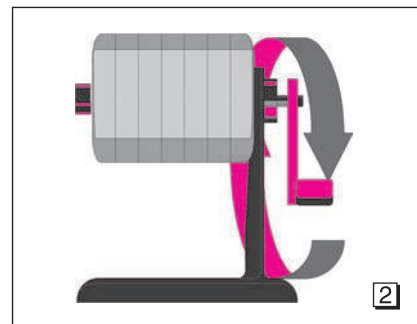
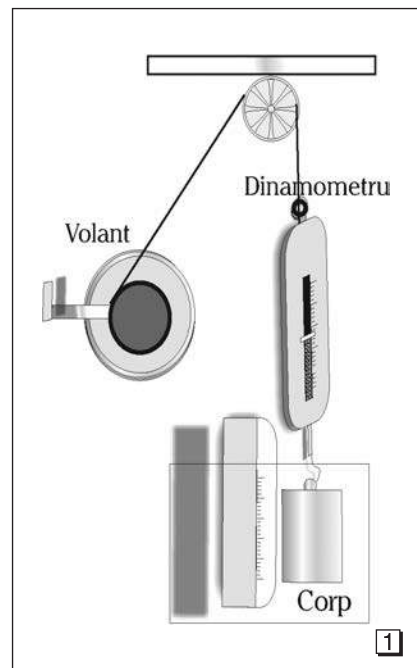
Oscilații forțate întâlnite în practică sunt:

- vibrațiile pieselor nefixate în locurile lor, aflate în sisteme sau dispozitive în mișcare;
- oscilațiile plantelor, ale crengilor sau ale podurilor sub acțiunea vântului;
- oscilațiile autovehiculelor pe un drum cu denivelări.



Probleme propuse

1. Concepe un dipozitiv cu un motorăș electric sau cu un sistem de roți pentru generarea oscilațiilor forțate (vezi [2]).
2. Lansatorul unei bile este așezat la baza unui plan înclinat de unghi α , coeficient de frecare μ și lungime L (vezi [3]). Câtă energie trebuie să primească bila când revine la baza planului înclinat pentru ca aceasta să ajungă la aceeași înălțime h ?

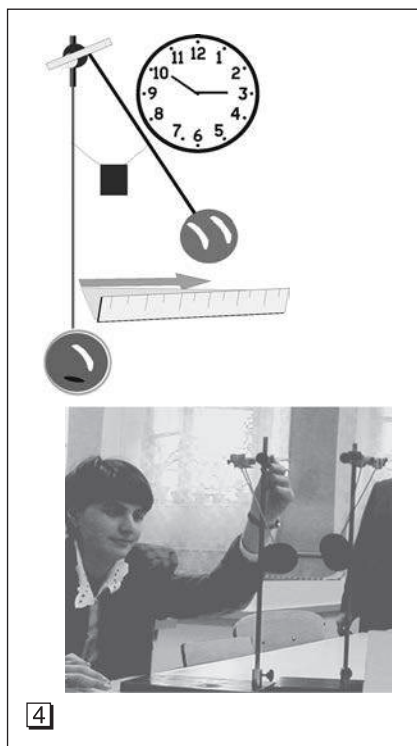


1.2.2. *Rezonanța

Ai observat că leagănele fixate pe același cadru intră în oscilație atunci când numai unul este scos din poziția de echilibru?

Dacă se cuplează două pendule de lungimi diferite și îl scoatem din repaus pe unul dintre ele, atunci acesta devine excitator pentru cel rămas în repaus. Dacă lungimea și deci frecvența oscilațiilor excitatorului este mult diferită de cea proprie a oscilatorului aflat în repaus, atunci amplitudinea celui din urmă este foarte mică, transferând foarte puțină energie. Se pune în mișcare pendulul excitator care transmite impulsuri periodice altor pendule prin intermediul tije de care sunt suspendate (vezi [4]).

Dacă pendulele au lungimi egale cu cea a pendulului excitator, atunci acestea vor avea amplitudinea maximă.



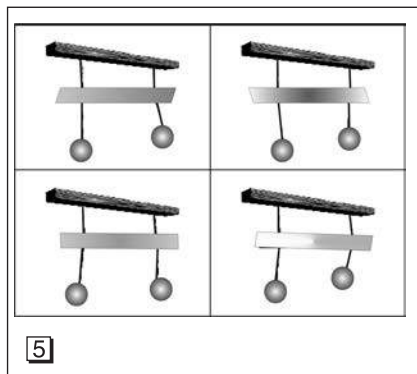
[4]

*Transferul de energie între doi oscilatori cuplați

Să considerăm două pendule de aceeași lungime l și de aceeași masă m , legate printr-un resort sau printr-un cordon elastic (vezi [5]).

Mișcările fiind influențate reciproc, spunem că aceste două sisteme oscilante sunt cuplate. Dacă imprimăm unuia dintre pendule o mișcare oscilatorie față de poziția de echilibru, energia mișcării se transmite integral la celălalt pendul după un interval de timp.

Procesul de transfer optim al energiei între oscilatoare cuplate, când frecvența oscilatorului excitator este egală cu frecvența oscilatorului excitat, se numește **rezonanță**.



[5]

Un oscilator (oscilatorul excitator) își pierde treptat energia, micșorându-și amplitudinea până când ajunge în repaus, iar celălalt (oscilatorul excitat) preia, tot treptat, energia cedată de primul, amplitudinea sa de oscilație devenind din ce în ce mai mare și atingând valoarea maximă când primul ajunge în repaus. Apoi rolurile se schimbă, cel de-al doilea transferă energie primului pendul.

Mișcările ambelor pendule sunt caracterizate de amplitudini care se modifică ciclic și se amortizează datorită frecărilor. Acest proces reprezintă o oscilație forțată pentru oscilatorul excitat, în cazul particular al rezonanței. Când cuplajul este mai strâns, transferul energetic se face într-un timp mai scurt. Pendulul excitator este în avans de fază cu $\Delta\varphi = \pi/2$ față de pendulul rezonator, cum este pendulul excitat în condiții de rezonanță.

Când rezonatorul are elongația maximă, excitatorul trece cu viteză maximă prin poziția de echilibru și îl accelerează. La rezonanță, o oscilație se poate menține ($A = \text{const.}$) cu transfer minim de energie de la excitator. Dacă cele două pendule nu au aceeași lungime l , energia mișcării nu se mai transferă integral la celălalt.

Catastrofa de rezonanță se produce atunci când amortizarea este mică și amplitudinea crește din ce în ce mai mult. De exemplu, dacă turația unui motor crește până când coincide cu frecvența sistemului în care este încastrat, atunci motorul se poate smulge din suport, deoarece acesta se fisurează.

Din punct de vedere energetic, la rezonanță, energia potențială elastică și energia cinetică a corpului de masă m se transformă alternativ una în alta, în timp ce energia furnizată de excitator se transformă ireversibil în căldură prin frecări.

Un pod poate fi avariat sub acțiunea vântului care „bate în rafale” (vezi [6]). De ce este interzis să mergem în pas de defilare pe poduri sau coridoare?

Observație:

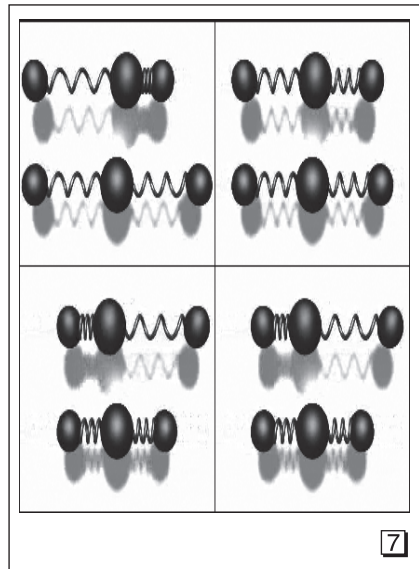
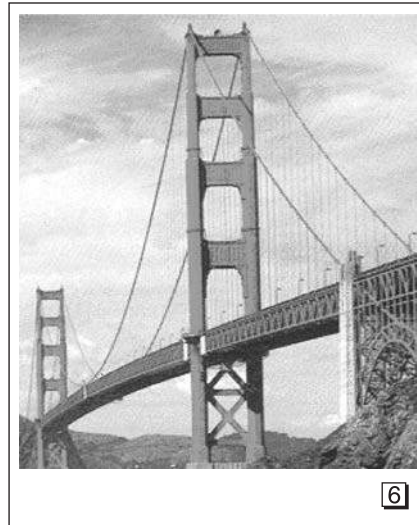
Rezonanța transformă oscilațiile libere amortizate în oscilații neamortizate datorită întreținerii lor.



Probleme propuse

Analizează afirmațiile următoare și răspunde cu A (adevărat) sau F (fals):

1. Dacă oscilațiile se efectuează în direcția planului comun (longitudinal), se constată că transferul energetic se face mai repede decât în cazul când oscilațiile se efectuează într-un plan transversal față de planul comun.
2. Când cele două pendule sunt deviate simultan, cu același unghi și în același sens, longitudinal sau transversal, acestea oscilează cu perioada proprie $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, unde l este lungimea lor.
3. Un sistem de oscilatori cuplați poate efectua oscilații cu frecvențe diferite, care depind de sistem [7]. Asemenea oscilații au și atomii, legați într-o moleculă, care oscilează longitudinal sau transversal cu mai multe frecvențe proprii.

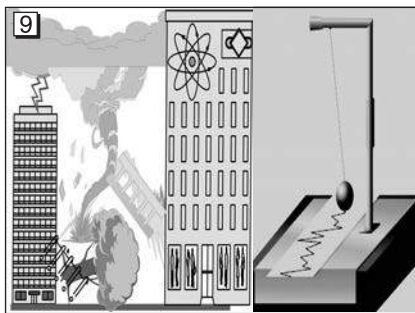


1.2.3. Consecințe și aplicații



La rezonanță, sistemul excitat primește de la excitator energia maximă.

Clădirile înalte, platformele maritime, stâlpii de susținere și podurile (vezi [8] — Telefericul și barajul Hoover, pe râul Colorado, Nevada, SUA) au grinzi și planșee cu anumite frecvențe proprii de oscilație. Orice construcție cu o frecvență proprie de oscilație apropiată de frecvențele unor excitatori (seisme, furtuni cu rafale de vânt) primește energie mare atunci când execută oscilații forțate cu amplitudini mari, care se transformă în energie de deformare plastică (crăpături, plastifieri, ruperi).

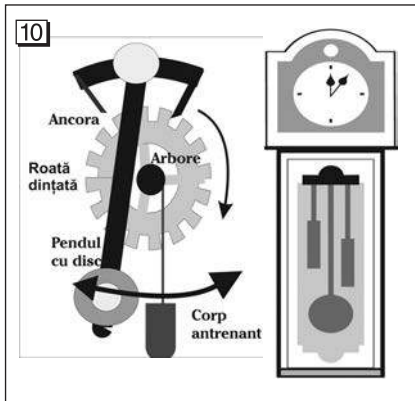


Oscilațiile forțate își găsesc aplicații în construcția seismografelor care înregistrează deplasări proporționale cu elongația corpului de care sunt prinse (vezi [9]).

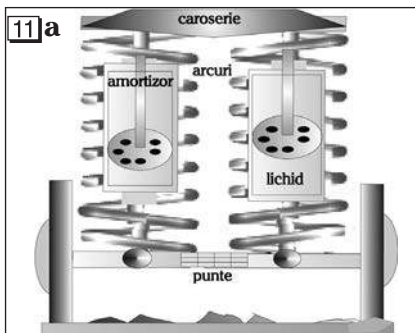
Oscilațiile unui motor sunt perturbatoare pentru dispozitivul pe care este montat.

Oscilațiile geamurilor și ale solului produse de circulația autovehiculelor grele au amplitudini mai mari, iar la anumite turații ale motoarelor sesizăm zgomot puternic.

Aplicații practice



Oscilațiile autoîntreținute ale pendulei ceasului clasic comandă transferul de energie necesar menținerii oscilațiilor (vezi [10]). Energia potențială gravitațională înmagazinată de corpul antrenant prin răsucirea firului de care acesta este prins pe arbore (așa-numita întoarcere zilnică a ceasului) este transferată periodic pendulului cu disc prin intermediul ancorei, pentru compensarea energiei pierdute de pendul prin frecări. Ancora blochează și deblochează periodic roata dințată când un dinte al roții alunecă pe una dintre extremitățile ancorei, iar corpul atârnat de fir coboară în câmpul gravitațional cu „pași” mici.



Oscilațiile forțate produse autovehiculelor de denivelările șoselei trebuie să fie amortizate de către amortizoare telescopice pentru ca autovehiculele să nu intre în rezonanță, deoarece ar avea efecte distructive.

Amortizorul, compus dintr-un cilindru în care se află un piston și ulei, este fixat coaxial cu arcul de suspensie pe axa roții și pe șasiul automobilului (vezi [11a]). La denivelări,

oscilațiile axei față de șasiu sunt transferate arcului și amortizorului. Pistonul este solidar cu șasiul automobilului. Datorită vâscozității ridicate a uleiului, mișcarea relativă a pistonului față de cilindru este rapid amortizată la deplasarea pe un drum cu denivelări (vezi [11]b). Frecările se opun mișcării și o întârzie, măbind perioada.

*Rezonanța sistemelor mecanice (extindere pentru performeri și curioși)

Oscilațiile proprii ale unui oscilator liber neamortizat au pulsația proprie ω_0 . Dacă o forță exterioară F , de pulsație ω_1 , acționează transferând energie acestui oscilator elastic de masă m , care are pulsația proprie ω_0 când oscilează liber, atunci acesta intră în oscilație forțată cu pulsația ω_1 . Oscilatorul opune forța de inerție:

$$-F_i = ma = -m\omega_1^2 A \sin \omega_1 t$$

În timpul deformației, oscilatorul opune o forță elastică:

$$F_e = -kx = -kA \sin \omega_1 t,$$

unde k este constanta de elasticitate a resortului echivalent.

Dacă oscilatorul se găsește într-un mediu vâscos, acesta opune o forță rezistentă dată de relația:

$$F_r = -rv = -r\omega_1 A \cos \omega_1 t,$$

unde r este coeficientul de frecare vâscoasă în mediul respectiv.

Forța activă exterioară este defazată cu un unghi φ_0 față de elongațiile oscilatorului:

$$F = F_{\max} \sin(\omega_1 t + \varphi_0).$$

Valorile instantanee verifică ecuația: $F + F_e + F_r = -F_i$, adică $F - kx - rv = ma$, deci $ma + rv + kx = F$.

Obținem ecuația:

$$-m\omega_1^2 A \sin \omega_1 t + r\omega_1 A \cos \omega_1 t + kA \sin \omega_1 t = F_{\max} \sin(\omega_1 t + \varphi_0). \quad (1)$$

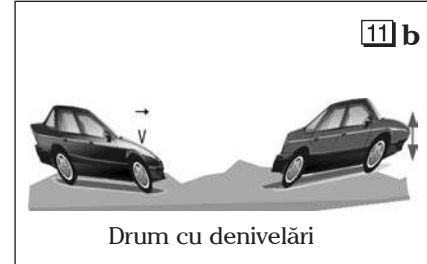
Forțelor oscilante le atașăm câte un fazor. Fazorul este un vector rotitor cu viteza unghiulară având mărimea egală cu valoarea maximă și poziția inițială determinată de unghiul de fază inițială (vezi [12]a).

Dezvoltând funcția trigonometrică din membrul al doilea și grupând termenii, obținem:

$$(kA - m\omega_1^2 A) \sin \omega_1 t + r\omega_1 A \cos \omega_1 t = F_m \sin \omega_1 t \cos \varphi_0 + F_m \cos \omega_1 t \sin \varphi_0.$$

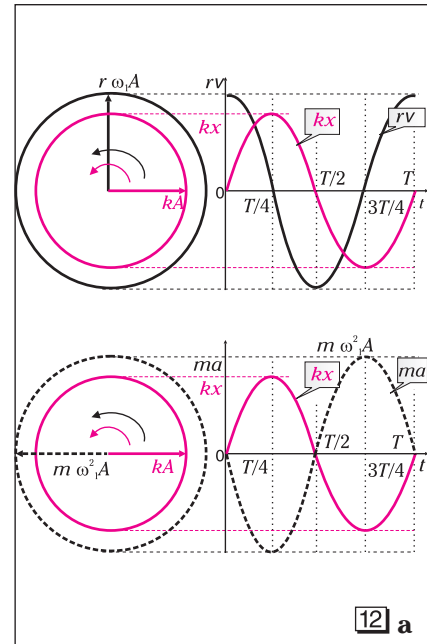
Pentru două momente de timp, $t_1 = 0$ și $t_2 = T/4$, vom avea aceiași coeficienți pentru $\sin \omega t$ și $\cos \omega t$, deci $F_m \sin \varphi_0 = r\omega_1 A$ și $F_m \cos \varphi_0 = kA - m\omega_1^2 A \Rightarrow \tan \varphi_0 = \frac{r\omega_1}{k - m\omega_1^2}$.

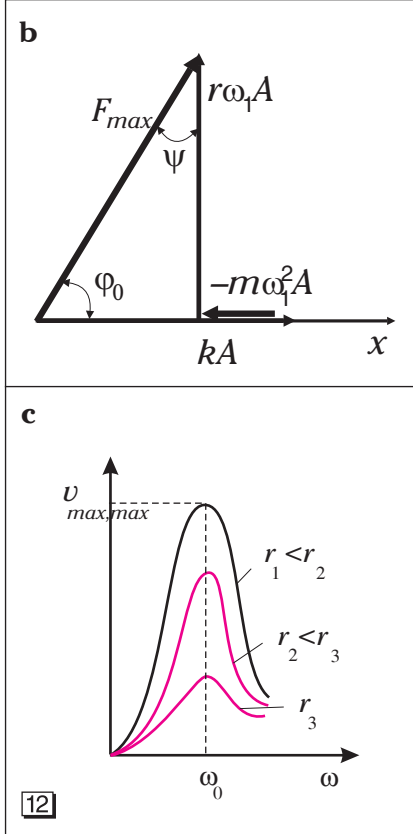
Se observă că $\varphi_0 = \pi/2$, atunci când $\omega_1^2 = \frac{k}{m} = \omega_0^2$.



Portofoliu

Documentează-te și explică modul de funcționare a altui sistem de reglare pentru un sistem oscilant.





Pulsația de rezonanță a amplitudinilor deplasărilor se apropie de pulsația proprie ω_0 , în absența amortizării, atunci când coeficientul de amortizare δ este mic. Dacă $\delta < \omega_0$, oscilațiile sunt periodice și amortizate datorită frecărilor relativ reduse (mici). La pulsația ω'_1 , amplitudinea maximă devine staționară:

$$A_{\max} = \frac{F_{\max}}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{F_{\max}}{r\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}},$$

unde $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ este pulsația oscilațiilor libere amortizate.

Ecuatiei (1) i se asociază o diagramă fazorială (vezi [12]b). Alegem ca fazor de referință un vector a cărui mărime este egală cu forța elastică maximă, kA .

Fazorul atașat forțelor de frecare este $F_f = r v_{\max} = r \omega_1 A$, în avans de fază cu $\pi/2$ față de cel de referință, iar cel atașat forțelor de inerție este $F_i = m a_{\max} = m \omega_1^2 A$, în opoziție de fază cu cel de referință:

$$F_{\max}^2 = A^2 \left[r^2 \omega_1^2 + (k - m \omega_1^2)^2 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{F_{\max}}{\sqrt{r^2 \omega_1^2 + (k - m \omega_1^2)^2}} = \frac{F_{\max}}{\omega_1 \sqrt{r^2 + (k/\omega_1 - m \omega_1)^2}}.$$

Valoarea maximă a vitezei de oscilație este:

$$v_{\max} = \omega_1 A = \frac{F_{\max}}{\sqrt{r^2 + (k/\omega_1 - m \omega_1)^2}}.$$

Cea mai mare valoare a vitezei v_{\max} se obține atunci când $k/\omega_1 - m \omega_1 = 0$, adică la **pulsația de rezonanță a vitezelor**, când $\omega_1^2 = k/m = \omega_0^2$ și deci $v_{\max, \max} = F_{\max}/r$ (vezi [12]c).

La pulsația ω_0 , când oscilațiile forțate întreținute se produc în ritmul impus de forța oscilantă exterioară, numai viteza oscilației forțate, forța rezistivă a mediului și puterea transferată sunt maxime.

Amplitudinea deplasării și forța elastică devin maxime pentru **pulsația de rezonanță a amplitudinilor deplasărilor**, când pulsația forței excitatoare coincide cu pseudopulsația ω'_1

a sistemului oscilant: $\omega'_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$, unde $\delta = r/2m$. Considerăm funcția:

$$f(\omega_1^2) = r^2 \omega_1^2 + (k - m \omega_1^2)^2 = \omega_1^2 r^2 + k^2 + m^2 \omega_1^4 - 2km \omega_1^2.$$

Notăm $\omega = \omega_1^2$ și rezultă $f(\omega) = m^2 \omega^2 + (r^2 - 2km)\omega + k^2$. Această funcție admite un maxim pentru:

$$\omega = -\frac{r^2 - 2km}{2m^2} = \frac{2km}{2m^2} - \frac{r^2}{2m^2} = \frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_{\text{rez}, A} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \omega'_1 < \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$



Teste pentru autoevaluare

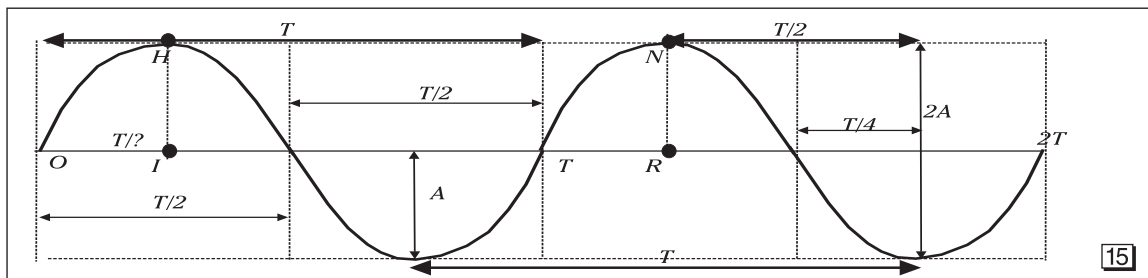
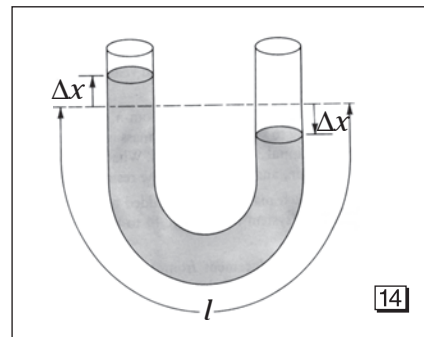
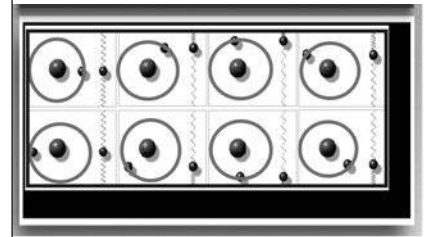
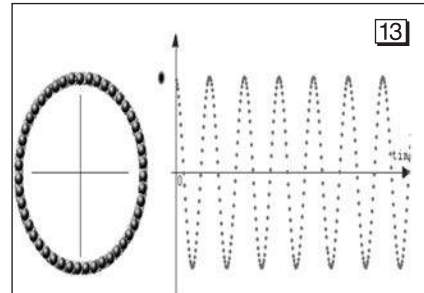
Testul 1

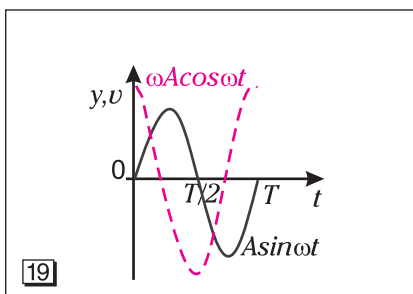
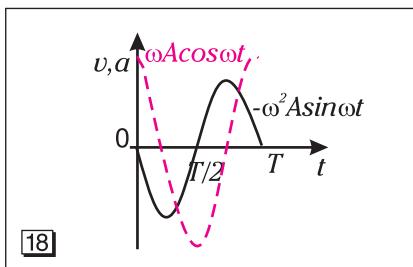
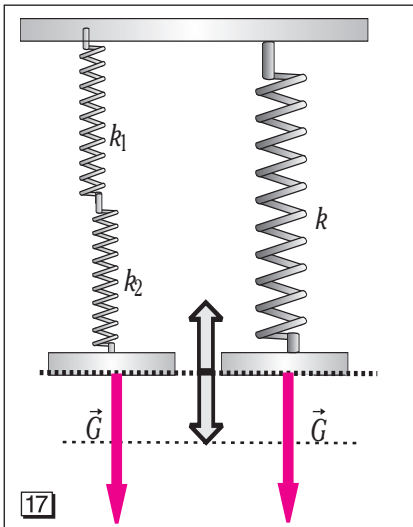
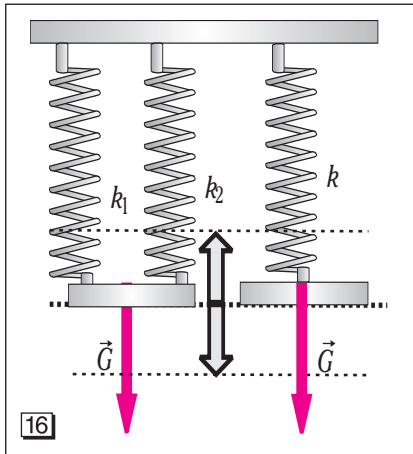
1. Câte cicluri complete descrie bila, proiectată pe axa verticală, în cele două situații din figura [13]?
2. Un pendul matematic care atârnă de tavanul unui lift în repaus are perioada de oscilație T_0 . Dacă liftul urcă uniform accelerat cu $a = 0,5g$, atunci pendulul oscilează cu perioada T :
a) $T = \sqrt{\frac{2}{3}}T_0$; b) $T = \sqrt{2}T_0$; c) $T = 0,5T_0$; d) $T = 3T_0$.
3. Dacă liftul din problema 2 coboară accelerat cu accelerația $a = 0,5g$, atunci perioada de oscilație devine:
a) $T = \sqrt{\frac{2}{3}}T_0$; b) $T = \sqrt{2}T_0$; c) $T = 0,5T_0$; d) $T = 3T_0$.
4. Un resort elastic având constanta de elasticitate k , așezat pe un plan lucios orizontal, netensionat, are legat la capătul liber un corp de masă M . Un glonț de masă m tras pe orizontală se încastrează în corpul de masă M și sistemul începe să oscileze. Calculează amplitudinea și perioada de oscilație a sistemului.
5. Un tub în forma literei „U” conține o coloană de lichid de densitate ρ și de lungime totală l , aflată în echilibru. Dacă se dezechilibrează coloana de lichid, care este expresia perioadei oscilațiilor libere, dacă se neglijează frecarea între lichid și pereții tubului (vezi [14])?
6. Amplitudinea oscilației din figura [15] este egală cu distanța dintre punctele: a) O și I; b) I și H; c) O și R; d) I și R.
7. Perioada oscilației din figura [15] este egală cu distanța dintre punctele: a) O și I; b) I și H; c) O și R; d) I și R.

Răspunsuri:

1. șase cicluri și, respectiv, un ciclu. 2. a. 3. b.

4. $A = \frac{mv}{\sqrt{k(M+m)}}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$. 5. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$. 6. b. 7. d.





Testul 2

Găsește răspunsul corect la problemele următoare:

1. Două resorturi elastice au constantele elastice egale $k_1 = k_2 = k$. Dacă sunt legate în paralel (vezi [16]), atunci constanta elastică echivalentă este:
a) $k_p = 0,5k$; b) $k_p = 0,707k$; c) $k_p = k$; d) $k_p = 2k$.
2. Două resorturi elastice au constantele elastice k_1 și k_2 . Dacă sunt legate în serie (vezi [17]), atunci constanta echivalentă este:

a) $k_s = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$; b) $k_s = k_1 - k_2$; c) $k_s = k_1 + k_2$; d) $k_s = \frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

3. Defazajul vitezei de oscilație față de accelerația de oscilație a oscilatorului liniar armonic (vezi [18]) este:

a) $\Delta\varphi = 0$; b) $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$; c) $\Delta\varphi = \pi$; d) $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

4. Defazajul vitezei de oscilație față de elongația oscilatorului liniar armonic (vezi [19]) este:

a) $\Delta\varphi = 0$; b) $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$; c) $\Delta\varphi = \pi$; d) $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

5. La ce distanță de capătul liber trebuie înlocuit corpul unui pendul elastic cu un corp cu masă dublă față de cea inițială, pentru ca noul pendul elastic să oscileze cu aceeași perioadă?

a) $x = l/2$; b) $x = l/3$; c) $x = l/4$; d) $x = l/6$.

6. Un pendul matematic de lungime l_0 are perioada T_0 la temperatura $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Dacă temperatura mediului exterior devine t , atunci perioada devine:

a) $T = T_0 \sqrt{1 + \alpha t}$; b) $T = T_0$;
c) $T = T_0(1 + \alpha t)$; d) $T = T_0(1 - \alpha t)$.

7. Un cilindru omogen de lungime l și densitate ρ plutește într-un lichid de densitate ρ_0 . Perioada micilor oscilații verticale este:

a) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$; b) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l\rho_0}{\rho g}}$; c) $T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho l}{\rho_0 g}}$; d) $T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$.

Răspunsuri:

1. d. 2. a. 3. b. 4. b. 5. a. 6. a. 7. c.



1.3. UNDE MECANICE

1.3.1. Propagarea unei perturbații într-un mediu elastic. Transferul de energie

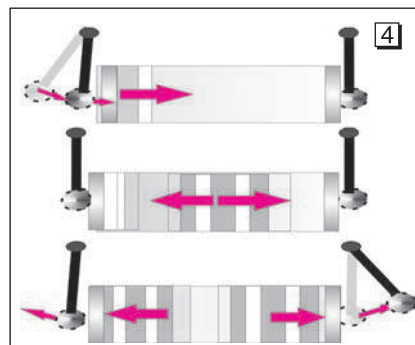
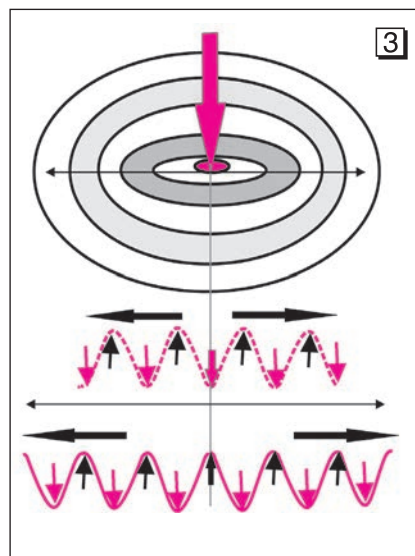
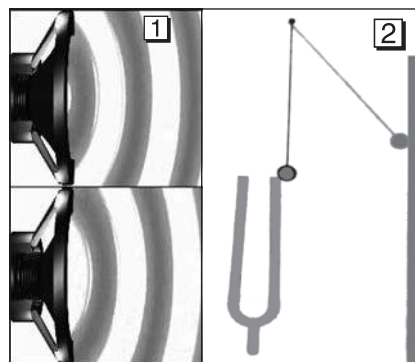
Fenomene ondulatorii întâlnite în natură și în tehnică

Deplasarea corpurilor sau a particulelor din poziția de echilibru este considerată **perturbație**. Vibrațiile membranei unui difuzor modifică presiunea aerului din imediata vecinătate (vezi [1]). Aceste variații periodice ale presiunii se propagă până la un receptor (ureche, microfon) aflat la distanță de sursa de vibrații. Zgomotul produs la explozia unui obuz este generat de creșterea bruscă a presiunii în locul unde aceasta s-a produs. În punctele situate la distanțe din ce în ce mai mari, se pot măsura cu anumite instrumente sau sesiza auditiv diferențe de presiune mai mici. Dacă în fruntea unei coloane lungi care defilează se află o fanfară, se observă că sportivii din spatele coloanei bat pasul de defilare cu întârziere față de cei aflați aproape de fanfară. Aceasta semnifică faptul că propagarea sunetului produs de tobă depinde de distanța până la receptorul auditiv al fiecărui sportiv.

Vibrațiile brațului unui diapazon sau ale unei corzi de chitară, care emit sunete după ce sunt lovite sau ciupite, pot provoca oscilațiile unui pendul realizat dintr-o bobită de polistiren expandat, atârnată de un fir (vezi [2]). O piatră care cade în apă produce o perturbație care se deplasează sub forma unor valuri mici (vezi [3]). Acestea pot pune temporar într-o mișcare de oscilație, pe verticală (ridicare și coborâre față de poziția de repaus), corpurile care plutesc pe apă (de exemplu, dopuri de plută). Perturbația înaintează pe orizontală, dar corpurile rămân pe loc.

Transferul de energie într-un fenomen ondulatoriu

Din legea lui Pascal, ne amintim că variația de presiune produsă asupra unui lichid închis într-un recipient se transmite în fiecare punct al lichidului cu aceeași intensitate. Comprimarea produsă de deplasarea unui piston (dop) într-un tub cu lichid se transmite din aproape în aproape asupra altui piston (dop), care închide celălalt capăt al tubului. Dacă pistoanele închid aerul din tub, vei constata că viteza de propagare a perturbației este mai mică în aer (vezi [4]).





Prin medii disipative, numai o parte din energia sursei ajunge în punctele de recepție, de la care se transmit variații de presiune mai mici spre alte puncte.

Lovește capătul unei bare cu un ciocan. Comprimarea locală produsă prin lovire este transmisă zonelor vecine, până ajunge la celălalt capăt. Dacă ai plasat bila unui pendul în contact cu bara, atunci bila va fi aruncată pe direcția barei și în sensul de propagare a perturbației. Rezultă că vibrația produsă în urma impactului se propagă de-a lungul tubului sau barei (prin comprimări urmate de destinderi) și în fluide, și în solide.

Procese de propagare a perturbațiilor din aproape în aproape, cu viteză finită printr-un mediu, se numesc **unde**.

Undele elastice reprezintă propagarea perturbațiilor stărilor de echilibru dintr-o zonă în altă zonă a unui mediu cu proprietăți elastice (vezi [5]). Undele transferă energia primită în procesul de perturbare de la un oscilator la altul, fără să se producă și transport de substanță.

Identificarea în practică a diferențelor dintre diverse tipuri de undă

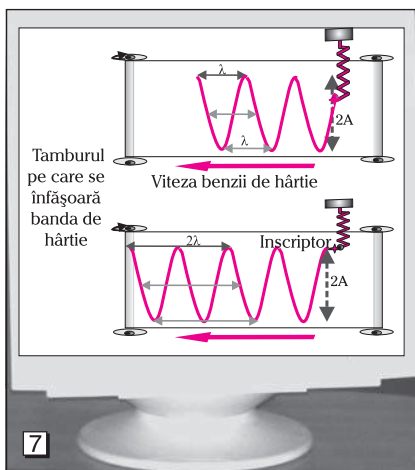
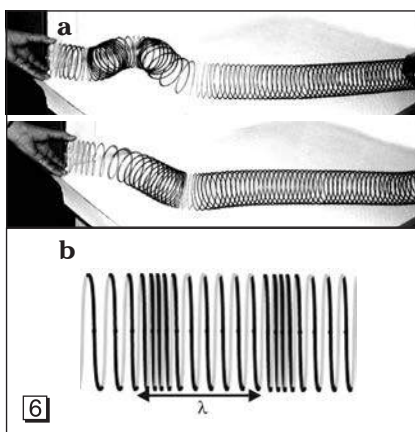
Scutură periodic sau lovește transversal capătul unei frânghii, al unui furtun subțire din cauciuc sau al unui resort elastic prins de un corp (vezi [6]a). Vei observa că perturbația se propagă cu viteze care depind de tensionarea materialului, adică de forța de întindere a acestuia.

Dacă folosești un resort elastic așezat pe o suprafață lucioasă orizontală, comprimă periodic câteva spire la capătul prins de mâna ta. Comprimările urmate de destinderi ale oscilatoarelor (spirelor) se propagă spre capătul celălalt, fixat de un corp solid (vezi [6]b). Fiecare spirală oscilează pe direcția de mișcare, considerată față de pozițiile de echilibru.

Dacă un inscripător oscilează armonic pe direcție verticală, în fața unei benzi de hârtie care se înfășoară cu viteză constantă pe un cilindru rotitor și, respectiv, se desfășoară de pe alt cilindru paralel, se obține înregistrarea grafică a mișcării ondulatorii (vezi [7]). Creștele și adânciturile sinusoidei reprezintă zonele cu densitate maximă de spire și, respectiv, zonele cu densitate minimă de spire în cursul propagării lor.

Sunetele sunt generate de vibrațiile unor corpuri numite **surse sonore**.

Moleculele din straturile învecinate primesc o parte din energia sursei sonore și o transmit din aproape în aproape altor straturi de molecule, deci transferă faza de mișcare oscilatorie (comprimarea sau destinderea periodică).



Așa se produc undele elastice longitudinale care se propagă prin medii cu proprietăți elastice. Viteza de propagare a fazei (de comprimare sau destindere a) unei depinde de natura mediului elastic. **Vom nota** viteza fazei $V_f = V$.

În **undele longitudinale**, particulele mediului elastic oscilează pe direcția de propagare a acestora (vezi **6b**).

Frecvența ν recepționată de ureche reprezintă numărul perechilor de comprimări-destinderi succesive în timp de o secundă.

Lungimea de undă λ reprezintă distanța parcursă de o undă cu viteza V în timp de o perioadă sau distanța dintre două comprimări ori destinderi succesive.

Lungimea de undă se măsoară în metri. Deoarece faza acestor perturbații se deplasează cu viteza V , înlocuindu-se periodic comprimările sau destinderile succesive unele cu

alte, rezultă $\lambda = VT = \frac{V}{\nu}$. Știm că sunetele se propagă prin

apă și prin metale mai repede decât prin aer, deoarece distanțele intermoleculare sunt mult mai mici decât în aer.

Modulul de elasticitate E și densitatea ρ a mediului elastic prin care se propagă undele elastice longitudinale determină viteza de propagare a acestora în solidele ideale (care nu se deformează transversal atunci când sunt tensionate longitudinal): $V_{long} = \sqrt{E/\rho}$.

După trecerea unei perturbații printr-un mediu, acesta revine la configurația inițială.

În **undele transversale**, particulele mediului elastic oscilează pe direcții perpendiculare pe direcția de propagare a acestora (vezi **6a**).

În solide, perturbațiile se pot transmite și prin unde transversale, care sunt ridicări sau coborâri ale punctelor materiale față de direcția de propagare, ca într-o coardă

elastică având viteza de fază $V_{transv} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$,

unde F — forța de tensiune, μ — densitatea liniară (masa unității de lungime).

Substanța	Viteza de propagare a undelor longitudinale (m/s)
granit	5600
fier	5100
sticlă	5000
alcool	1170
apă	1500
petrol	200
aer	340
hidrogen	1260
(condiții normale)	

Undele sonore sunt unde elastice produse de vibrațiile corpurilor cu frecvențe sesizate de urechea umană, în intervalul de frecvențe de la 16 Hz la 20 000 Hz.

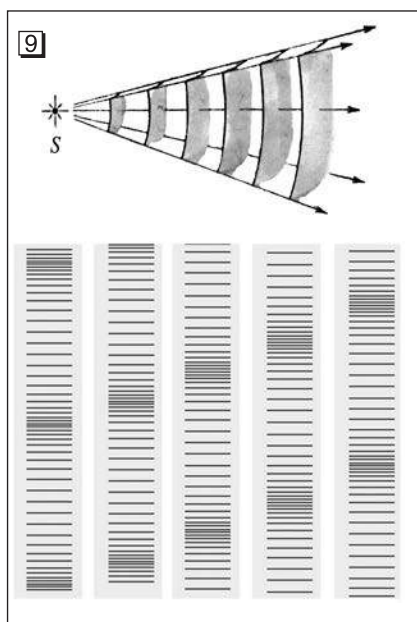
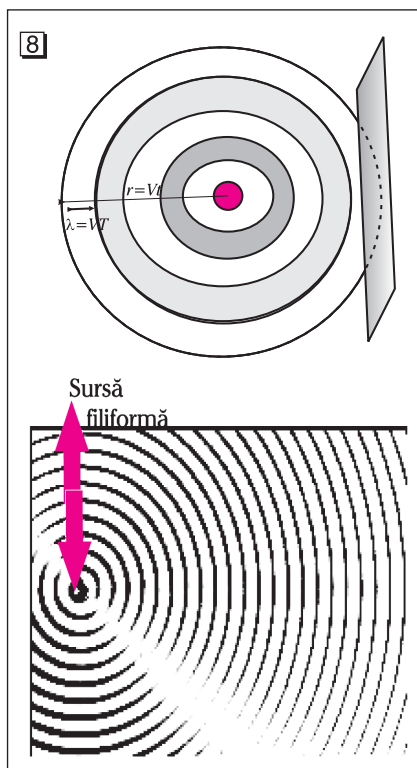
Efectele produse de undele elastice asupra receptoarelor, plasate la distanță față de locul unde s-a produs inițial perturbația elastică, pot fi:

— vibrații ale membranei timpanelor urechii, provocate de variații de presiune; acestea sunt convertite în biocurenți, care ajung prin nervii auditivi la creier;

— vibrații ale membranelor microfoanelor; acestea sunt convertite în semnale electrice care ajung la un amplificator cuplat la difuzoare sau pot fi transmise prin cablu telefonic;

— distrugerii ale membranelor sau ale unor obiecte care intră în vibrație; unda de șoc produsă de avioanele supersonice, care au viteze $V > 340$ m/s, poate sparge obiecte și poate provoca senzația de durere în urechi.

1.3.2. *Modelul „undă plană”. Periodicitatea spațială și temporală



Comprimările și decompimările se propagă, într-un mediu nedisipativ, cu amplitudini egale.

*Modelarea propagării unei perturbații într-un mediu elastic

Suprafețele de undă sunt suprafețele care conțin punctele — egal depărtate de sursa oscilațiilor — care oscilează în fază (au amplitudinile maxime, minime, nule sau intermediare în aceleași momente de timp).

În medii omogene și izotrope, suprafețele de undă se concretizează în sfere concentrice ($r = Vt = \text{const.}$) pentru surse punctiforme sau cilindri concentrici pentru surse filiforme, care devin practic plane la distanțe mari față de surse. În intersecția cu un plan, cercurile cu rază mare se aproximează cu drepte (vezi [8]). Lungimea de undă λ reprezintă distanța străbătută de o suprafață de undă într-un interval de timp egal cu perioada de oscilație T a sursei de perturbații, cu viteza de propagare V a fazei undei progresive în mediul considerat ($\lambda = VT$). Rezultă că, față de o suprafață de undă considerată la un moment dat, mărimile oscilante au aceeași fază de oscilație pe suprafețele de undă situate la o distanță egală cu o lungime de undă sau cu un număr întreg de lungimi de undă.

Frontul de undă reprezintă locul geometric al punctelor celor mai depărtate de o sursă de unde, atinse la un moment dat de acestea, care reproduc perturbația inițială oscilând în fază.

Vom reprezenta grafic suprafețele de undă echifază cu frontul de undă la distanțe egale cu lungimea de undă λ . Prin suprafețele de undă plane, densitatea de energie rămâne constantă dacă mediul este considerat nedisipativ și omogen. Energia emisă de sursă într-o perioadă este cuprinsă între două suprafețe de undă consecutive distanțate cu o lungime de undă λ . Direcția de propagare a undei plane este normală pe suprafețele de undă (vezi [9]).

Ecuția undei plane

Scriem ecuația elongației mișcării oscilatorii pentru punctele din sursa undelor plane, $y_s = A \sin \omega t$, și pentru alte puncte situate la distanța x față de sursă, care vor începe să oscileze mai târziu, $y_p = A \sin \omega t'$, unde t și t' sunt timpii cronometrați, de doi observatori imaginari, din momentul începerii oscilațiilor din poziția de repaus ($y_0 = 0$).

Perturbația s-a propagat, cu viteza $V_{fază}$, în intervalul de timp:

$$\Delta t = t - t' = \frac{x}{V}, \text{ deci } t' = t - \frac{x}{V}.$$

Relația spațio-temporală care descrie mișcarea punctului perturbat de undă, în funcție de timpul de oscilație al sursei considerate, este:

$$u(x, t) = y_p = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{V} \right) = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi x}{VT} \right);$$

$$u(x, t) = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right), \text{ unde } \lambda = VT, \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Această expresie care descrie propagarea stării de mișcare într-un mediu elastic este numită **ecuația undei plane**, deoarece suprafețele de undă sunt plane.

Ecuația undei plane descrie:

- *periodicitatea mișcării în spațiu;*

Două puncte de pe direcția propagării undei, de coordonate x_1 și x_2 , vor oscila în fază dacă ating simultan valorile maxime, minime sau nule, adică argumentele funcției sinus diferă prin $2n\pi$ pentru un moment de timp t , deci dacă:

$$\Delta\phi = 2\pi \cdot \frac{\Delta x}{\lambda} = 2n\pi \Rightarrow \Delta x = n\lambda.$$

Rezultă că punctele care oscilează în fază sunt depărtate printr-un multiplu întreg de lungimi de undă (vezi [10]).

- *periodicitatea mișcării în spațiu și timp.*

Valorile elongației se repetă periodic în timp la momentele $t + nT$, în orice punct situat la distanța x de sursă, pus în oscilație de o **undă plană progresivă**:

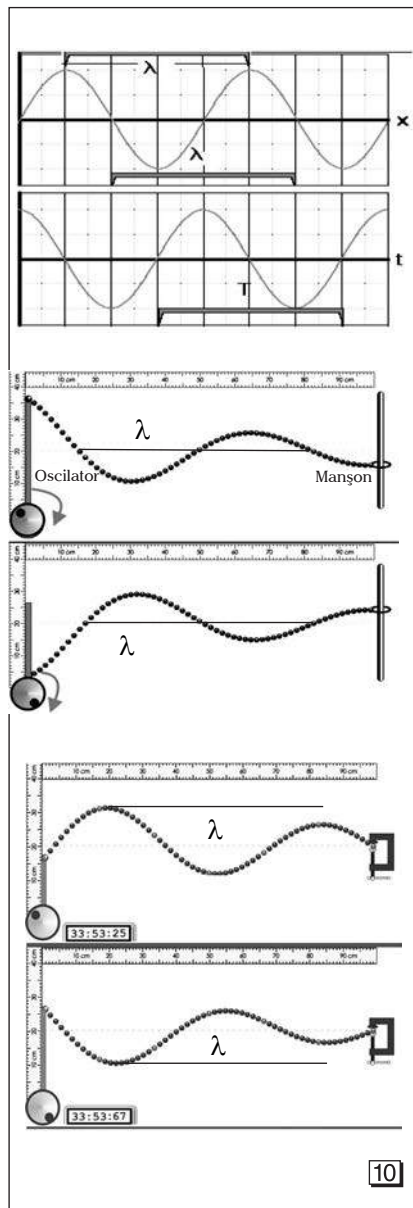
$$u = A \sin \left[\omega(t + nT) - 2\pi \cdot \frac{x}{\lambda} \right] = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) = A \sin(\omega t - \phi_0),$$

$$\text{deoarece } \omega nT = \frac{2\pi}{T} \cdot nT = 2n\pi,$$

unde $\phi_0 = 2\pi \cdot \frac{x}{\lambda}$ are semnificația unei faze inițiale.

Din relațiile trigonometrice, rezultă că mișcarea se repetă periodic. Notăm $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ (număr de undă) și scriem ecuația undei plane sub forma:

$$u = A \sin(\omega t - Kx).$$



Punctele care oscilează în fază au simultan valorile maxime, minime sau nule și sunt depărtate printr-un multiplu întreg de lungimi de undă și într-un mediu disipativ. Ecuația undei pentru propagarea perturbației într-un mediu disipativ se scrie:

$$u = A_0 e^{-\alpha t} \sin \left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda} \right),$$

unde A_0 – amplitudinea inițială; α – coeficientul de atenuare, care depinde de natura mediului și de frecvența undelor.

Probleme rezolvate

1. Ce defazaje corespund unui sfert de perioadă într-un punct și, respectiv, unei semiunde între două puncte la un moment dat (vezi [11] a)? Pentru frecvența $\hat{\nu} = 1\,000\text{ Hz}$, ce valoare are lungimea de undă a sunetului care se propagă în aer cu viteza de 340 m/s ?

Rezolvare:

Defazajele corespunzătoare sunt $\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$ și, respectiv, $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$. Lungimea de undă este $\lambda = \frac{V}{\hat{\nu}} = 0,34\text{ m}$.

2. Propagarea undelor este însoțită de un transfer de energie. Exprimă energia de oscilație W pentru cele N particule din volumul paralelipipedic $Vol = Sl = SVt$ și intensitatea $I = \frac{W}{St}$ pe direcția de propagare a undei.

Rezolvare:

Energia de oscilație a fiecărei particule de masă m_1 este:

$$W_1 = m_1 \omega^2 A^2 / 2,$$

iar pentru toate cele N particule din volumul Vol considerat este:

$$W = M \omega^2 A^2 / 2,$$

unde $M = Nm_1$ și $\rho = \frac{m}{Vol}$.

Amplificăm fracția cu V/V și obținem:

$$I = \frac{VW}{SVt} = \frac{VW}{Vol},$$

$$\text{deci } I = \frac{M \omega^2 A^2 V}{2Vol} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 V.$$

3. Considerăm ecuațiile a două unde plane de aceeași frecvență:

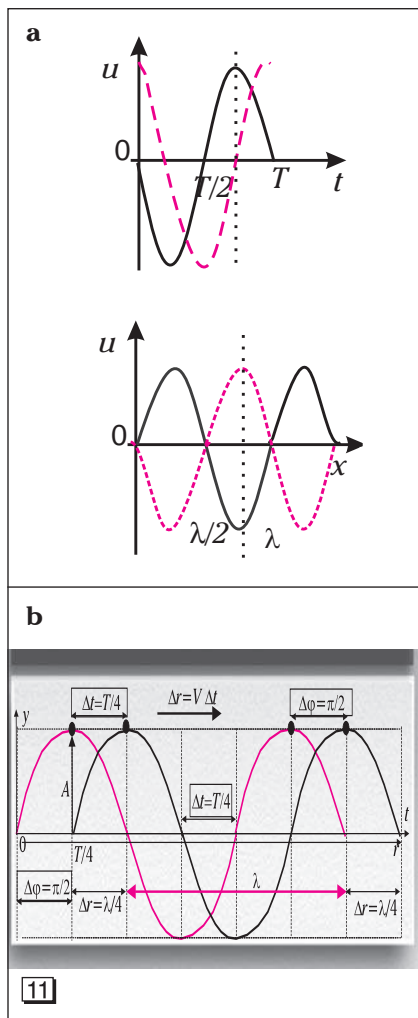
$$y_1 = A_1 \sin\left(\omega t - 2\pi \cdot \frac{r_1}{\lambda}\right) \quad \text{și} \quad y_2 = A_2 \sin\left(\omega t - 2\pi \cdot \frac{r_2}{\lambda}\right).$$

Dacă diferența de drum este $\Delta r = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$, ce valoare are diferența de fază, $\Delta\varphi$?

Rezolvare:

Deoarece diferența de drum Δr este direct proporțională cu diferența de fază $\Delta\varphi$, conform relației $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda}$, înlocuim și obținem $\Delta\varphi = \frac{(2n+1)\pi}{2}$.

Dacă $r = \frac{\lambda}{4}$, atunci $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ (vezi [11] b).



***Probleme cu grad ridicat de dificultate (pentru curioși)**

1. O perturbație transversală produsă într-o coardă elastică parcurge mici porțiuni, de lungime Δl , cu viteza V_{transv} . Masa porțiunii Δl este $m = \mu \Delta l$, unde $\mu = \rho_{liniară}$ este densitatea liniară a corzii. Găsește expresia vitezei de propagare a undelor elastice transversale.

Rezolvare:

Să presupunem o coardă de densitate liniară ρ_l supusă unei tensiuni F . Să mai presupunem că asupra corzii acționează o forță constantă F'_y , aplicată transversal în capătul din stânga (vezi [12]).

După un timp t , toate punctele aflate în stânga punctului P se mișcă cu viteza v' , în timp ce punctele aflate la dreapta sunt încă în repaus. Perturbația se propagă cu viteza v_{tr} către porțiunea

aflată în repaus. Din asemănarea triunghiurilor, rezultă: $\frac{F'_y}{F} = \frac{v'}{V_{transv}}$.

Impulsul forței transversale este: $F'_y t = F \cdot \frac{v'}{V_{transv}} \cdot t$, iar masa porțiunii liniare în mișcare este $m = \rho_l V_{tr} t$.

Aplicăm teorema impulsului: $F \cdot \frac{v'}{V_{transv}} \cdot t = \rho_l V_{transv} t v'$.

Rezultă $V_{transv} = \sqrt{F / \rho_l}$, unde $\rho_l = \mu$.

2. Considerăm că asupra unei porțiuni de lungime l și arie S dintr-un corp solid elastic cu densitatea volumică ρ_0 , acționează o forță exterioară F , într-un interval de timp Δt . Efortul unitar F/S este proporțional cu deformația relativă $\Delta l/l$

suferită, unde $\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$, iar E este modulul de elasticitate

Young. Găsește expresia vitezei de propagare a undelor elastice longitudinale.

Rezolvare:

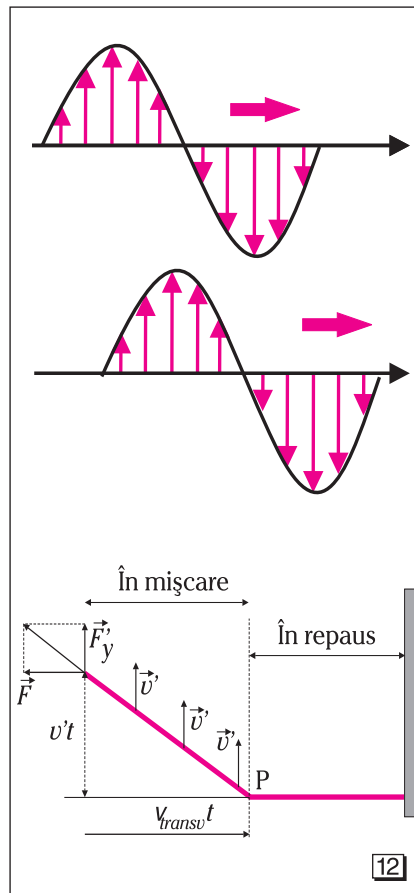
Deoarece $\Delta l = v \Delta t$, unde v este viteza de oscilație a unui element de volum în jurul unei poziții de echilibru, iar $l = V_{long} \Delta t$, unde V_{long} este viteza longitudinală de propagare a perturbației din aproape în aproape, rezultă

$$F = ES \Delta l / l = ES v / V_{long}.$$

Știm că $m = \rho_0 V = \rho_0 S l$, iar $F \Delta t = m v$, deci $\rho_0 S l v / \Delta t = ES v / V_{long}$, unde ρ_0 este densitatea volumică.

Făcând înlocuirea $l / \Delta t = V_{long}$, obținem $\rho_0 S v V_{long} = ES v / V_{long}$. Rezultă viteza de propagare longitudinală a perturbației:

$$V_{long} = \sqrt{E / \rho_0}.$$



Reține formulele pentru calcularea vitezelor de propagare a undelor elastice:

• transversale: $V_{transv} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$;

• longitudinale: $V_{long} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.



Teste pentru autoevaluare

*Testul 1

Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.

- Amplitudinea unei unde (vezi [13]) este egală cu distanța dintre punctele:
 - O și B;
 - B și C;
 - O și P;
 - C și M.
- Lungimea de undă este egală cu distanța dintre punctele:
 - O și B;
 - B și C;
 - O și P;
 - C și M.
- Găsește expresia corectă a ecuației unei unde plane într-un mediu omogen și izotrop:
 - $y = A \sin 2(t/T + x/v)$;
 - $y = A \sin 2(t/T - x/v)$;
 - $y = A \sin 2\pi(t/T - x/\lambda)$;
 - $y = A \sin (2/T - 2x/v)$.
- Două surse oscilează într-un mediu elastic conform ecuațiilor: $y_1 = 10 \sin 100\pi t$ [mm] și $y_2 = 2,5 \sin 100\pi t$ [mm]. Să se determine amplitudinea oscilației rezultante într-un punct în care diferența între drumul parcurs de cele două unde este $\Delta x = 10$ m, dacă viteza de propagare a undelor este $V = 500$ m/s.
- Limitele frecvențelor sunetelor detectate de urechea umană sunt cuprinse între 20 Hz și 20 000 Hz. Care sunt limitele lungimilor de undă, dacă $V = 340$ m/s?
- O coardă cu diametrul $d = 4$ mm este întinsă cu o forță $F = 200$ N. Calculează viteza de propagare a undelor transversale produse în coardă cu densitatea $\rho = 800$ kg/m³.

Răspunsuri:

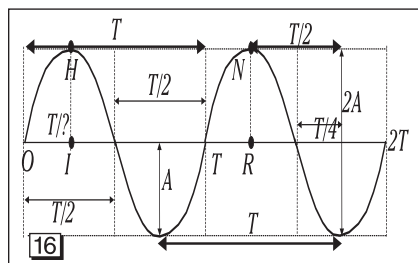
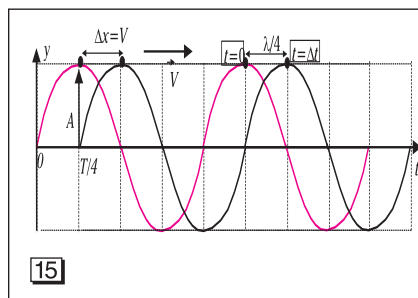
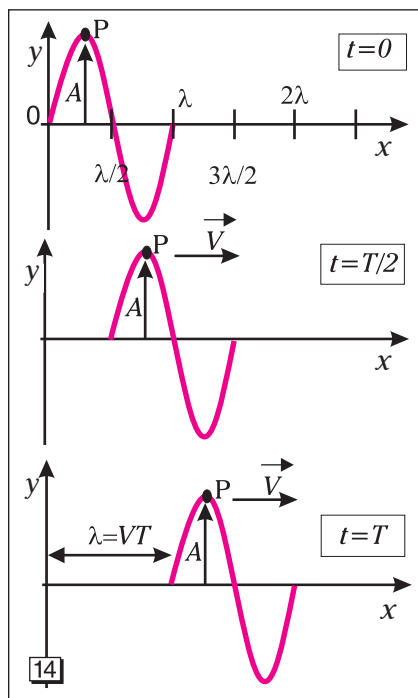
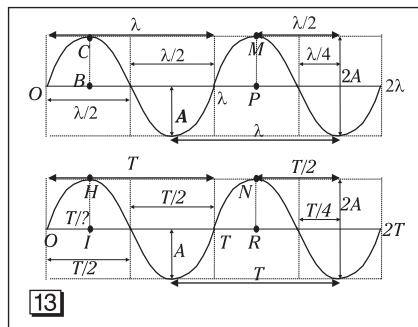
1. b. 2. d. 3. c. 4. A = 12,5 mm. 5. $\lambda_{\min} = 17$ mm; $\lambda_{\max} = 17$ m.
6. $V_{tr} = 44,6$ m/s.

Testul 2

- În lungul unui fir, se propagă o undă transversală cu viteza $V = 100$ m/s. Dacă amplitudinea oscilațiilor este $A = 1$ cm și frecvența $\nu = 500$ Hz, să se determine diferența de fază dintre două puncte ale firului situate la distanțele $\Delta x = 0,1$ m și, respectiv, $\Delta x = \lambda$ (vezi [14]).
- Dacă o coardă vibrează cu o anumită frecvență, de câte ori trebuie mărită tensiunea din coardă ca aceasta să vibreze cu frecvență dublă pentru aceeași lungime de undă?
- Ce valori au mărimile Δt și Δx din reprezentarea grafică din figura [15]?
- Amplitudinea unei unde din figura [16] este egală cu distanța dintre punctele:
 - O și I;
 - I și H;
 - O și R;
 - I și R.
- Perioada unei unde din figura [16] este egală cu distanța dintre punctele:
 - O și I;
 - I și H;
 - O și R;
 - I și R.

Răspunsuri:

1. $\Delta\varphi = \pi, 2\pi$. 2. $F_2 = 4F_1$. 3. $\Delta t = T/4$; $\Delta x = \lambda/4$. 4. b. 5. d.



1.3.3. Reflexia și refracția undelor mecanice

Ecolul este unda sonoră care, reflectată pe o suprafață, ajunge într-un punct unde poate fi percepută distinct față de unda directă după un interval de timp $\Delta t \geq 0,1 \text{ s}$.

Pe suprafața plană a apei se propagă perturbații circulare (unde circulare de natură neelastică) și după ce piatra care a produs perturbația inițială intră în apă. Fizicianul olandez Cristian Huygens (1629-1695) a tras concluzia că perturbația inițială pe care o produce piatra pe suprafața apei este cauza formării undelor care se propagă la distanță.

La suprafața de separare dintre două medii cu proprietăți elastice diferite se produce schimbarea direcției de propagare a undei, o parte a energiei întorcându-se prin reflexie în mediul din care provine perturbația, cealaltă parte a energiei (partea transmisă) trecând în celălalt mediu prin refracție.

Experimental, se constată că la capătul unei corzi sau al unui resort prins lejer pe o tijă printr-un inel, ultimul oscilator oscilează ca și cele precedente, astfel că după reflexia perturbației acestea sunt deviate iarăși în același sens (vezi **17a**). În acest caz, spunem că perturbația este reflectată cu aceeași fază.

Dacă se fixează capătul de un mediu mai rigid, ultimul oscilator nu poate participa la mișcare și, după reflexie, celelalte oscilatoare încep să oscileze prin fața celui fix în sens contrar. Deci, la capătul fix perturbația suferă un salt de fază de π radiani. Această reflexie se mai numește și **reflexie cu pierdere de semiundă**, adică de $\lambda/2$ (vezi **17b**).

Se poate face un studiu experimental pe modelul resortului elastic.

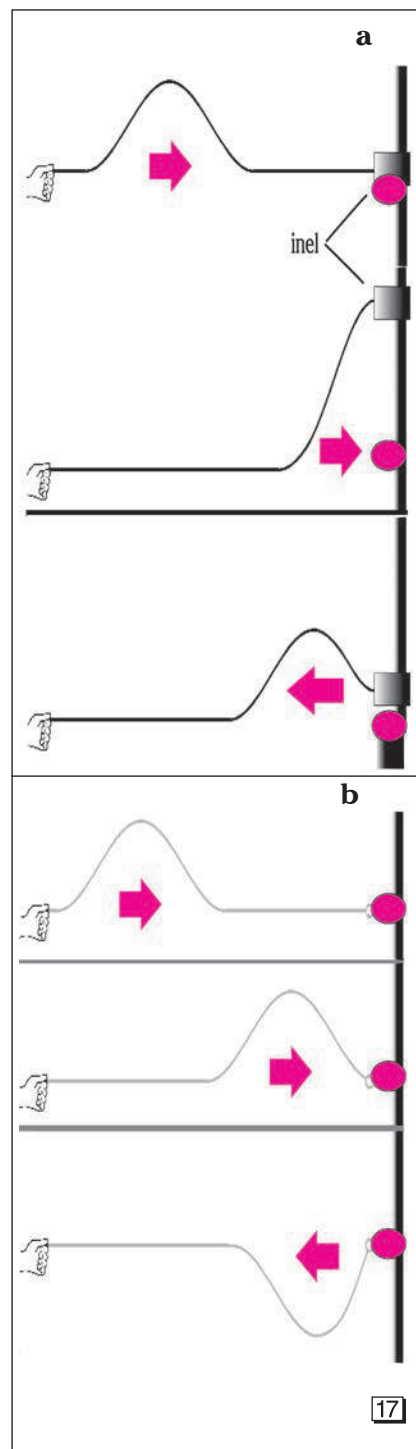
Undele sonore care se propagă prin atmosferă suferă refracții datorită faptului că străbat straturi ale mediului în care viteza sunetului variază odată cu temperatura și cu presiunea aerului din atmosferă.

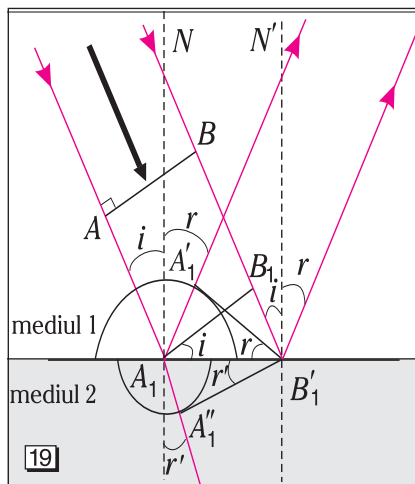
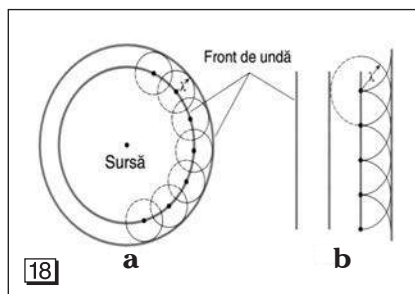
Reține!

Reflexia cu pierdere de semiundă și cu schimbare de fază cu π radiani are loc la suprafața de separare dintre un mediu elastic și un mediu mai rigid.

Principiul lui Huygens

Fiecare punct dintr-un front de undă poate fi considerat sursa undelor sferice secundare care se propagă în toate direcțiile cu viteza V_f de propagare a fazei undelor în mediul considerat.





Legile reflexiei

- ☑ Raza incidentă, raza reflectată și normala pe suprafața de separare a celor două medii, în punctul de incidență, sunt coplanare.
- ☑ Unghiul de incidență, format de raza incidentă cu normala, este egal cu unghiul de reflexie, format de raza reflectată cu normala $\hat{i} = \hat{r}$.

Legile refracției

- ☑ Raza incidentă, raza refractată și normala la suprafața de separare dintre cele două medii sunt coplanare.
- ☑ Raportul dintre sinusul unghiului de incidență (dintre raza incidentă și normală) și sinusul unghiului de refracție (dintre raza refractată și normală) este egal cu raportul vitezelor de propagare a luminii în mediul 1 și în mediul 2, adică:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V_1}{V_2}.$$

La orice moment ulterior, noul front de undă, se obține prin construirea înfășurătoarei fronturilor undelor secundare, adică a suprafeței tangente la undele secundare construite (vezi [18]). Punctele care intră în oscilație devin surse ale unor unde elementare (sferice în spațiu și, respectiv, circulare în plan), de rază $r = V_f t$. Vom nota viteza de fază cu $V_f = V$.

Legile reflexiei și refracției undelor

Să găsim legile reflexiei și refracției considerând frontul AB al unei unde plane (vezi [19]). Direcția de propagare, perpendiculară pe frontul de undă, formează cu normala la suprafața de separare dintre cele două medii unghiul de incidență \hat{i} . Vitezele de propagare în cele două medii elastice sunt V_1 și, respectiv, V_2 .

Atunci când o extremitate a frontului de undă ajunge la suprafața de separare dintre cele două medii elastice în punctul A_1 , conform principiului lui Huygens, acesta devine centru de oscilație și sursă a unor noi unde elementare sferice în spațiu și, respectiv, circulare în planul reprezentat. Până când extremitatea cealaltă a frontului de undă ajunge la limita B_1 dintre cele două medii, undele circulare, având ca sursă de perturbație punctul A_1 , vor avea o dezvoltare de rază $R_1 = V_1 t$ în primul mediu, corespunzătoare timpului de propagare a perturbației din B_1 în B'_1 și, respectiv, $R_2 = V_2 t$ în cel de-al doilea mediu.

Ducând înfășurătoarele la undele elementare din cele două medii, vom obține frontul undei reflectate, $A'_1 B'_1$, respectiv frontul undei refractate $A''_1 B'_1$. Direcția de propagare după reflexie, reprezentată de raza reflectată, este perpendiculară pe frontul undei plane reflectate $A'_1 B'_1$. Analog, raza refractată este perpendiculară pe frontul undei refractate.

Din congruența triunghiurilor dreptunghice $A_1 A'_1 B'_1$ și $A_1 B_1 B'_1$ ($A_1 B'_1$ latură comună și $A_1 A'_1 = B_1 B'_1 = V_1 t$), rezultă congruența unghiurilor $\sphericalangle A'_1 A_1 B'_1$ (complementar unghiului de reflexie \hat{r}) și $\sphericalangle B_1 B'_1 A_1$ (complementar unghiului de incidență \hat{i}), deci unghiul de incidență este congruent cu cel de reflexie ($\hat{i} = \hat{r}$).

Unghiurile $\angle B_1A_1B'_1$ și $\angle A'_1B'_1A_1$ sunt congruente cu unghiul de incidență, având laturile perpendiculare, deci:

$\sin r = \sin i = \frac{A_1A'_1}{A_1B'_1}$. Analog, unghiul $\angle A_1B'_1A''_1$ este congruent

cu unghiul de refracție \hat{r}' , deoarece au laturile respectiv perpendiculare, deci $\sin r' = \frac{A_1A''_1}{A_1B'_1}$.

Din raportul celor două relații obținem **legea refracției**:

$$\frac{\sin i}{\sin r'} = \frac{A_1A'_1}{A_1A''_1} = \frac{V_1 t}{V_2 t} = \frac{V_1}{V_2} = n_{21}.$$

Raportul $\frac{V_1}{V_2} = n_{21}$ se numește **indicele de refracție al**

mediului 2 față de mediul 1.

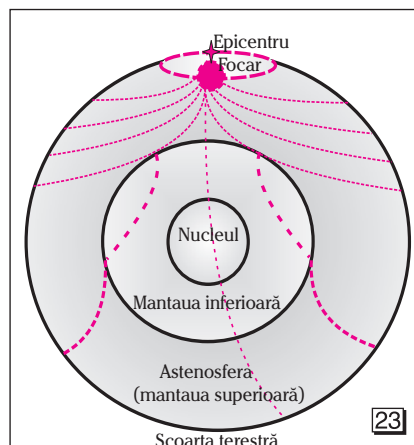
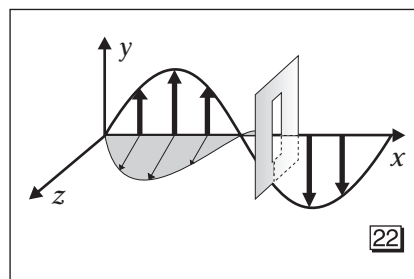
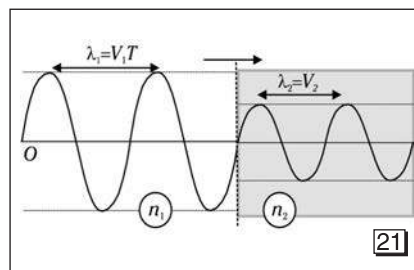
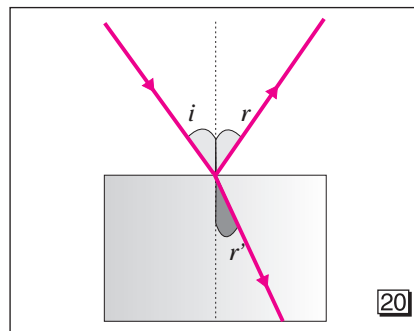
Dacă unda trece într-un mediu în care viteza de propagare este mai mare decât în primul mediu, atunci unghiul de refracție poate avea valoarea maximă de 90° pentru o anumită valoare a unghiului de incidență, numit unghi limită. Pentru unghiuri de incidență mai mari decât unghiul limită, undele nu mai pătrund în al doilea mediu și spunem că se produce fenomenul de **reflexie totală**.

Raza (direcția de propagare a) unei incidente este coplanară cu raza undei reflectate și cu raza refractată (vezi [20]). Prin reflexie și refracție nu se modifică perioada, frecvența sau pulsația. Prin refracție se modifică lungimea de undă, deoarece viteza de propagare a undelor este diferită în cele două medii, chiar și la incidență normală (vezi [21]).

Undele transversale dintr-o coardă sunt polarizabile, adică pot trece parțial sau total printr-o fantă dreptunghiulară (vezi [22]). Componenta perpendiculară pe direcția fantei se reflectă, iar componenta paralelă cu fanta va trece. Undele longitudinale nu se polarizează.

Reflexia și absorbția sunetelor are importanță în sălile de spectacol. Hainele și draperiile pufoase absorb sunetele înainte de a fi reflectate de pereții unei săli de spectacole.

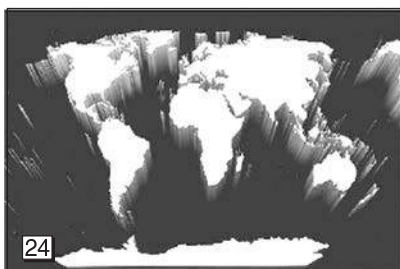
La suprafețele de discontinuitate dintre diferite straturi, cu proprietăți diferite, se produc fenomene de reflexie și refracție a undelor seismice (vezi [23]).



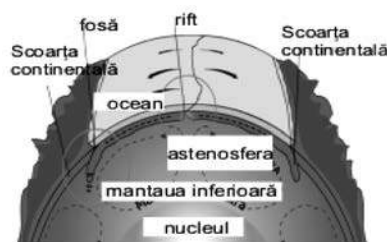
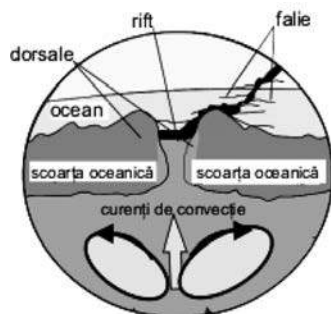
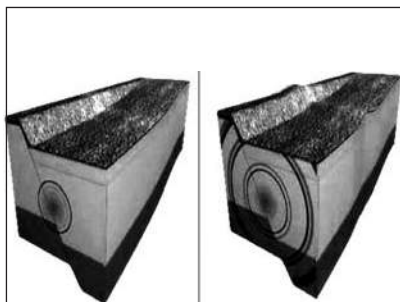
Reține expresia legii refracției:

$$\frac{\sin i}{\sin r'} = \frac{A_1A'_1}{A_1A''_1} = \frac{V_1 t}{V_2 t} = \frac{V_1}{V_2} = n_{21} \text{ sau } \frac{\sin i}{\sin r'} = \frac{V_1}{V_2}.$$

1.3.4. Unde seismice



Scoarța Pământului este formată din 6 macroplăci



25

Seismologia se ocupă cu studiul cutremurelor și al undelor care se propagă prin Pământ. Cutremurele pot avea cauze interne (vulcanice, tectonice) sau, mai rar, cauze externe (meteoriți, comete). Cercetările au pus în evidență o deplasare a plăcilor scoarței terestre cu viteze de 4-12 cm/an (vezi [24]).

Fenomenul seismic are un caracter natural.

Conform teoriei tectonicii plăcilor, multe dintre cutremure se produc în zonele de contact între două plăci, dintre care una subduce (intră sub cealaltă). Deformarea plăcilor litosferice provoacă tensiuni care se acumulează până la limita de fracturare a rocilor (vezi [25]). Poți modela mișcarea plăcilor tectonice și tensionarea lor prin mișcarea relativă a mâinilor uscate și degresate, una față de cealaltă.

Materia din astenosferă se mișcă în celule de convecție. Mișcările seismice din România sunt provocate de plăcile eurasiatice și de microplaca Mării Negre, care tinde să ajungă în astenosferă pe sub rădăcinile Carpaților.

Datorită rezistenței opuse la înaintarea relativă, se acumulează energie până când este eliberată în condițiile producerii unui seism (ruptură bruscă majoră când tensiunea mecanică depășește frecarea dintre două flancuri, se produce un șoc inițial, urmat de fragmentări).

Fracturile provoacă modificări bruște ale tensiunilor în locul de fracturare, numit **focar**.

Undele elastice generate în focarele seismice se propagă prin Pământ în toate direcțiile (evident, nu la fel).

Proiecția zonei focarului, situat la adâncimi de 5-700 km, pe suprafața terestră delimitează **zona epicentrală**. Efectele distructive la suprafața solului apar până la zeci de kilometri, în funcție de energia eliberată în focar.

Amplitudinile deplasărilor și accelerațiile au valori mai mari în straturi afânate, cu pietriș (cu coeziune slabă), în straturi nisipoase sau măloase, față de straturile cu roci tari (calcare, gresii), deci și riscul de distrugereri este mai mare în primul caz.

După frecvență și intensitate, se deosebesc: **cutremure policinetice**, caracterizate printr-o zguduire principală (șoc) și o serie de replici; **cutremure monocinetice**, caracterizate de șocuri slabe precursorare și un singur șoc principal, în care este eliberată o energie foarte mare. Focarele preșocurilor și postșocurilor nu coincid cu focarul șocului principal.

Seismele continentale se produc în zonele vulcanice active și la contactul dintre plăcile litosferei, iar cele marine se produc la contactul dintre plăcile oceanice și pot provoca valuri uriașe, numite „tsunami” (vezi [26]).

Într-un mediu elastic se produc unde de volum:

- ♦ **longitudinale**, care se propagă cu viteze mari de 7-13 km/s, fiind înregistrate primele pe seismograme, notate prin inițiala P;
- ♦ **transversale**, care se propagă cu viteze mai mici de 4-7 km/s, ajung mai târziu în locul de înregistrare, notate prin inițiala S; se propagă numai prin solide.

Cele mai înalte frecvențe ating pragul audibilității (20 Hz), iar amplitudinea lor variază între 10^{-10} m și 10^{-1} m.

Mișcările solului într-o stație seismică sunt înregistrate de trei seismograme așezate pe trei direcții, care formează un triedru ortogonal, două direcții în planul orizontal (de obicei nord-sud și est-vest) și o direcție verticală (vezi [27]).

Amplitudinea perturbațiilor înregistrate este obținută în urma amplificării de către un sistem optic sau mecanic a oscilațiilor pendulelor seismice, care sunt suspendate de un cadru fixat în solul care oscilează seismic. Pe seismograme se marchează timpul. În lipsa perturbațiilor seismice, pe hârtia seismogramei, antrenată într-o mișcare uniformă de un sistem de ceasornic, se înregistrează o linie dreaptă sau sinuoasă, cu amplitudini foarte mici, datorită trepidațiilor locale (microseisme).

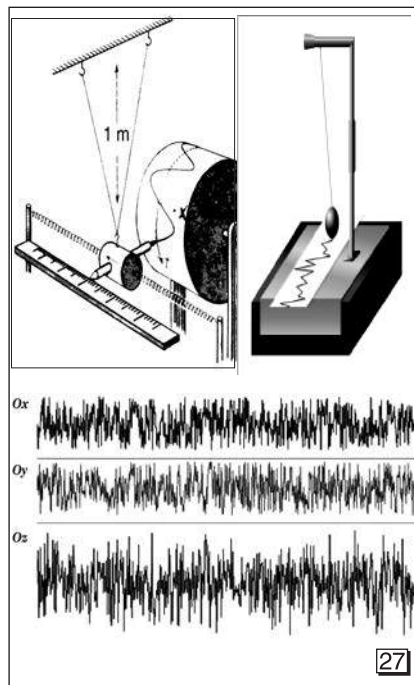
Cutremurele se asociază și cu fenomene luminoase, zgomote subterane și procese tectonice. Fenomenele luminoase sunt dependente de variația stării de ionizare a aerului, determinate de emisiile radioactive a Pământului în atmosferă și însoțite de variația stării de electrizare între scoarță și atmosferă.

Zgomotele se datorează frecărilor și fisurării rocilor din scoarță, urmate de reasezări ale diferitelor straturi.

Procese tectonice se manifestă prin: falieri, decroșări, scufundări sau, eventual, ridicări de teren.

Din interferența undelor longitudinale și transversale, ajunse la suprafața Pământului sub un unghi mic față de orizontală, se formează undele de suprafață, numite **unde lungi**, cu simbolul L. Aceste unde au viteza de aproximativ 3,4 km/s și se propagă în pătura superficială a scoarței. La adâncimea de 3 m, intensitatea lor se reduce la 0,3%.

Undele de suprafață sunt cu atât mai distrugătoare cu cât este mai mică distanța epicentrală.

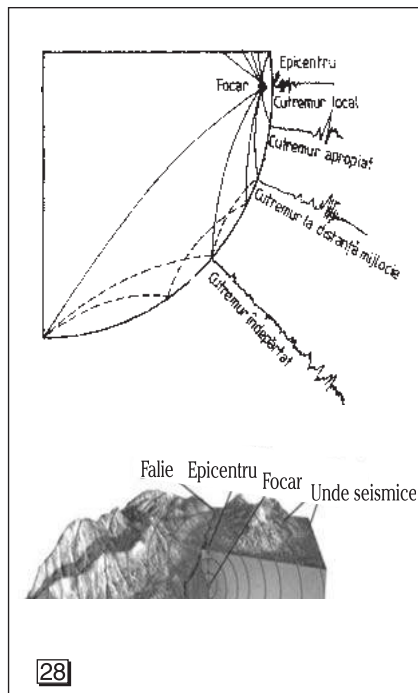


Cu aparatură adecvată, se pot înregistra, la o amplificare corespunzătoare, deplasările, vitezele sau accelerațiile oscilațiilor clădirilor și solului.

Intensitate macroseismică și magnitudine

Din focar, propagarea undelor seismice nu se face în linie dreaptă (vezi [28]). Un cutremur este cu atât mai puternic cu cât provoacă distrugereri mai mari construcțiilor și cu cât modifică mai mult relieful natural prin: prăbușiri de teren, crăpături, modificări ale cursurilor unor râuri sau ale nivelului apelor în fântâni. Pentru descrierea acestor efecte macroseismice și pentru compararea între ele a cutremurelor, s-a convenit să li se atașeze un număr, care să caracterizeze gradul de distrugere cauzat de cutremur într-un anumit loc, denumit **intensitate macroseismică** (I). În prezent, se folosește scara seismică Mercalli de 12 grade, scară adoptată de majoritatea țărilor, care folosește atât observațiile vizuale, cât și înregistrările obiective de tip instrumental, ca elongația, viteza, accelerația de oscilație. Intensitatea macroseismică este dependentă de energia seismului la locul de observație. Deoarece aceluiași cutremur îi corespund mai multe intensități macroseismice, în funcție de locul de observație, se consideră că intensitatea cea mai mare observată descrie cutremurul din punct de vedere energetic. Această intensitate maximă se înregistrează în epicentru numai pentru cutremure cu adâncime mică (5-6 km). Pentru cutremure adânci, maximum de intensitate poate fi la distanțe mari de epicentru, datorită radiației neuniforme de energie din focar, ca la cutremurele vrâncene.

În anul 1949, B. Gutenberg și C. F. Richter au propus o altă scară, care ține seama de magnitudine. **Magnitudinea** M (sau impropriu-zis intensitatea Richter) este o mărime calculabilă numai din înregistrări instrumentale și este definită astfel încât, utilizând înregistrarea oricărei stații seismice de pe glob, valoarea rezultată să fie aceeași.



La suprafețele de discontinuitate dintre diferite straturi, cu proprietăți diferite, se produc fenomene de reflexie și refracție a undelor, apărând mai multe modalități de propagare și, corespunzător, mai multe momente de timp ale înregistrării undelor la diferite stații seismice.

Vitezele de propagare ale undelor cresc cu adâncimea, datorită modificărilor de presiune, densitate și elasticitate, deci traiectoriile undelor sunt curbe cu concavitatea spre suprafața terestră.

Din epicentru se propagă, uneori, unde superficiale vizibile, numite și unde grele, în care particulele materiale ale solului sunt angajate în deplasări de forma valurilor unui lac (San Francisco).

Magnitudinea este măsura energiei declanșate în focar sub formă de unde seismice, prin relația:

$$M = \lg \frac{A}{T} - \lg \frac{A_0}{T_0},$$

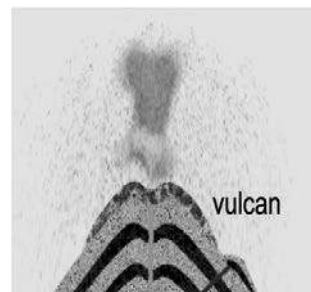
unde A — componenta orizontală a amplitudinii maxime a deplasării solului, iar T — perioada sa; iar A_0 și T_0 au, respectiv, aceleași semnificații, dar corespund unui cutremur etalon (al scării fizice de măsurare).

Intensitatea macroseismică I depinde de energia din punctul de observație, iar magnitudinea M este funcție de energia din focar, deci nu există o relație matematică între ele. Reținem că în timp ce intensitatea macroseismică variază în limitele I-XII, după scara utilizată în prezent, magnitudinea are ca limită superioară valoarea 9, iar limita inferioară este nedefinită, aceasta depinzând de sensibilitatea seismografelor cu care se fac înregistrările.

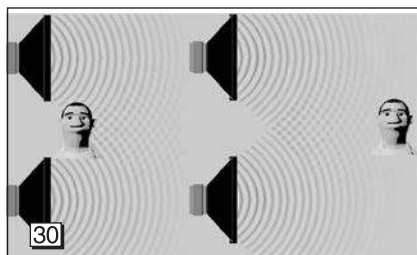
Măsuri de protecție și prevenire în raport cu posibilele efecte ale seismelor

Ce trebuie să știi și să faci înainte de producerea unui seism cu efecte majore?	Ce trebuie să faci când se produce un seism puternic?	Ce trebuie să faci după un seism puternic?
<p>Participă la exercițiile de protecție antiseismică și de verificare periodică din localitate. Este util să cunoști măsurile de protecție și prevenire în raport cu posibilele efecte ale seismelor. Consultă broșurile despre protecția antiseismică în diferite situații.</p> <p>Discută cu membrii familiei și cu prietenii despre protecția antiseismică. Consultă, în măsura posibilităților, un specialist în structuri de rezistență.</p> <p>Este util să fie depozitate într-un loc cunoscut, o rezervă specială de alimente, apă, trusă de prim ajutor, lanternă, radio cu baterii.</p>	<p>Nu intra în panică, nu părăsi sala de curs sau locuința, nu utiliza liftul deoarece durată redusă a fazei seismice inițiale va face ca faza puternică a mișcării seismice să surprindă grupuri de persoane pe scări, în aglomerație și panică. Stai la podea lângă un perete solid, ghemuit pe genunchi și coate, cu fața în jos, la distanță de ferestre care se pot sparge. Există varianta de a sta sub o grindă, toc de ușă solid, birou, masă sau banca din clasă, dacă sunt suficient de rezistente la căderea obiectelor din apropiere, elemente de zidărie sau tencuială. Închide sursele de foc.</p> <p>Dacă te afli într-un mijloc de transport în comun, ascultă recomandările personalului. Dacă te afli într-un loc public, nu alerăa către ieseire deoarece îmbulzeala produce mai multe victime decât cutremurul.</p> <p>Deplasează-te calm spre un loc deschis și sigur, evitând clădirile prea apropiate, deoarece se pot prăbuși tencuieli, cărămizi, coșuri, geamuri etc.</p>	<p>Nu pleca imediat din spațiul în care te afli. Acordă primul ajutor celor răniți. Participă la acțiunile de degajare. Dacă ușile și scările nu pot fi deblocate, bate cu un obiect tare în conducte sau în pereți pentru comunicarea cu cei din exterior. Nu utiliza telefonul decât pentru apeluri scurte la părinți, pompieri, salvare, spre a nu bloca circuitele. Ascultă recomandările oficiale ale posturilor de radioteleviziune. Verifică instalațiile electrice, de gaz și de apă, dar nu folosi chibrituri sau brichete. Verifică vizual starea construcției în interior și drumul spre ieșire. Pot fi șocuri seismice ulterioare (replici).</p>

Producerea unor cutremure cu magnitudine mică nu epuizează energia acumulată în focar (vezi [29]) și deci nu exclude posibilitatea producerii unui cutremur puternic, asemenea cutremure nefiind supape de eliberare a energiei unui cutremur puternic. Totuși, nici producerea unui cutremur puternic nu epuizează întreaga energie, astfel încât să nu mai fie posibile cutremure slabe în acea zonă.

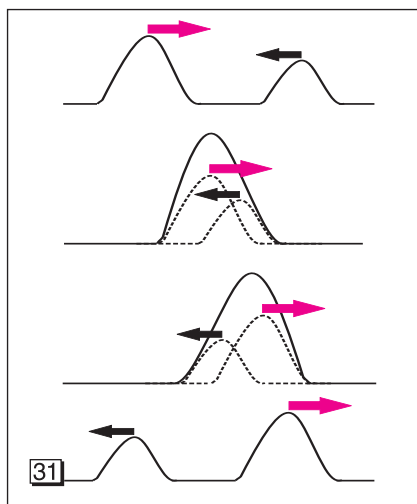


1.3.5. Interferența undelor mecanice. Unde staționare



Atunci când asculți muzică, la fiecare ureche pot ajunge sunetele provenite de la două surse sonore (vezi [30]). Într-un mediu elastic, se pot propaga în același timp mai multe unde progresive, provenite de la surse diferite sau de la aceeași sursă, direct și în urma fenomenului de reflexie.

Fenomenul de suprapunere a două sau mai multe unde care ajung într-un punct al mediului elastic poartă numele de **interferență**.

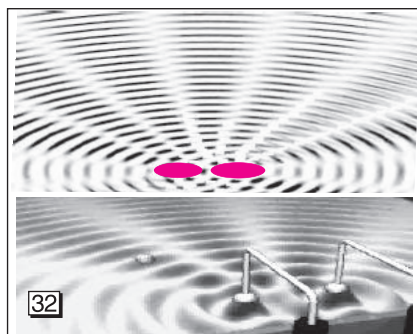


Două perturbații produse la capetele unui cordon elastic se propagă fiecare, independent de prezența celeilalte, dar se compun unde se întâlnesc (vezi [31]). Putem considera că fiecare punct material este pus în mișcare de undele care se propagă până în acel punct, iar elongațiile impuse de fiecare undă în parte se adună vectorial.

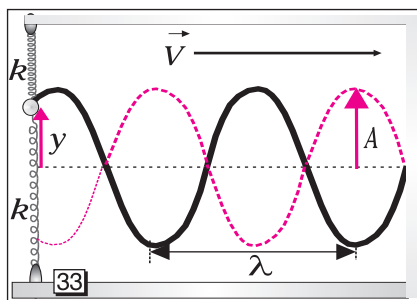
Regiunea din spațiu în care are loc fenomenul de interferență se numește **câmp de interferență**.

Orice câmp de interferență este caracterizat prin existența unor puncte care oscilează cu amplitudini diferite.

Undele produse pe suprafața unui lichid aflat în repaus, de două corpuri care ating periodic acea suprafață, interferează constructiv în punctele de amplitudine maximă și interferează distructiv, în punctele de amplitudine minimă (vezi [32]).



Interferența este staționară în punctele din câmpul de interferență (amplitudinea rămâne constantă în timp) dacă **sursele de unde sunt coerente** (diferența de fază se menține constantă în timp). Noua undă este formată din ventre și noduri, care nu se deplasează în timp, și se numește **undă staționară**. Punctele cu amplitudine maximă de oscilație se numesc **ventre**, iar cele cu amplitudine minimă, **noduri**.



Se pot forma unde staționare într-un fir elastic, prin excitarea periodică în apropierea mijlocului sau la un capăt al firului.

Poți construi un simulator pentru interferența unei unde progresive dintr-o coardă cu unda care se reflectă la capătul fixat de un corp rigid, unde se produce reflexie cu pierdere de semiundă (vezi [33]).

Pentru anumite tensionări și lungimi, obținem unde staționare. Oscilațiile dintr-o undă staționară au *amplitudine maximă în ventre* și, respectiv, *amplitudine minimă în noduri*, deoarece unda reflectată interferează constructiv și, respectiv, distructiv cu unda incidentă (vezi [34]).

*Analiza calitativă și cantitativă a fenomenului de interferență

Diferența de drum Δr este direct proporțională cu diferența de fază $\Delta\varphi$, conform relației:

$$\Delta\varphi = 2\pi\Delta r/\lambda.$$

Considerăm ecuațiile a două unde plane de aceeași frecvență care interferează:

$$y_1 = A_1 \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{r_1}{\lambda}\right) \text{ și } y_2 = A_2 \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{r_2}{\lambda}\right).$$

Amplitudinea rezultantă se obține din compunerea fazorială, adică din compunerea celor doi vectori amplitudine, A_1 și A_2 , care formează un unghi egal cu diferența de fază $\Delta\varphi$:

$$A_{rez} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\Delta\varphi}, \text{ unde } \Delta\varphi = 2\pi \cdot \frac{\Delta r}{\lambda}$$

Deoarece în calculul amplitudinii intervine diferența de drum, punctele de amplitudine constantă vor constitui un loc geometric pentru care diferența de drum este constantă. În plan, locul geometric este o familie de hiperbole cu focarele în sursele celor două unde (vezi [35]). Aceste hiperbole au ca axă de simetrie dreapta care trece prin focare.

Hiperbolele punctate corespund punctelor cu amplitudine maximă, iar cele trasate continuu corespund celor cu amplitudine nulă.

Interferența este **constructivă** pentru $\cos\Delta\varphi = 1$, deci:

$$A = A_1 + A_2 \text{ (vezi [36])}.$$

Interferența este **distructivă** pentru $\cos\Delta\varphi = -1$, deci:

$$A = |A_1 - A_2| \text{ și } A=0, \text{ dacă } A_1 = A_2.$$

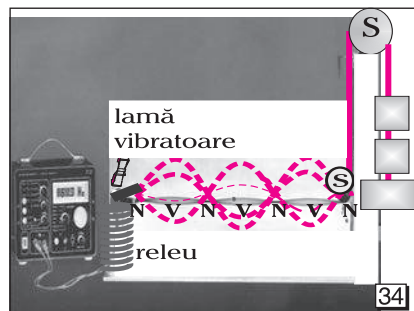
La compunerea a două unde cu frecvențe sau lungimi de undă egale, amplitudinea este maximă dacă diferența de drum este zero sau un multiplu par de semiunde:

$$\Delta r = 2n \cdot \frac{\lambda}{2},$$

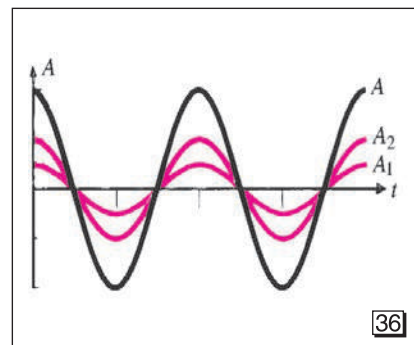
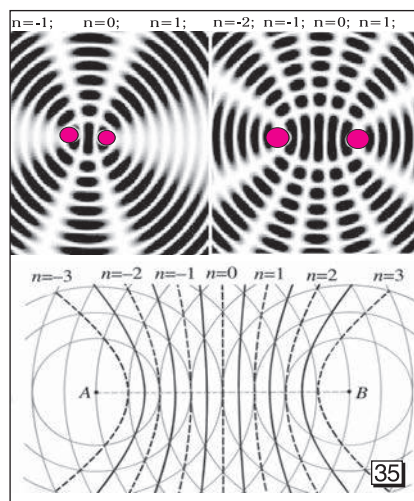
și minimă dacă diferența de drum este un multiplu impar de semiunde:

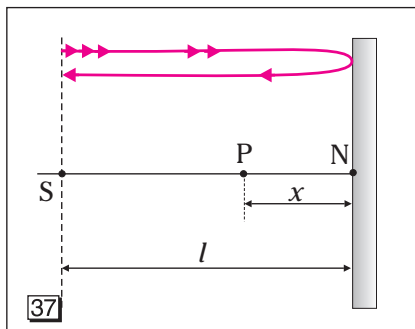
$$\Delta r = (2n + 1) \cdot \frac{\lambda}{2},$$

unde $n = 0, 1, 2, \dots$



Aspectul ordonat al oscilațiilor dintr-o undă staționară se obține atunci când frecvența de oscilație a lamei este corelată cu viteza de propagare a undei și cu lungimea firului dintre lamă și scripetele S din dreapta. Putem modifica tensiunea în fir prin schimbarea greutății corpurilor atârinate de capătul firului, care este trecut peste scripetele S.

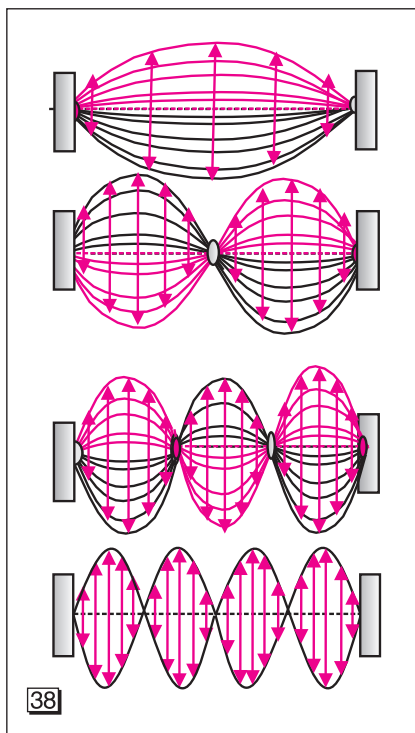




Notăm cu x distanța de la punctul considerat la suprafața reflectantă a unui obiect rigid, cu $x_1 = l - x$ spațiul parcurs de unda directă progresivă care se propagă de la sursă către acest

obstacol, iar cu $x_2 = l + x - \frac{\lambda}{2}$ spațiul

parcurs de unda care se reflectă la suprafața de separare a două medii, cu pierdere de semiundă.



Într-o undă staționară, toate punctele oscilează cu amplitudini constante în timp, cuprinse între valoarea maximă în ventre și valoarea zero în noduri.

Vrem să realizăm analiza calitativă și cantitativă a interferenței care se obține prin suprapunerea unei unde incidente cu unda reflectată a acesteia (vezi [37]). Cele două unde sunt caracterizate de aceeași frecvență și au diferența de fază constantă, deci satisfac condiția de coerență.

Dacă reflexia are loc pe suprafața unui mediu mai dens, aceasta se produce cu pierdere de semiundă sau, echivalent, cu schimbarea fazei cu π radiani.

În cazul reflexiei fără pierdere de semiundă rezultă:

$$x_2 = l + x.$$

În cazul reflexiei cu pierdere de semiundă, diferența de drum Δx și defazajul $\Delta\varphi$ sunt dependente de valoarea distanței x față de locul reflexiei:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = l + x - \frac{\lambda}{2} - l + x = 2x - \frac{\lambda}{2};$$

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot \frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi \cdot \frac{2x - \frac{\lambda}{2}}{\lambda}.$$

Amplitudinea prezintă maxime atunci când $\cos\Delta\varphi = 1$, adică atunci când

$$\Delta\varphi = 2n\pi = 2\pi \cdot \frac{2x - \frac{\lambda}{2}}{\lambda},$$

de unde rezultă: $2x - \frac{\lambda}{2} = 2n \cdot \frac{\lambda}{2}.$

Ventrele se formează la distanțele $x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$, cu $n = 0, 1, 2, \dots$, față de obiectul rigid (vezi [38]). În ventre, interferența este constructivă deoarece diferența de drum a undelor este un multiplu par de $\lambda/2$ și $\Delta\varphi = 2k\pi$. Primul ventru se formează la distanța $\frac{\lambda}{4}$ față de obiectul rigid.

Amplitudinea prezintă minime atunci când $\cos\Delta\varphi = -1$, adică atunci când:

$$\Delta\varphi = (2n+1)\pi = 2\pi \cdot \frac{2x - \frac{\lambda}{2}}{\lambda},$$

de unde rezultă: $2x - \frac{\lambda}{2} = (2n+1)\frac{\lambda}{2}.$

Nodurile se formează la distanțele $x = 2n \cdot \frac{\lambda}{4}$, cu $n = 0, 1, 2, \dots$, față de obstacolul rigid.

Primul nod se formează la suprafața de separare dintre cele două medii ($n = 0$).

În cazul reflexiei fără pierdere de semiundă, nodurile se formează în locul ventrelor din cazul anterior și invers.

*Distribuția energiei în undele staționare

Într-o undă staționară, toate oscilatoarele au amplitudini constante în timp, a căror mărime depinde numai de coordonata x . Distanța dintre două ventre sau dintre două noduri consecutive este $\frac{\lambda}{2}$, iar dintre un nod și un ventru consecutiv este $\frac{\lambda}{4}$.

Unda staționară este rezultatul interferenței a două unde coerente de amplitudini egale, care se propagă pe aceeași direcție, dar în sensuri opuse. Amplitudinile oscilațiilor variază de la un oscilator la altul și se repetă la distanțe egale cu $\lambda/2$.

Energia este localizată în ventrele de oscilație. Fiecărei figuri de interferență îi corespunde o anumită energie și distribuire a acesteia.

Studiul propagării perturbațiilor mecanice prin plăci vibrante (pereți, planșee) prezintă importanță în problemele izolării fonice a încăperilor și în acustica sălilor. Forma arhitectonică și mobilierul capitonat influențează calitatea sunetelor recepționate.

Identificarea în practică a undelor staționare

Într-un tub de lungime L , închis numai la un capăt, sau într-o coardă cu un capăt liber, pentru formarea undelor staționare, trebuie satisfăcută condiția:

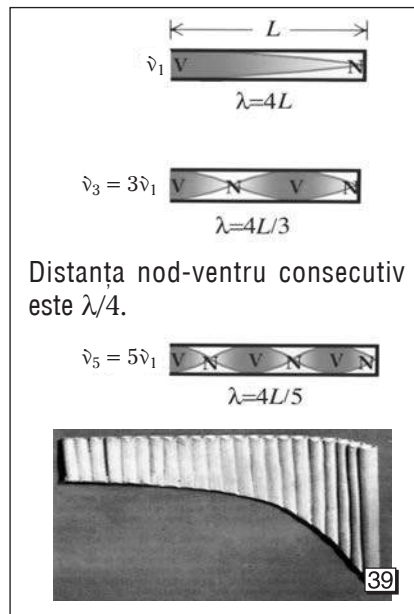
$$L = (2n-1) \cdot \frac{\lambda}{4}.$$

Dar $\lambda = V/\tilde{\nu}$, de unde rezultă frecvența armonicelor $\tilde{\nu}_n = (2n-1)V/4L$ (numite impare), $n = 1, 2, 3, \dots$ sau $\tilde{\nu}_n = (2n-1)\tilde{\nu}_1$, unde $\tilde{\nu}_1 = V/4L$. În acest caz se încadrează unele instrumente de suflut (vezi [39]). Primul mod de vibrație, în lamă sau tub cu un capăt liber, ca la nai, cu formarea unui singur nod și a unui ventru, corespunde frecvenței fundamentale pentru $n = 1$, adică $\tilde{\nu}_1 = V/4L$.

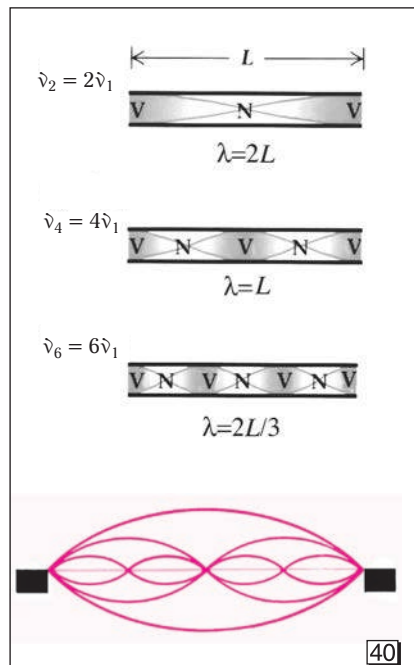
Dacă ambele capete sunt fixe (închise) sau ambele capete sunt libere (deschise), se pune condiția ca sistemul să genereze un număr par de noduri sau, respectiv, de ventre, adică

$$L = 2n \cdot \frac{\lambda}{4} \quad (\text{vezi [40]}).$$

Analog, folosind relația $\lambda = \frac{V}{\tilde{\nu}}$, rezultă că frecvența armonicelor este $\tilde{\nu}_n = 2nV/4L$, iar frecvența fundamentală corespunzătoare primului mod de vibrație ($n = 1$) este $\tilde{\nu}_2 = 2 \frac{V}{4L} = 2\tilde{\nu}_1$.

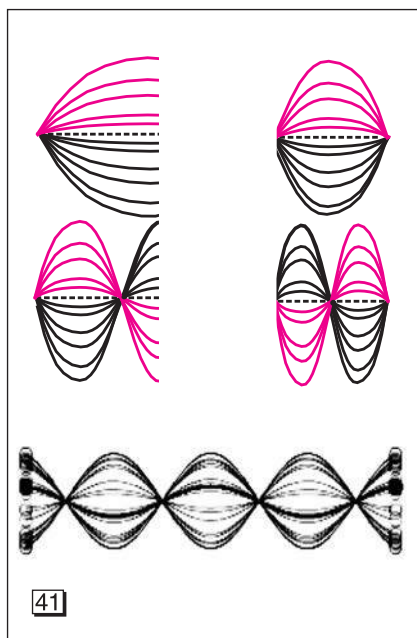


Undele cu anumite frecvențe care formează unde staționare se numesc **armonice**.



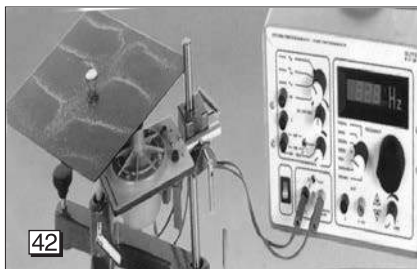
Coarda prinsă la capete într-un mediu rigid formează noduri în locul ventrelor formate în tubul deschis la capete. La instrumentele cu coarde, se obțin armonicile pare, iar în cazul unor instrumente de suflut se obțin armonicile impare ale frecvenței $\tilde{\nu}_1$.

Experimente pentru studiul interferenței undelor mecanice în corzi elastice



Verifică experimental!

Corzile scurte emit sunete înalte, iar cele lungi emit sunete mai joase. Frecvențele de oscilație și înălțimile sunetelor produse sunt mai mari la lungimi mai mici. Intensitatea sunetelor este maximă când frecvența oscilațiilor devine egală cu frecvența de excitație (la rezonanță).



În corzile elastice se formează unde staționare. Formarea unei unde staționare într-o coardă depinde de lungimea ei, de frecvență (sau lungimea de undă) și de modul de fixare: cu un capăt liber, cu capete fixe sau capete libere (vezi [41]). Față de capetele fixe ale coardei, la distanțe egale cu jumătate din lungimea de undă, unda staționară prezintă puncte în care oscilația s-a stins complet (noduri de oscilație) și între ele găsim puncte care oscilează la maximum (ventre de oscilație). Coarda prinsă numai la un capăt într-un mediu rigid, unde se formează nod, prezintă ventre la distanțe egale cu $\lambda/4$, ca și la capătul liber.

Condiția de formare a undelor staționare, în acest caz, este ca lungimea L a corzii să fie multiplu impar de $\lambda/4$, adică:

$$L = (2n - 1)\lambda/4, \text{ unde } n = 1, 2, 3, \dots$$

Amplitudinea resultantă nu depinde de timp; punctele de pe coardă trec în aceleași momente de timp prin poziția de repaus și ating tot simultan elongațiile lor maxime, cu toate că sunt amplitudini diferite de la punct la punct.

Un **mod de vibrație** al unei surse sonore reprezintă distribuția ventrelor și nodurilor undelor staționare formate. Frecvența cea mai joasă se numește **fundamentală**, iar celelalte frecvențe se numesc **armonice**. Acestea depind de lungimea corzii.

① Unde staționare se obțin și în alte sisteme (bidimensionale, tridimensionale) ca plăci, membrane elastice etc. Vizualizarea stării de vibrație a unei plăci elastice se poate realiza presărând o pulbere fină (nisip, lycopodiu etc.) pe suprafața acesteia (vezi [42]).

În timpul vibrației, pulberea se va aduna în punctele care rămân în repaus, deci se va aranja după liniile sau suprafețele nodale, vizualizate astfel prima dată de fizicianul Ernst Chladni (1756-1827). Forma acestor figuri depinde de materialul din care este confecționată placa, de forma ei și, în mod esențial, de zona de excitație, respectiv de punctul unde este fixată, deoarece în punctul de excitație ia naștere întotdeauna un ventru, iar în punctul de fixare un nod.

Reține!

Într-un tub de lungime L , închis numai la un capăt, sau într-o coardă cu un capăt liber se formează unde staționare, numite **armonice**, cu frecvențele exprimate prin relația:

$$\vartheta_n = (2n - 1) \frac{V}{4L}.$$

Dacă ambele capete sunt fixe (închise) sau sunt libere (deschise), atunci frecvențele sunt: $\vartheta_n = 2n \frac{V}{4L}.$

Experimente pentru studiul funcționării unor instrumente muzicale cu coarde și de suflat

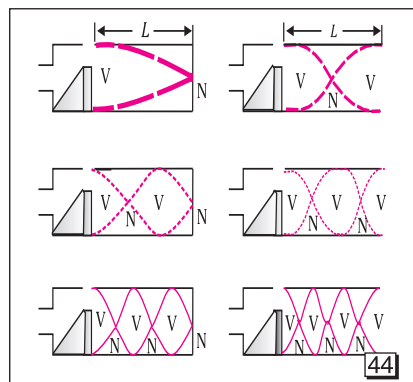
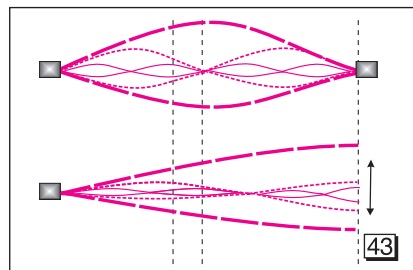
Înălțimea sunetelor depinde de frecvența lor. Urechea umană sesizează spectrul frecvențelor cuprins între 16 Hz și 16 000 Hz. Sunetele cu frecvențe mai mici decât 16 Hz se numesc **infrasunete**, iar cele cu frecvențe peste 16 000 Hz, **ultrasunete**.

Investigare experimentală

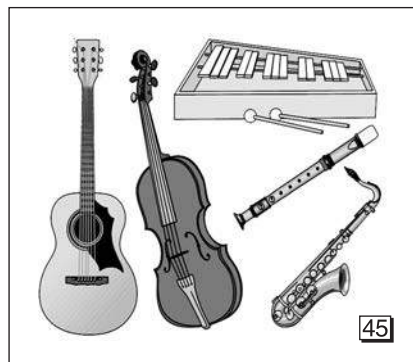
Pe o placă de lemn, prinde 2-3 corzi din materiale diferite, de grosimi diferite, de capetele unor șuruburi sau cuie (vezi [43]). Întinde firele mai mult sau mai puțin, prin răsucirea șuruburilor sau prin înfășurarea firelor pe acestea, lovește-le ușor și ascultă sunetele. Apasă cu un deget în diferite puncte ale coardei, lovește una dintre părțile coardei și compară sunetele cu cele produse de coarda întreagă. Încearcă să acordezi două corzi la aceeași frecvență. Depinde sunetul de lungimea, grosimea și întinderea firului? Firele pot fi întinse sub acțiunea unor greutăți atârnate la un capăt al fiecărei coarde trecute peste placa de lemn. Încearcă să scoți sunete de diverse frecvențe și intensități suflând într-un tub cilindric de lemn sau metal, închis sau deschis (vezi [44]). Prin închiderea/deschiderea orificiilor se modifică lungimea coloanei de aer care oscilează.

❶ **Cutia (cavitatea) rezonantă** întărește sunetele cu frecvențele de vibrație ale corzilor egale cu cele ale armonicilor coloanelor de aer din interiorul cutiei. Aceeași notă muzicală produsă de diferite instrumente are aceeași frecvență fundamentală ν_1 , dar un număr diferit de armonice (tonuri) și intensități diferite. Din combinarea unui număr de armonice, care au frecvențele egale cu un multiplu întreg al celei fundamentale, de intensități diferite, rezultă sunete cu o calitate proprie care reprezintă timbrul. Timbrul unui sunet depinde de felul cum ai provocat sursa sonoră să oscileze. Dacă ciupești sau lovești o coardă elastică, sunetul se amortizează repede, dar folosind un arcuș, oscilația poate dura mai mult. Instrumentiștii scurtează sau lungesc corzile prin apăsarea lor, în diferite puncte, pe cutia de rezonanță a instrumentului (vezi [45]). Corzile vibrează astfel cu diverse frecvențe. Când acordează o vioară sau o chitară, ei întind (tensionează) mai mult sau mai puțin corzile, prin răsucirea lor cu anumite dispozitive, peste cutia de rezonanță care amplifică sunetele obținute. La instrumentele de suflat, coloana de aer oscilează în diferite moduri, controlate de suflul aerului, în coloane de aer mai lungi sau mai scurte (naiul, orga).

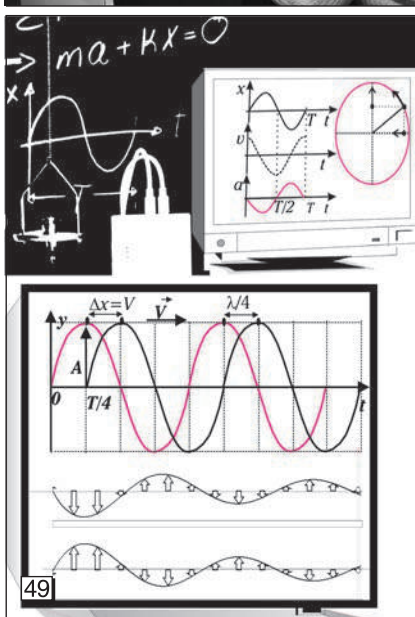
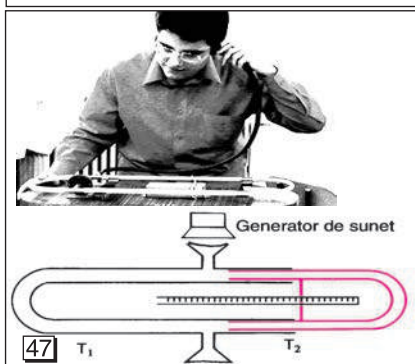
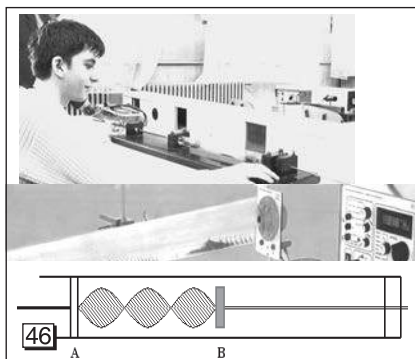
În interiorul gurii, cavitatea rezonantă dintre corzile vocale, limbă și buze poate fi cu un capăt deschis (sau cu capete închise), cu volume și forme diferite. Când vorbim, corzile vocale produc diverse tonuri, dar cavitatea gurii modifică în continuu tonurile din cauza diferitelor frecvențe de rezonanță ale cavității.



Undele staționare din coloanele de aer ale tuburilor sonore se formează astfel: dacă la capete sunt suprafețe de separare cu medii mai rigide, prin reflexia cu schimbare de fază (π), apar noduri de oscilație (capete închise), iar dacă sunt suprafețe de separare cu medii mai puțin rigide, atunci are loc o reflexie fără schimbare de fază și undele staționare formează ventre de oscilație (capete deschise).



Corzile instrumentelor se acordează pe aceeași frecvență cu cea a unui diapazon prin modificarea tensiunii, în timp ce vibrează, până când dispare fenomenul de bătăi.

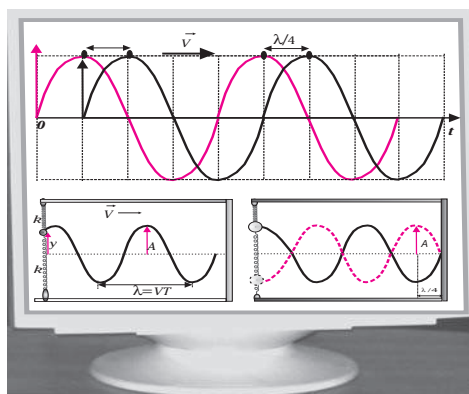


*Experimente opționale (pentru performeri și curioși)

1. Așezăm o sursă sonoră (difuzor conectat la un generator de ton cu frecvență variabilă) în fața unui tub de sticlă deschis la capăt, care conține pulbere de plută distribuită pe lungimea tubului (vezi [46]). Mărim frecvența sunetului până când pulberea se concentrează în nodurile undelor staționare, care se formează în coloana de aer când este îndeplinită condiția de rezonanță (frecvența oscilațiilor proprii ale coloanei de aer este egală cu frecvența membranei difuzorului).
2. Găsești frecvența de oscilație a unui difuzor cuplat la un generator de frecvență sau a unui diapazon prin ridicarea brațului unui manometru cu lichid, din apropierea acestora, până când sunetul se aude întărit de aerul din tub, care vibrează la rezonanță, din condiția $l_{col.aer} = \frac{\lambda}{4} = \frac{V_{aer}}{4v}$.

Când umpli un vas cu apă, pe măsură ce spațiul de aer devine mai mic, frecvența sunetului (gâlgăitul aerului) se mărește. Când golești vasul, crește spațiul ocupat de aer în vas și cavitatea are frecvența de rezonanță mai mică, ca la tuburile mari care dau sunete joase.

3. Într-un dispozitiv Quincke (vezi [47]) se obțin maxime sau minime de interferență când diferența de drum a sunetelor care interferează după ce s-au propagat prin cele două tuburi, T_1 și T_2 , este multiplu par sau, respectiv, impar de semiundă. Se deplasează tubul culisant T_2 pe distanța d . Dacă sunetul obținut prin interferența sunetelor care se propagă prin cele două tuburi are din nou intensitatea maximă, atunci diferența de drum suplimentară este $2d = \lambda$.
4. Sunetele se pot vizualiza pe ecranul unui osciloscop, prin captarea sunetelor cu un microfon sau difuzor dinamic cuplat la intrarea Y a unui osciloscop (vezi [48]).
5. Studiul oscilațiilor și undelor elastice se poate face cu experimente simulate pe calculator (vezi [49]).



1.3.6. Acustica

Descrierea sunetelor utilizând calitățile sunetului

Acustica se ocupă cu studiul producerii, propagării și recepționării sunetelor. Sunetele se propagă prin medii elastice sub formă de unde sonore (zone comprimate care alternează cu zone rarefiate).

Acustica fiziologică grupează senzațiile de sunet produse asupra urechii umane după: înălțime, timbru și intensitate auditivă.

Înălțimea sunetului este calitatea sunetului care depinde de frecvență (crește cu frecvența).

Timbrul este calitatea sunetului care permite distingerea surselor sonore, după spectrul de armonice ale unui sunet fundamental (vezi [50]). Două instrumente muzicale pot produce aceeași notă muzicală, dar cu armonice diferite ca număr și intensități.

Urechea umană nu poate aprecia de câte ori un sunet are intensitatea sonoră mai mare decât a altui sunet, după intensitatea senzației auditive.

Intensitatea senzației auditive S crește proporțional cu logaritmul zecimal al intensității energetice I :

$$S = k \lg I.$$

Rezultă că intensitatea senzației auditive crește în progresie aritmetică atunci când intensitatea energetică sonoră crește în progresie geometrică.

Intensitatea energetică sonoră este definită de raportul dintre energia W transferată de undă în unitatea de timp prin unitatea de suprafață transversală:

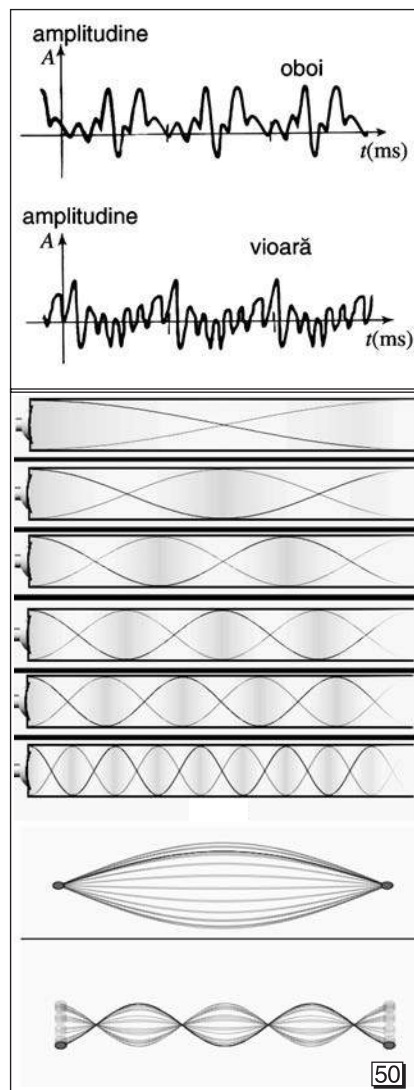
$$I = \frac{W}{St}.$$

Nivelul sonor N_S reprezintă de zece ori logaritmul zecimal al raportului dintre intensitatea sonoră I a unui sunet și intensitatea minimă percepută de ureche, $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$, la frecvența $\nu_0 = 10^3 \text{ Hz}$, pentru care sensibilitatea urechii este maximă:

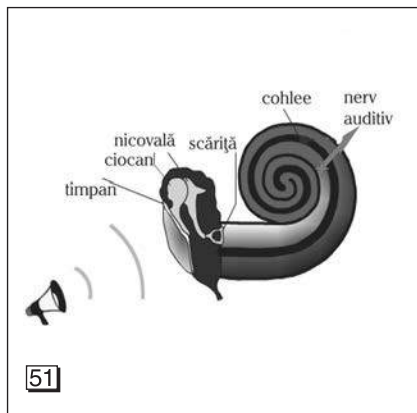
$$N_S = 10 \lg \frac{I}{I_0}.$$

Nivelul sonor este exprimat în S.I. în **decibeli (dB)**.

Intensitățile sonore maxime suportate de ureche ($I = 1 \text{ W/m}^2$), produsă de o variație a presiunii atmosferice de 30 N/m^2 , când apare senzația de durere, îi corespunde nivelului sonor $N_S = 120 \text{ dB}$.



Sursa zgomotului ($\nu \approx 10^3 \text{ Hz}$)	N_S (dB)	I (Wm^{-2})
foșnet de frunze	10	10^{-11}
șoaptă	20	10^{-10}
aparat de radio	40	10^{-8}
discurs	60	10^{-6}
trafic aglomerat	80	10^{-4}
discotecă	100	10^{-2}
motor de avion	120	1



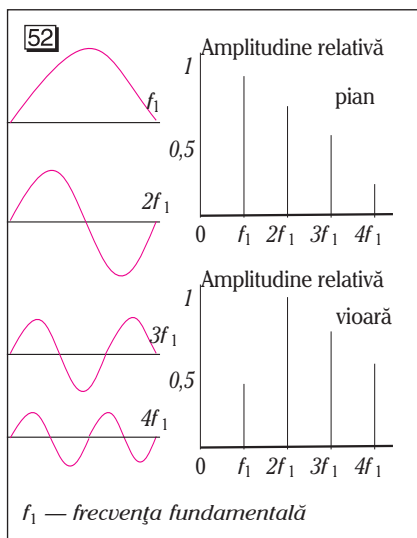
Explicarea percepției sunetelor

Undele sonore sosite din urechea externă provoacă oscilații ale sistemului osos: ciocan, nicovală și scăriță (vezi [51]). Prin perilimfă, undele sonore ajung într-un canal osos răsucit în spirală denumit cohlee. Pe toată lungimea acestui canal se află terminații nervoase sensibile la perturbații cu frecvențe înalte sau cu frecvențe joase. Nervii auditivi transformă energia vibrațiilor produse în ureche de undele sonore în mici impulsuri nervoase (biocurenți) care produc în creier o senzație auditivă (care depinde de vârstă și de starea receptorului auditiv).

Variațiile presiunii cu frecvențe ν între 16 Hz și 20 000 Hz produc senzații auditive.

Calitățile sunetelor sunt subiective.

Infrasunetele ($\nu < 16$ Hz) și ultrasunetele ($\nu > 20\,000$ Hz) nu sunt recepționate de urechea umană.



*Funcționarea instrumentelor cu coarde și a celor de suflat

Tuburile și corzile sonore ale instrumentelor muzicale sunt surse de unde sonore.

Undele staționare, care au anumite frecvențe caracteristice, se formează atunci când corzile elastice sunt puse în oscilație prin ciupire, lovire sau frecare cu un arcuș sau când coloanele de aer sunt puse în oscilație de buzele suflătorului, de muștiuc sau de ancia instrumentelor cu tuburi sonore (nai, trompetă, flaut, clarinet etc.). Propagarea perturbațiilor de presiune se face în mediul exterior sub formă de unde longitudinale, cu transferul unei părți din energia surselor sonore.

Sursele sonore generează unde sonore care produc senzații auditive plăcute urechii umane (sunete muzicale) dacă produc un șir ordonat de fluctuații periodice de presiune, în diferite combinații.

Sunetele muzicale sunt împărțite în game muzicale, fiecare fiind alcătuită din note muzicale, ale căror frecvențe se află între ele în anumite rapoarte (vezi [52]).

Următoarea gamă, care începe cu aceeași notă, dar la interval de o octavă, are frecvențele dublate față de cea precedentă.

Tuburile subțiri produc sunete bogate în armonici superioare, percepute de urechea umană ca sunete ascuțite și stridente.

Tuburile groase produc tonuri joase, plăcute urechii (frecvența fundamentală și primele armonice inferioare).

Notele	Frecvențele (Hz)	
do	261,6	
do# (re _b)	277,2	
re	293,7	do
re# (mi _b)	311,1	re
mi	329,6	mi
fa	349,2	fa
fa# (sol _b)	370,0	sol
sol	392,0	sol
sol# (la _b)	415,3	la
la	440,0	si
la# (si _b)	466,2	do

Sunetele vocale sunt produse de vibrația corzilor vocale sub acțiunea unui flux de aer (vezi [53]). Dacă deschizi gura și produci un sunet, fără să pui în mișcare alți mușchi, îl vei auzi nearticulat. Când vorbești, intră în acțiune cavitatea bucală, mușchii gâtului, limba, buzele, faringele, care transformă sunetele în cuvinte. Sunetele muzicale sunt emise prin modificarea distanței și tensiunii în corzile vocale sub acțiunea mușchilor gâtului.

Obținează cu degetele gâtul unui balon de cauciuc umflat. Vei constata că frecvența sunetului produs de vibrația jetului de aer care iese afară depinde de deschiderea gâtului și dimensiunile balonului.

Zgomotele și pocnetele sunt produse de oscilații neperiodice, cu durate mari și, respectiv, mici.

Măsuri de protecție privind posibilele efecte ale sunetelor

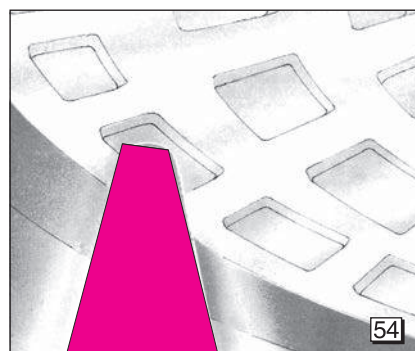
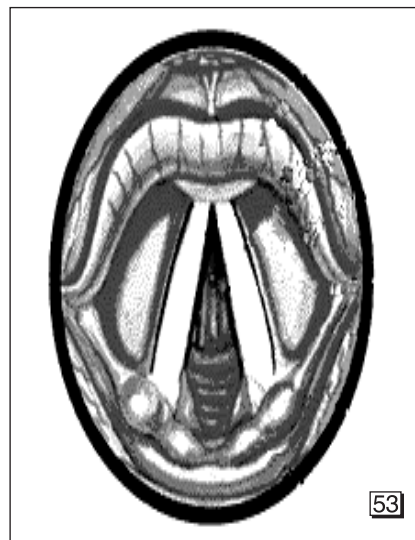
În orice sistem acustic (coloană de aer, coardă elastică etc.) excitat cu oscilații care satisfac condiția de rezonanță se formează unde staționare.

Sunetele și zgomotele de diferite intensități pot produce stress, oboseală, reducerea atenției și a capacității de muncă, traumatism sonor sau surditate profesională, spargerea geamurilor etc. Un sunet cu frecvența egală cu frecvența proprie a unui vas de sticlă poate produce vibrații cu amplitudini mari, deoarece este îndeplinită condiția de rezonanță și se poate produce chiar spargerea vasului.

Efectul nociv al zgomotului crește cu durata acestuia, iar peste anumite limite de suportabilitate se ajunge la o psihoză periculoasă. Pragul la care intensitatea sonoră devine nocivă este 80 de decibeli, de aceea se poate ajunge la traumatism sonor sau surditate.

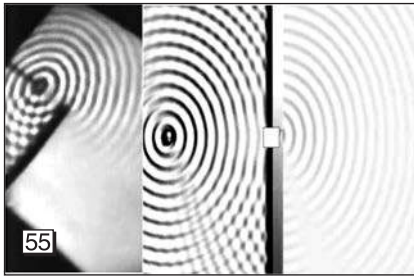
Aceeași piesă nu mai produce senzație auditivă și impresie bună asupra psihicului dacă este redată la volum mare. Amplificarea mare distorsionează semnalul, introduce zgomote (suprapuneri dezordonate de vibrații sonore). Piese muzicale sunt amestecuri de sunete și zgomote a căror proporție s-a schimbat în ultimul secol în favoarea zgomotelor și sunetelor cu timbru sărac în armonice.

Știm cu toții că anumite pasaje ale unei piese muzicale clasice sunt interpretate de instrumentele de suflat, alte pasaje de instrumentele cu coarde, iar finalul de toată orchestra. Într-o orchestră cu ambele tipuri de instrumente, bogăția de armonice contribuie la obținerea unei calități deosebite a sunetelor redade („culoarea“ sau timbrul).



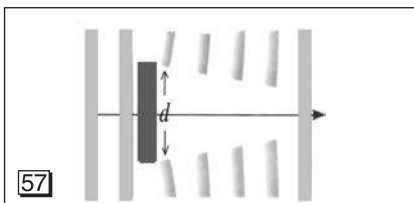
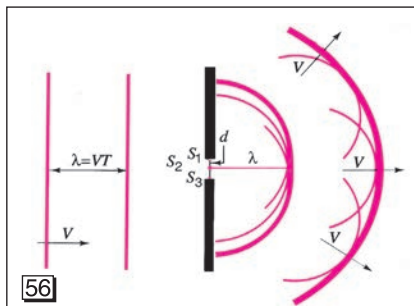
În timpul înregistrării digitale (numerice) pe un CD, sunetele convertite în semnale electrice codificate în secvențe numerice (0 și 1) sunt gravate pe suprafața discului sub forma unor minuscule scobituri, care sunt apoi acoperite cu o folie subțire de aluminiu (vezi [54]). Când CD-ul este introdus în lectorul optoelectronic de discuri, un fascicul laser reflectat de succesiunea de scobituri decodifică informația stocată în semnale electrice, care apoi sunt reconvertite în sunete de către difuzoare.

1.3.7. *Difracția undelor mecanice — studiu calitativ



Difracția undelor constă în ocolirea de către unde a obstacolelor sau pătrunderea undelor prin fante înguste.

La formarea undelor superficiale transversale de natură neelastică de la suprafața lichidelor contribuie forțele de tensiune superficială și forțele gravitaționale. La undele cu lungimi de undă de ordinul decimetrilor, forțele de tensiune superficială nu au nici o influență. Particulele lichidului nu efectuează o simplă mișcare în sus și în jos, ci se mișcă pe cercuri sau elipse în timp ce unda trece peste ele. Corpurile plutitoare sunt împinse de cresta valurilor în sensul de mișcare al acestora, iar în adâncitura valurilor sunt trase în sens invers.



Sunetul poate fi auzit în spatele unor ecrane de dimensiuni relativ mari, de ordinul metrilor.

Explicația acestui fenomen numit **difracție** constă în faptul că fiecare punct de pe suprafața de undă este o sursă de oscilații secundare conform principiului Huyghens-Fresnel. Obiectul împiedică o parte din frontul de undă să avanseze, dar sursele secundare de pe restul frontului de undă generează unde care pătrund și în spatele obiectului.

Difracția constă în schimbarea direcției de propagare a undelor la trecerea pe lângă obstacole sau la traversarea fantelor cu dimensiuni comparabile cu lungimea de undă.

Cu un diapazon cu vârf, producem o undă circulară de natură neelastică la suprafața apei dintr-un vas, undă care se propagă pe suprafața lichidului până la un obstacol sau până la o fantă îngustă a unui paravan (vezi [55]). Se constată că unda se propagă prin fantă și în spatele acestui paravan.

Fenomenul de difracție se explică aplicând principiul lui Huygens: punctele din porțiunea de suprafață de undă din fantă sau orificiu au devenit noi centre de oscilații, de la care se propagă unde circulare și în spatele paravanului (vezi [56]).

În cazul când în calea undelor se află un obstacol cu dimensiunea d , de același ordin de mărime cu lungimea de undă, unda se propagă și de această dată în spatele obstacolului, aparent ocolindu-l. Unda incidentă, ajungând la marginea obstacolului, va determina noi centre de oscilații care se vor propaga și în spatele acestuia (vezi [57]).

Fiecare punct de pe frontul de undă devine o sursă de unde, propagând astfel excitația din aproape în aproape.

Când dimensiunile obstacolelor sau fantelor sunt mari în raport cu lungimea de undă, fenomenul de difracție este slab. Când dimensiunile obstacolelor sau fantelor sunt mici în raport cu lungimea de undă sau sunt comparabile cu lungimea de undă ($d \leq \lambda$), difracția se pune în evidență.

Reține!

Explicația difracției constă în faptul că fiecare punct de pe frontul de undă este o sursă de oscilații secundare, conform principiului Huygens.

1.3.8. Ultrasunete și infrasunete.

Aplicații în medicină, industrie, tehnică militară

Aplicații ale ultrasunetelor și infrasunetelor

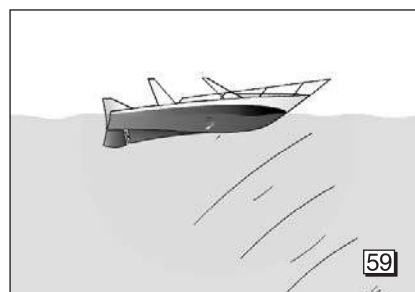
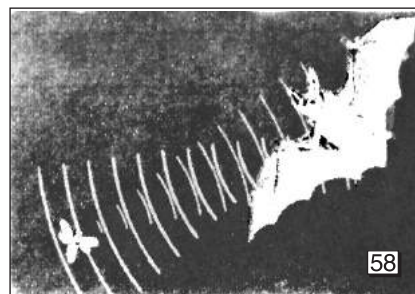
Liliecii și delfinii au capacitatea de a recepționa ultrasunetele, ale căror frecvențe sunt mai mari de 20 000 Hz. Liliecii și delfinii localizează obstacolele și prada cu ajutorul unui sistem de emisie a undelor ultrasonore sub formă de semnale scurte (20-50 semnale/s), recepționate sub formă de semnale-ecou după un interval de timp care depinde de distanța până la acestea (vezi [58]). Cu cât timpul scurs între emiterea sunetului și ecou este mai scurt, cu atât este mai aproape prada.

Ultrasunetele se obțin prin folosirea unor cristale piezoelectrice din cuarț, care prezintă fenomenul de electrostricțiune, adică de contracție sau dilatare sub acțiunea unei tensiuni electrice alternative. Dacă frecvența tensiunii alternative aplicate depășește 20 kHz, lama va emite ultrasunete în mediul înconjurător.

Infrasunetele (0-16 Hz) sunt percepute de sugari, animale, păsări și pești, care se refugiază atunci când se stârnește o furtună. În cazul cutremurelor, unele animale percep infrasunetele însoțitoare și intră în panică, înainte ca omul să sesizeze unda seismică. Infrasunetele pot fi produse de explozii, cutremure, avioane turboreactoare și automobile la viteze mari. În timpul furtunilor, sunt emise infrasunete care se propagă la mari depărtări, unde este vreme bună.

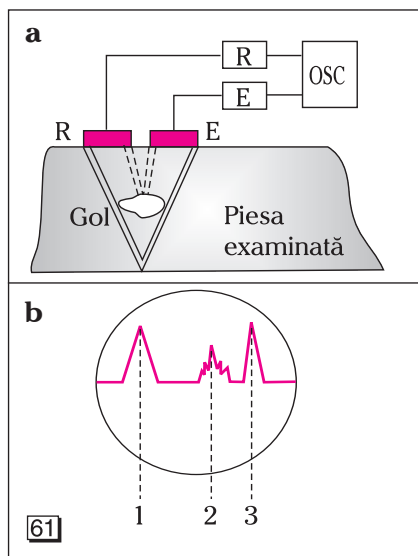
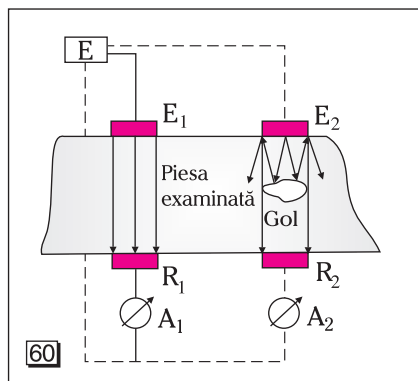
Unele dintre cele mai utile aplicații ale ultrasunetelor și infrasunetelor sunt:

- ☑ Perturbațiile provocate în interiorul celulelor prin *metoda ecografiei* permit diagnosticarea medicală: un emițător trimite un fascicul de ultrasunete spre zona cercetată și un detector recepționează ecourile.
- ☑ Distrugerea microorganismelor cu ultrasunete are importanță în prepararea vaccinurilor, sterilizarea și conservarea alimentelor.
- ☑ Înlăturarea ceții sau a fumului pe aeroporturi are importanță în protecția navigației aeriene.
- ☑ Ultrasunetele se folosesc în spălarea și curățarea unor corpuri sau în prelucrarea unor piese. Se introduce piesa care trebuie prelucrată într-un lichid în care se găsesc, în suspensie, particule de praf abraziv dur.



Cu fascicule înguste de ultrasunete, care sunt slab absorbite de apă, se pot cerceta, prin reflexie, adâncurile mărilor și oceanelor (vezi [59]). Dacă intervalul de timp cronometrat până la captarea sunetului reflectat (a ecoului) este Δt , atunci distanța până la obstacol este: $x = v(\Delta t)/2$.

Sonarul maritim folosește un detector care recepționează, după un timp, ultrasunetele emise în impulsuri (trenuri de unde), după ce acestea s-au reflectat de stânci, epave, submarine sau bancuri de pești, apoi le prelucreză și afișează o imagine pe un monitor.



În figura 61 b, prin 1 și 3 sunt indicate locurile unde spotul luminos marchează momentele în care a fost emis semnalul ultrasonor și, respectiv, cel în care a fost receptat semnalul reflectat de fața opusă. Prin 2 este indicat locul unde este primit un semnal reflectat de un gol de aer. Poziția relativă a acestuia în raport cu 1 și 3 ne permite să determinăm adâncimea la care se găsește defectul.

Sub acțiunea unei surse de ultrasunete, în lichid apare fenomenul de **cavităție**. Cavitățile sau bulele conțin vaporii lichidului și gazele dizolvate în lichid, la presiuni foarte mari. Bulele mici se contopesc în bule mai mari, care încep să vibreze și apoi se sparg, dând naștere unor presiuni locale foarte mari, care se manifestă sub formă de șocuri hidraulice în volume foarte mici. Datorită șocurilor hidraulice, particulele de abraziv se lovesc cu putere de suprafața piesei, smulgând așchii din aceasta.

☑ O altă aplicație este **defectoscopia ultrasonoră**.

Controlul ultrasonor permite punerea în evidență a unor defecte (fisuri sau goluri) în elementele de beton armat sau în organele de mașini, fără a produce deteriorări ale acestora. Principalele tipuri de defectoscoape ultrasonore utilizează transmisia sau reflexia. În defectoscopul prin transmisie, capul de emisie de ultrasunete E și capul de recepție R sunt situate de o parte și de alta a piesei de cercetat (vezi 60). Dacă între ele nu există nici un defect (ca în poziția E_1 și R_1), semnalul ultrasonor transmis va trece neatenuat, provocând o anumită deviație a acului aparatului de înregistrare (A_1). În cazul în care întâlnește un gol, o parte a semnalului ultrasonor este reflectat pe suprafața de separare dintre metal și aerul din golul respectiv, iar semnalul ajunge atenuat la receptor (A_2). La defectoscoapele prin reflexie (sau în impulsuri), capul de emisie și cel de recepție sunt situate de aceeași parte a piesei, unul lângă altul (vezi 61 a).

Se generează impulsuri scurte la intervale de timp constante, care sunt marcate pe ecranul unui osciloscop. Dacă în piesă există un defect, semnalul ultrasonor se va reflecta de acesta și va ajunge mai devreme la receptor decât cel reflectat de fața opusă.

Măsurile de protecție la utilizarea ultrasunetelor sau a infrasunetelor

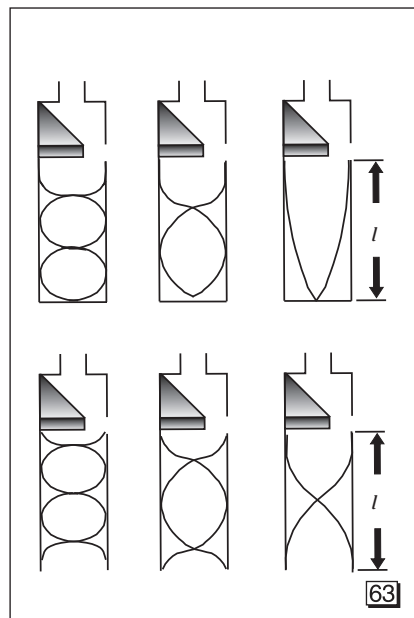
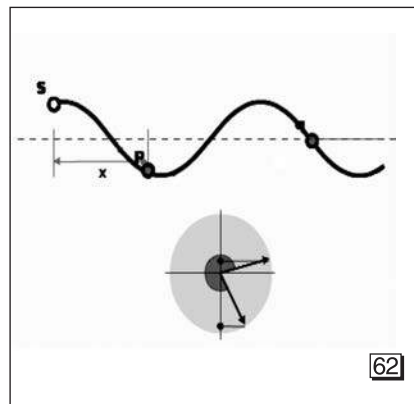
Infrasunetele de anumite frecvențe produc efecte fiziologice asupra oamenilor: somnolență, amețeală, vomă, fals efect de euforie sau efecte neplăcute de rezonanță (cu bătăile inimii). Infrasunetele de intensități mari, pot traumatiza sistemul nervos și sistemul circulator.

Ultrasunetele produc migrene, greață sau pierderea echilibrului omului atunci când acesta se afla în apropierea sursei. Ultrasunetele de anumite frecvențe produc efecte de iritație asupra animalelor și asupra omului.

În cazul folosirii ultrasunetelor pentru stabilirea unui diagnostic, intensitatea lor este mică pentru a nu distruge globulele roșii din sânge.

Probleme propuse

1. Sursa de unde (vezi [62]) are ecuația: $y = 0,3 \sin \frac{\pi}{9} t$ (m). Viteza de propagare a undelor este $V = 1$ m/s. Dacă defazajul oscilațiilor produse în două puncte este $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, atunci distanța dintre aceste puncte este:
a) $\Delta x = 4,5$ m; b) $\Delta x = 9$ m; c) $\Delta x = 18$ m; d) $\Delta x = 36$ m.
2. De capătul unui braț de diapazon se leagă un fir cu lungimea $l = 2$ m și masa $m = 12$ g. De fir se atârnă un corp cu masa $M = 960$ g. Lungimii de undă $\lambda = 4$ cm a undelor transversale din fir îi corespunde frecvența diapazonului:
a) $\nu = 10$ Hz; b) $\nu = 100$ Hz; c) $\nu = 1000$ Hz; d) $\nu = 460$ Hz.
3. Brațele unui diapazon, situate la distanța d , după ce sunt apropiate, sunt lăsate să oscileze liber cu amplitudinea A . Aerul din planul median al brațelor diapazonului are amplitudinea oscilațiilor:
a) $2A$; b) A ; c) $A/2$; d) $A=0$.
4. O lamă metalică elastică de lungime l este fixată strâns la unul dintre capete. Dacă viteza de propagare a undelor longitudinale este egală cu V , frecvențele proprii de vibrație ale lamei sunt exprimate prin relația:
a) $\nu_k = \frac{V}{4l}(2k-1)$; b) $\nu_k = \frac{V}{4l} \cdot 2k$; c) $\nu_k = \frac{V}{2l}(2k+1)$; unde $k \in \mathbb{N}$.
5. Frecvențele oscilațiilor proprii ale unei coloane de aer de lungime l dintr-un tub deschis la ambele capete (vezi [63]) sunt exprimate prin relația:
a) $\nu_k = \frac{V}{2l} \cdot k$; b) $\nu_k = \frac{V}{2l}(2k+1)$; c) $\nu_k = \frac{V}{2l} \cdot 2k$; unde $k \in \mathbb{N}$.
6. Se știe că pe Lună corpurile sunt mai ușoare decât pe Pământ. Un sunet produs la capătul unei bare metalice aflate pe Lună se propagă prin bară:
a) mai repede decât prin aceeași bară aflată pe Pământ;
b) mai încet decât prin bara de pe Pământ;
c) cu aceeași viteză; d) pe Lună nu se propagă.
7. Într-o coardă se produce o oscilație de o anumită lungime de undă și o anumită frecvență. Această oscilație se transmite în aer:
a) cu aceeași frecvență, dar cu lungime de undă diferită;
b) cu aceeași lungime de undă, dar cu frecvență diferită;
c) cu aceeași lungime de undă și aceeași frecvență;
d) cu lungime de undă și frecvență diferite.



8. Se dau ecuațiile a trei oscilații armonice cu elongațiile paralele, propagate din trei surse până într-un punct P :

$$\text{I. } y_{\text{I}} = 20 \cdot \sin(\omega t + \pi); \quad \text{II. } y_{\text{II}} = 40 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\text{III. } y_{\text{III}} = 30 \cdot \sin(\omega t + 2\pi).$$

Prin suprapunerea căror oscilații se obține amplitudinea maximă?

- a) I cu II; b) I cu III; c) II cu III; d) I cu II și cu III.

9. Între polii unui magnet se află un fir de cupru cu lungimea l , raza secțiunii r și densitatea ρ . Când prin fir circulă un curent alternativ de frecvență ν , coarda vibrează. Tensiunea în coardă este:

- a) $F = 16\pi\nu^2 l^2 \rho r^2$; b) $F = 8\pi\nu^2 l^2 \rho r^2$;
c) $F = 4\pi\nu^2 l^2 \rho r^2$; d) $F = \pi\nu^2 l^2 \rho r^2$.

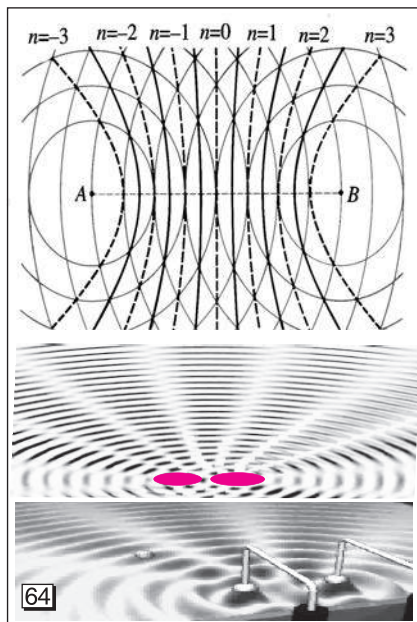
10. Capătul unui fir este prins de brațul unui diapazon care vibrează cu frecvența $\nu = 50$ Hz. Celălalt capăt al firului, trecut peste un scripete, este întins de greutatea $G_0 = 5$ N. Lungimea firului între diapazon și scripete este $l = 2$ m. Valorile greutății G_2 pentru al doilea mod de vibrație și, respectiv, G_3 pentru al treilea mod de vibrație sunt:

- a) $G_2 = 20$ N, $G_3 = 45$ N; b) $G_2 = 20$ N, $G_3 = 20$ N;
c) $G_2 = 5/4$ N, $G_3 = 5/9$ N.

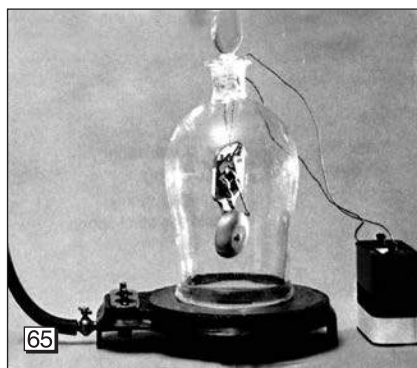
11. Două vârfuri, ale căror extremități ating suprafața unei cuve cu mercur, vibrează cu frecvența $f = 116$ Hz. Se obține un câmp de interferență (vezi [64]). Se măsoară distanțele de la vârfurile vibratoare (S_1 și S_2) față de un punct M luat pe hiperbola n , socotită de la axa comună și $MS_1 - MS_2 = 1,07$ cm. De aceeași parte a axei de simetrie se ia un punct M' pe hiperbola $(n + p)$, unde $p = 12$ și $M'S_1 - M'S_2 = 2,03$ cm. Lungimea de undă și viteza de propagare a mișcării sunt:

- a) $\lambda = 0,8$ mm; $V = 0,25$ cm/s; b) $\lambda = 0,8$ mm; $V = 9,28$ cm/s;
c) $\lambda = 1$ mm; $V = 0,5$ cm/s.

12. De ce sunetele unei sonerii în funcțiune nu se aud dacă soneria este sub clopotul unei pompe de vid (vezi [65])?



[64]



[65]

Răspunsuri:

1. a. 2. c. 3. d. 4. a. 5. a. 6. c. 7. a. 8. c.

9. a. 10. c. 11. b. 12. Sunetele nu se propagă prin vid.



Teste pentru autoevaluare

Testul 1

I. Găsește corespondența dintre definițiile și explicațiile din cele două coloane (o literă a coloanei din stânga se asociază unei cifre a coloanei din dreapta):

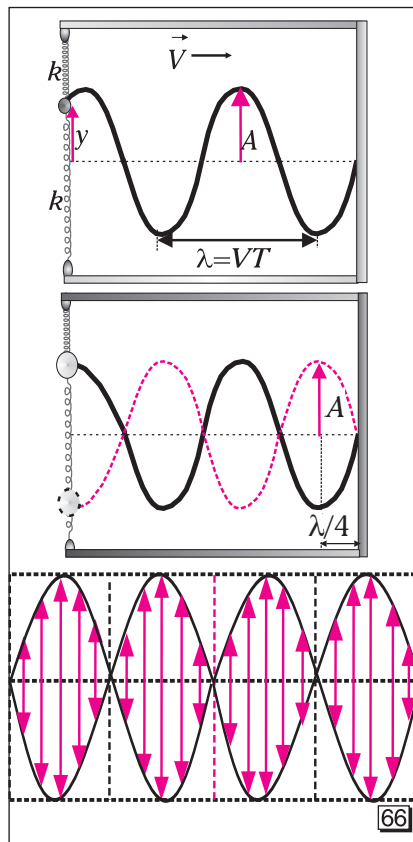
- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> a. dacă una dintre particulele unui mediu oscilează, atunci vor oscila și particulele vecine deoarece interacționează între ele; b. unde generate de perturbații mecanice în medii elastice, transportă energie mecanică; c. direcția de propagare a undei este perpendiculară pe direcția de oscilație; d. funcția matematică care descrie mărimea perturbată; e. suprafața de undă cea mai avansată la un moment dat; f. spațiul străbătut de undă în timpul unei perioade a oscilației; g. mulțimea punctelor din spațiu care oscilează având la un moment dat aceeași valoare a funcției de undă pe suprafețe de undă cu forme diferite; h. direcția de propagare a undei coincide cu direcția de oscilație; i. fenomen ce constă în ocolirea de către unde a obstacolelor; j. fenomenul de suprapunere a două sau mai multe unde de aceeași frecvență; k. diagramă în care componentele unui sunet sunt reprezentate în funcție de frecvențele și intensitățile lor; l. undă care apare în urma interferenței a două unde de amplitudini egale, care se propagă în sensuri contrare; m. punct în care undele coerente sosesc în concordanță de fază. | <ul style="list-style-type: none"> 1. prin propagarea oscilațiilor se generează unde; 2. unde <i>longitudinale</i>; 3. unde <i>transversale</i>; 4. funcția de undă; 5. unde elastice ; 6. frontul de undă; 7. lungimea de undă; 8. după formă, putem întâlni unde plane, unde sferice, unde cilindrice. 9. difracție; 10. interferență; 11. spectru; 12. undă staționară; 13. ventru. |
|---|---|

II. Pentru itemii următori, scrie pe foaia de răspuns litera corespunzătoare răspunsului considerat corect:

- 1. În cazul interferenței staționare (vezi [66]), nodurile reprezintă:
 - a) puncte în care amplitudinea este maximă;
 - b) puncte în care amplitudinea este minimă;
 - c) puncte în care amplitudinea este intermediară;
 - d) puncte în care amplitudinea este variabilă.
- 2. În cazul reflexiei undelor pe o suprafață rigidă (vezi [66]):
 - a) se pierde o semiundă;
 - b) unghiul de incidență este dublul unghiului de reflexie;
 - c) unghiul de incidență este egal cu jumătatea unghiului de reflexie;
 - d) unghiul de incidență este egal cu triplul unghiului de reflexie.

Răspunsuri:

II. 1. b. 2. a.



Testul 2

I. Găsește corespondența dintre definițiile și explicațiile cu trimiteri interdisciplinare din cele două coloane:

- a. sunete muzicale;
- b. ecou;
- c. infrasunete;
- d. înălțimea sunetului;
- e. supersonic;
- f. ultrasunete;
- g. seismograme;
- h. game;
- i. claviatură (vezi [67]);
- j. zgomote;
- k. pocnete;
- l. acord muzical;
- m. intervale muzicale;

Do	
Re	
Mi	
Fa	
Sol	
La	
Si	
Do	
Re	
Mi	
Fa	
Sol	
La	
Si	

[67]

- 1. sunete cu frecvența mai mică de 16 Hz;
- 2. sunet reflectat de un obstacol plasat în aer la distanțe mai mari de 17 m față de sursa sonoră;
- 3. unde utilizate de către delfini pentru localizarea obstacolelor și a prăzii;
- 4. avion cu viteză mai mare decât a sunetului în aer;
- 5. recepționate de la oscilațiile corzilor sau a coloanelor de aer din instrumentele muzicale, care sunt sediul unor unde staționare;
- 6. calitate a sunetului dependentă de frecvență;
- 7. nu sunt recepționate de urechea umană;
- 8. obținute la înregistrarea seismelor cu sisteme pendulante ce capătă mișcări de oscilație datorate propagării undelor elastice prin Pământ;
- 9. o secvență de câte șapte sunete separate prin intervale muzicale;
- 10. sunete produse de mișcări periodice;
- 11. sunete produse de mișcări neregulate;
- 12. sunete produse de o variație bruscă și scurtă a presiunii aerului;
- 13. două sau mai multe sunete produse simultan, separate prin intervale muzicale;
- 14. raportul dintre frecvențele a două sunete, ν_1 și ν_2 , reprezintă anumite numere întregi;
- 15. clapele pianului, orgii, acordeonului etc.

II. Pentru itemii următori, scrie pe foaia de răspuns litera corespunzătoare răspunsului considerat corect:

- 1. În cazul unui tub sonor, distanța dintre două ventre consecutive este:
 - a) jumătatea lungimii de undă;
 - b) dublul lungimii de undă;
 - c) egală cu lungimea de undă;
 - d) triplul lungimii de undă.
- 2. Calculează amplitudinea și faza inițială a mișcării oscilatorii obținută prin suprapunerea oscilațiilor paralele descrise de ecuațiile: $y_1 = 4 \sin(\omega t + \pi/3)$ m; $y_2 = 6 \sin(\omega t + \pi/6)$ m.

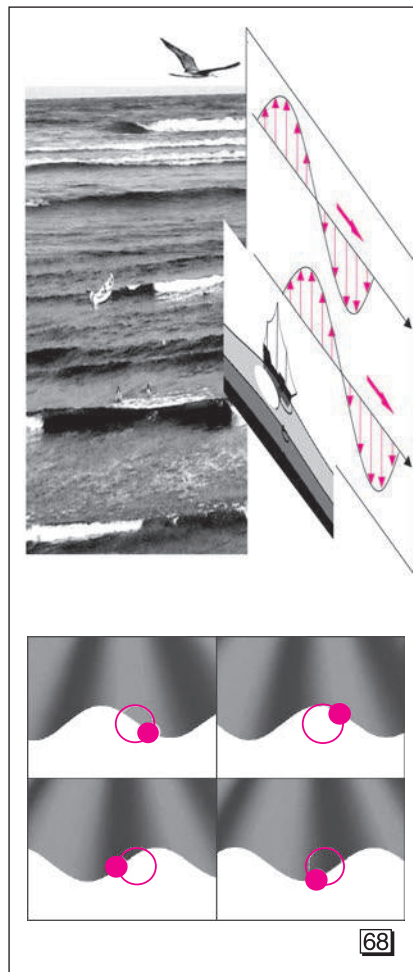
Răspunsuri:

- 1. a. 2. A = 9,57 m; $\tan \varphi = 1,24$.

Testul 3 (timp: 15 min)

Pentru itemii următori, scrie pe foaia de răspuns litera corespunzătoare răspunsului considerat corect:

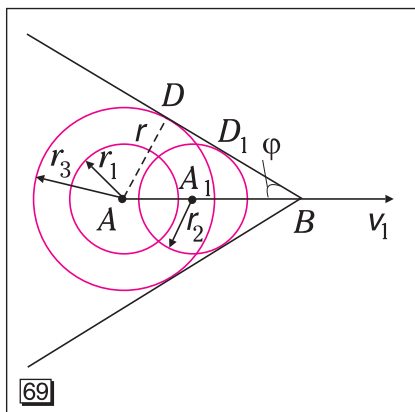
- În mediile de tip elastic, după trecerea perturbației:
 - mediul revine la starea inițială; b) mediul nu revine la starea inițială; c) mediul nu revine la starea inițială decât dacă perturbația este de tip sinusoidal; d) mediul revine foarte lent la starea inițială (după 2-3 ore).
- Un punct aflat la distanță de o sursă de unde elastice:
 - va efectua o mișcare asemănătoare cu mișcarea punctelor sursei, în fază cu sursa; b) nu va efectua nici o mișcare; c) va efectua o mișcare asemănătoare cu mișcarea punctelor sursei, dar întârziată; d) va efectua o mișcare asemănătoare cu mișcarea punctelor sursei, defazată cu 90 de grade.
- Poziția frontului de undă:
 - se modifică în timp; b) nu se modifică în timp deoarece viteza de deplasare a perturbației este de obicei constantă; c) se modifică în timp doar pentru medii elastice; d) se modifică în timp doar pentru oscilații de amplitudine și frecvență mare.
- În cazul interferenței, undele:
 - se perturbă reciproc; b) nu se perturbă reciproc; c) se perturbă reciproc doar dacă amplitudinea uneia este dubla amplitudinii celeilalte; d) se perturbă reciproc doar dacă amplitudinea uneia este triplul amplitudinii celeilalte.
- În regiunea în care se întâlnesc două unde mecanice, elongația rezultantă a punctelor este dată de:
 - numai de prima undă; b) numai de a doua undă; c) suma elongațiilor celor două unde; d) unda cu amplitudinea mai mare.
- În cazul interferenței staționare, minimele și maximele:
 - nu sunt localizate în spațiu; b) sunt localizate în spațiu; c) sunt localizate în spațiu doar pentru unde sinusoidale; d) sunt localizate în spațiu doar pentru amplitudini mici ale undelor.
- Observând un corp care plutește, constatăm că acesta efectuează, în timpul trecerii valurilor:
 - mișcări circulare; b) mișcări parabolice; c) mișcări rectilinii; d) mișcări iperbolice.



Valurile de la suprafața apei nu sunt de natură elastică, deoarece stratul de apă de la suprafață este antrenat într-o mișcare tangențială datorită frecărilor cu stratul de aer. Straturile de apă de la suprafață antrenate de aer se vor deplasa mai repede decât straturile de apă din adâncime.

Răspunsuri:

1. a. 2. c. 3. a. 4. b. 5. c. 6. b. 7. a. Datorită frecărilor dintre straturile de apă, în interiorul valurilor, corpul care plutește, ca și apa, capătă mișcări de rotație (vezi [68]).



Un avion supersonic se deplasează cu viteză mai mare decât a sunetului în aer. În timp ce avionul a parcurs distanța $AB = s_1 = V_1 t$, unda de presiune produsă în A s-a propagat pe distanța $AD = r = V t$. În fiecare punct apar unde sferice care au frontul de undă pe un con în al cărui vârf se află avionul, cu generatoarea tangentă la undele formate. Observăm că $r = s_1 \sin \varphi_0$, de unde $V t = V_1 t \sin \varphi$, deci $\sin \varphi = V/V_1$, unde $\varphi \leq 90^\circ$. Această undă se propagă în direcție perpendiculară pe suprafața conului, producând un șoc asupra corpurilor întâlnite în cale.

Testul 4 (timp: 50 min)

I. La următoarele afirmații răspunde cu A dacă afirmația respectivă este adevărată sau cu F dacă este falsă:

1. Infrasonetele sunt recepționate de urechea umană.
2. Geologii analizează structura straturilor litosferice utilizând unde produse artificial (prin explozii).
3. Ecoul reprezintă un sunet reflectat de un obstacol plasat în aer la distanțe mai mari de 17 m față de sursa sonoră.
4. Înălțimea sunetului este dependentă de amplitudine.
5. Ultrasunete sunt utilizate de către delfini pentru localizarea obstacolelor și a prăzii.

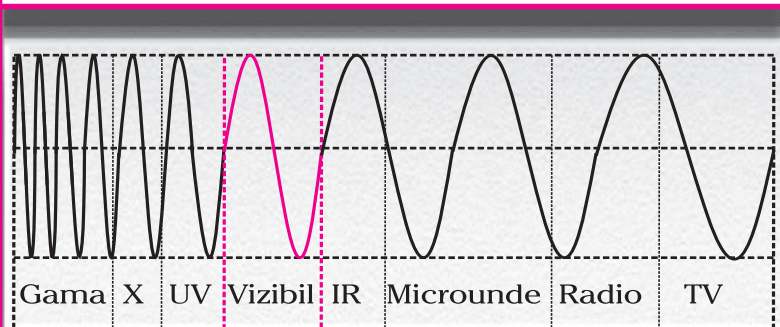
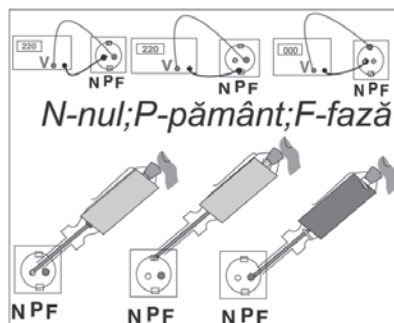
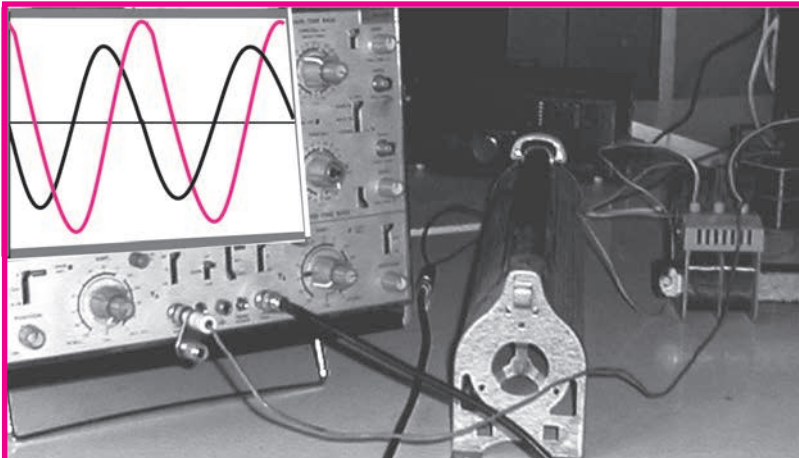
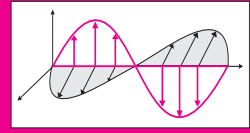
II. Rezolvă problemele următoare:

1. Perioada unei mișcări ondulatorii este de 3 ms. Diferența de fază este de $\pi/2$ pentru două puncte situate la distanța de 30 cm. Calculează viteza de propagare și lungimea de undă.
2. Calculează frecvența fundamentală de oscilație pentru o coardă de 1 m lungime, cu masa unității de lungime de 2 g/m, când tensiunea din fir este de 80 N.
3. O coardă de 1 m lungime, cu masa unității de lungime de 2 g/m, oscilează când tensiunea din fir este 80 N. Calculează tensiunea din coardă, când frecvența fundamentală devine 120 Hz.
4. Punctele unui mediu în care s-au format unde, execută mișcări periodice descrise de ecuația: $y = 3 \sin(120t - x/4)$ mm. Calculează viteza maximă a oscilațiilor punctelor mediului și viteza propagării unde.
5. Două unde care se propagă pe o coardă, în aceeași direcție, au aceeași frecvență (100 Hz) și lungimea de undă $\lambda = 0,01$ m. Dacă amplitudinea undelor este $A = 2$ cm, iar defazarea lor inițială este de $\pi/3$, calculează amplitudinea unde rezultante.
6. Un avion poate produce, prin împingerea laterală a straturilor din calea sa, o undă de șoc (un șoc de presiune) devenind sursă sonoră. În ce condiții apare unda de șoc?

Răspunsuri:

- II. 1.** 400 m/s; 1,2 m. **2.** 100 Hz. **3.** 115 N. **4.** $v_{max} = 0,36$ m/s; $V_{fază} = 480$ m/s. **5.** $A = 3,46$ cm. **6.** Există soluție numai dacă viteza $V_1 > V$ de deplasare a avionului supersonic este mai mare decât viteza V de propagare a undelor de presiune formate în aer și va genera o undă conică datorită variațiilor de presiune (vezi [69]).

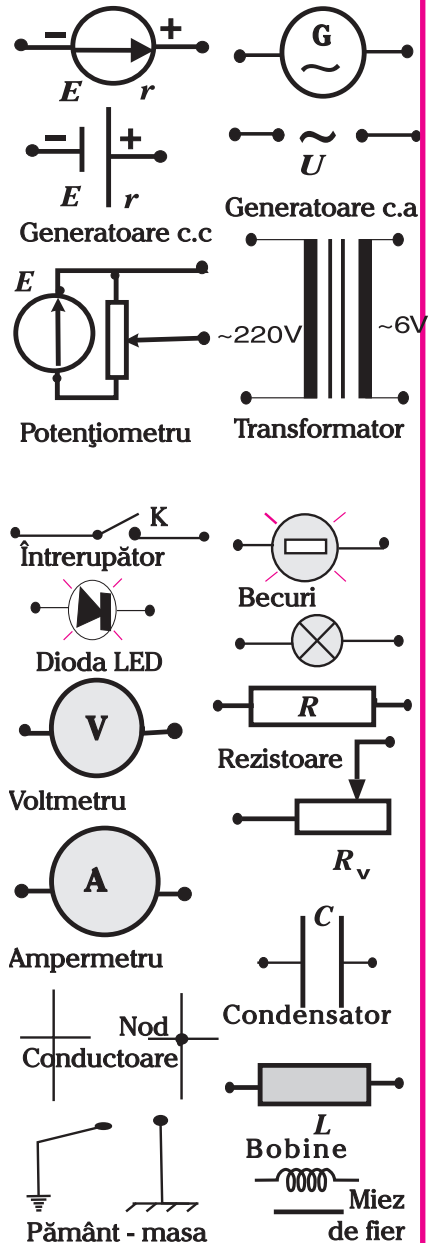
OSCILAȚII ȘI UNDE ELECTROMAGNETICE



„Pornind de la experimente și măsurători, fizicienii demonstrează că fenomenele naturale sunt guvernate de legi precise”

Richard Feynman — premiul Nobel, 1965

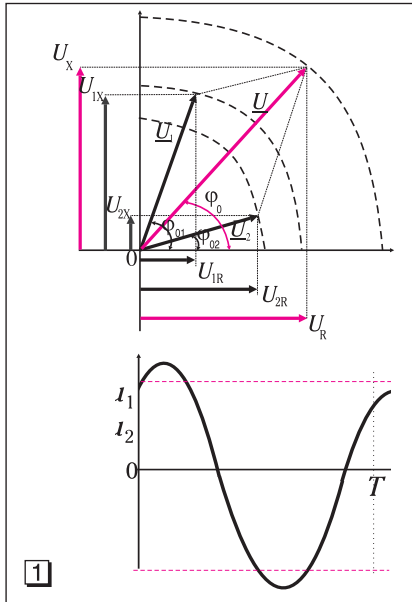
Simboluri pentru elementele circuitelor electrice



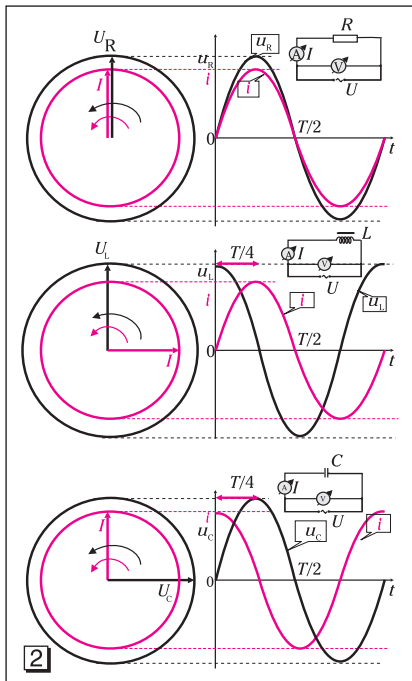


2.0. *CURENTUL ALTERNATIV

(recapitularea unor noțiuni de bază)



1



2

Observăm că numai într-un circuit cu un consumator de rezistență R mărimile curentului și tensiunii electrice devin maxime, minime și nule în aceleași momente de timp.

Valorile momentane (instantanee) ale mărimilor fizice se notează cu litere mici (u , e , i).

La prizele monofazate pentru consumatori, tensiunea electrică alternativă are: valoarea maximă $E_{max} = 220 \cdot \sqrt{2}$ V, valoarea efectivă $U = 220$ V și frecvența $\nu = 50$ Hz.

Valorile efective ale intensității curentului alternativ (I) și, respectiv, valoarea efectivă a tensiunii electrice alternative (U) sunt egale cu valorile corespunzătoare unui curent continuu (c.c.) de intensitate I care, circulând prin același rezistor de rezistență R , când tensiunea la capetele acestuia este U , produce prin efect Joule aceeași cantitate de căldură Q într-un interval de timp egal cu perioada T a semnalului electric considerat.

Mărimilor electrice oscilante, curenți și tensiuni electrice, le asociem câte un fazor.

Fazorul este un vector care se rotește în plan cu viteza unghiulară ω , având mărimea egală cu valoarea maximă sau efectivă a mărimii oscilante și poziția inițială dependentă de unghiul de fază inițială φ_0 cu direcția axei Ox (vezi [1]). Ecuațiile mărimilor oscilante pot fi obținute prin proiecția pe o axă a acestor fazori, deoarece proiecțiile pe axe ale fazorilor de amplitudini U_1 și U_2 au aceeași dependență de timp ca și mărimile oscilante.

Deoarece compunerea mărimilor oscilante de aceeași natură se reduce la adunarea vectorială a fazorilor asociați, obținem:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos \Delta\varphi_0}, \text{ unde } \Delta\varphi = \Delta\varphi_0 = \varphi_{01} - \varphi_{02}.$$

Deoarece proiecția fazorului rezultat U este egală cu suma proiecțiilor celor doi fazori U_1 și U_2 pe aceeași axă, obținem:

$$\begin{cases} U \sin \varphi_0 = U_1 \sin \varphi_{01} + U_2 \sin \varphi_{02} \\ U \cos \varphi_0 = U_1 \cos \varphi_{01} + U_2 \cos \varphi_{02} \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{U_1 \sin \varphi_{01} + U_2 \sin \varphi_{02}}{U_1 \cos \varphi_{01} + U_2 \cos \varphi_{02}}.$$

Faza unei mărimi oscilante este argumentul funcției trigonometrice. Defazajul a două mărimi oscilante cu aceeași pulsație ω rămâne constant în timp: $\Delta\varphi = \Delta\varphi_0$ (vezi [2]). Defazajul temporal între aceste mărimi oscilante este

$$\Delta t = \frac{T \Delta\varphi}{2\pi}.$$

Osciloscopul electronic (numit inițial osciloscop catodic) se bazează pe mișcarea fasciculelor de electroni, în câmpuri electrice și magnetice, într-un tub vidat cu ecran fluorescent. În *tunul electronic* (T.e.), electronii sunt emiși de catodul încălzit indirect de filamentul incandescent dintre punctele $f-f'$, alimentat cu o mică tensiune alternativă sau continuă (vezi [3]). Acești electroni sunt accelerați spre anod (electrodul pozitiv față de catod) de către câmpul electric dintre electrozi. Electronii din fasciculul care trece prin orificiul anodului se deplasează în vid, cu viteză constantă, spre ecran.

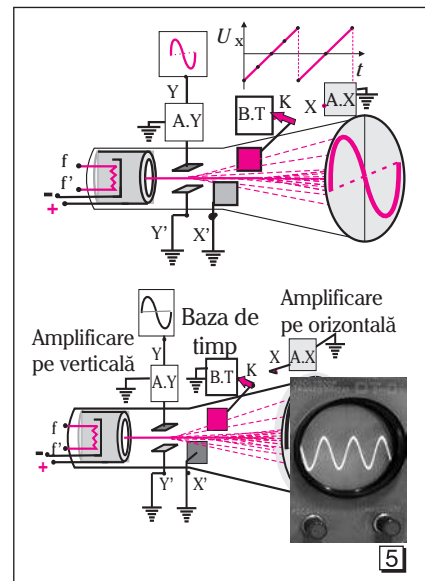
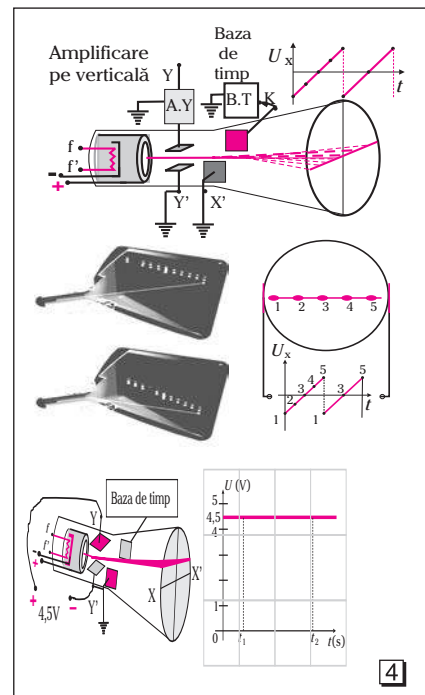
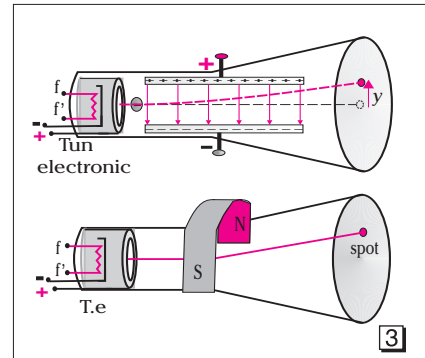
Pata luminoasă obținută pe ecran (spotul luminos), în zona în care acesta este lovit de electroni, este deviată de la poziția centrală atunci când fasciculul de electroni este deviat în câmpul electric dintre plăcile unui condensator electric încărcat sau în câmpul magnetic al unui magnet. În câmpul electric transversal dintre armăturile condensatorului cu armăturile orizontale, deviația y pe verticală a electronilor față de direcția inițială este proporțională cu tensiunea U dintre armăturile condensatorului. După ce ies din câmpul electric al condensatorului, electronii se deplasează pe o traiectorie rectilinie.

Condensatorul cu plăcile verticale, conectate la bornele XX' , produce devierea (deflexia) pe orizontală a fasciculului de electroni (vezi [4]).

La plăcile verticale, se poate aplica din exterior o tensiune (care poate fi amplificată sau diminuată prin intermediul unui buton de pe panoul de comandă) sau o tensiune $u = f(t)$, în formă de dinți de ferăstrău, de la un generator interior pentru *baza de timp* (B.T.). Spotul luminos se deplasează repede pe orizontală, încât descrie pe ecran o linie orizontală, considerată axa timpului. Când spotul ajunge în extremitatea ecranului, circuitul B.T. produce o întoarcere foarte rapidă (bruscă) a spotului, după care se reia deplasarea spotului. Dacă se folosește baza de timp și se aplică tensiunea unei baterii la bornele YY' ale plăcilor orizontale, pe ecran se observă o linie orizontală, deplasată pe verticală față de axa timpului (vezi [4]).

Dacă aplicăm tensiunea de analizat la bornele YY' , curba observată pe ecran reprezintă variația în timp a acelei tensiuni, $u(t)$ (vezi [5]).

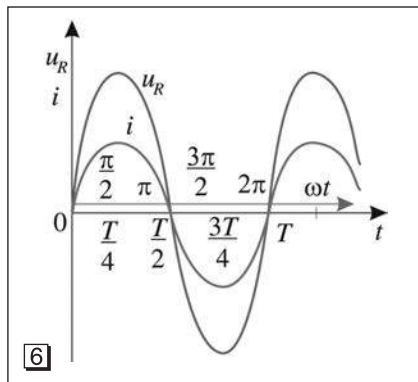
Focalizarea spotului, amplificarea deplasării fasciculului pe verticală (A.Y) și pe orizontală (A.X) sunt comandate prin butoanele de pe panoul osciloscopului.





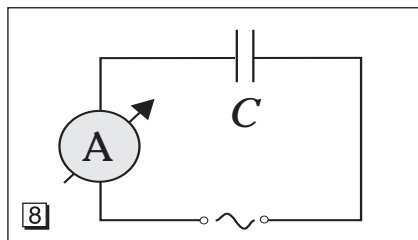
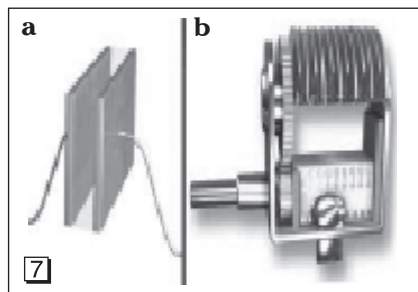
2.1. CIRCUITUL RLC ÎN CURENT ALTERNATIV

Comportamentul rezistorului, bobinei și condensatorului în curent continuu și în curent alternativ



Tensiunea alternativă $u = U_{\max} \sin \omega t$, aplicată la bornele unui rezistor ohmic de rezistență R , și intensitatea curentului prin rezistor oscilează în fază:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_{\max}}{R} \cdot \sin \omega t = I_{\max} \sin \omega t.$$



Un ampermetru de curent alternativ (c.a.) indică un curent a cărui intensitate crește odată cu frecvența. Condensatorul ideal blochează trecerea curentului la frecvențe joase (când $\omega \rightarrow 0$) și se comportă ca un scurtcircuit la frecvențe înalte (când $\omega \rightarrow \infty$).

Știi deja că, în circuitele închise de curent continuu, electronii liberi se deplasează într-un singur sens. În circuitele închise de curent alternativ, sensul de deplasare al electronilor se schimbă odată cu o anumită frecvență.

Comportamentul rezistorului în curent continuu și în curent alternativ

În circuitele de curent alternativ, rezistența electrică produce efect Joule ca în curent continuu și nu introduce defazaj între intensitate și tensiune (vezi [6]).

Legea lui Ohm se poate aplica pentru valorile instantanee ale intensității curentului și tensiunii electrice, pentru valorile maxime și pentru valorile efective ale acestora:

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{R}, I = \frac{U}{R}, \text{ unde } U_{\max} = U\sqrt{2} \text{ și } I_{\max} = I\sqrt{2}.$$

Comportamentul condensatorului în curent continuu și în curent alternativ

Condensatorul este elementul de circuit cu două armături conductoare, care pot fi fixe (vezi [7a]) sau mobile, conectate în paralel (vezi [7b]).

La închiderea circuitului format dintr-un generator de curent continuu (c.c.), un condensator, un voltmetru și un ampermetru de curent continuu (c.c.) cu diviziunea zero la mijlocul scalei, se observă că acul ampermetrului deviază brusc și apoi revine la zero. Deci, după încărcarea condensatorului, rezistența acestuia devine infinit de mare. Intensitatea instantanee i a curentului este maximă în momentul conectării condensatorului descărcat, iar tensiunea între armături este nulă, deci condensatorul se încarcă într-un interval de timp, după care tensiunea instantanee u_C devine maximă. La conectarea inversă a generatorului, se observă din nou deviația (în sens invers) și revenirea la zero.

Alimentăm circuitul cu tensiune alternativă (vezi [8]). Măsurăm tensiunea efectivă și intensitatea efectivă cu instrumente de curent alternativ (c.a.).

Raportul $\frac{U}{I} = X_C$ reprezintă rezistența aparentă introdusă

de condensator în curent alternativ, numită **reactanță capacitivă**. Reactanța se măsoară în ohmi. Această relație reprezintă legea lui Ohm pentru condensator în curent alternativ. Reactanța capacitivă X_C depinde de mărimea capacității C a condensatorului și de frecvența ω a procesului

de încărcare-descărcare a condensatorului: $X_C = \frac{1}{\omega C}$, unde $\omega = 2\pi\omega$.

Mărimile alternative se reprezintă grafic ca în figura [9].

Dacă spunem că un condensator ideal (cu rezistență infinită între armături) defazează intensitatea curentului în avans cu $\frac{\pi}{2}$ față de tensiune, atunci este echivalent cu a spune

că defazează tensiunea cu $\frac{\pi}{2}$ în urma intensității curentului:

$$\Delta\varphi_{i-u} = \frac{\pi}{2}, \quad \Delta\varphi_{u-i} = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{cases} i = I_{\max} \sin(\omega t + \varphi_{01}) \\ u_c = U_{\max} \sin(\omega t + \varphi_{02}) \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta\varphi_{i-u} = \omega t + \varphi_{01} - \omega t - \varphi_{02} = \varphi_{01} - \varphi_{02} = \frac{\pi}{2}.$$

Dacă se consideră ca referință $\varphi_{02} = 0$, atunci $\varphi_{01} = \frac{\pi}{2}$.

Reține!

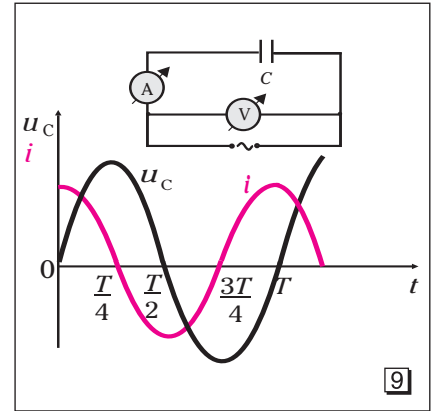
În circuitele de curent alternativ, condensatorul ideal introduce o rezistență aparentă, numită **reactanță capacitivă** și defazează tensiunea în urma intensității

cu $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Valorile maxime și efective ale tensiunii și intensității curentului electric verifică legea lui Ohm într-un circuit de curent continuu (asociat), în care rezistența ohmică este egală cu reactanța capacitivă:

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{X_C} \text{ și } I = \frac{U}{X_C}, \text{ unde } X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Condensatorul real (cu pierderi) este un condensator cu o rezistență finită a dielectricului dintre armături.



Pe ecranul unui osciloscop cu două spoturi constatăm că tensiunile de la capetele unui rezistor ohmic și dintre armăturile unui condensator înseriat cu aceasta sunt defazate cu $\Delta t_{i-u} = \frac{T}{4}$ deoarece tensiunea $u = U_{\max} \sin \omega t$, aplicată rezistorului și intensitatea curentului prin rezistor oscilează în fază.

Defazajul temporal Δt_{i-u} corespunde unui defazaj unghiular $\Delta\varphi_{i-u} = \frac{\pi}{2}$

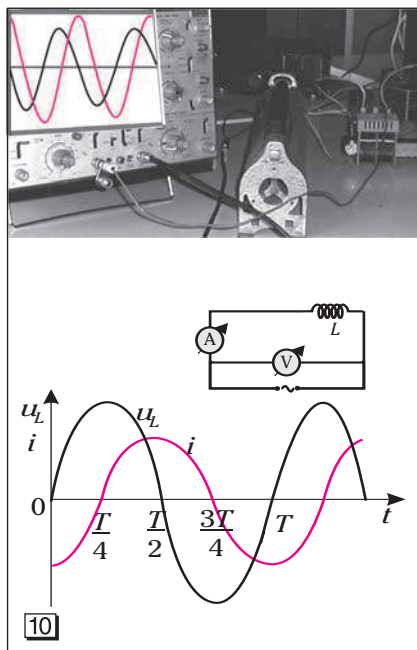
între argumentele funcțiilor trigonometrice din expresiile matematice care descriu evoluția în timp a acestor mărimi:

$$u_c = U_{\max} \sin \omega t = U\sqrt{2} \sin \omega t$$

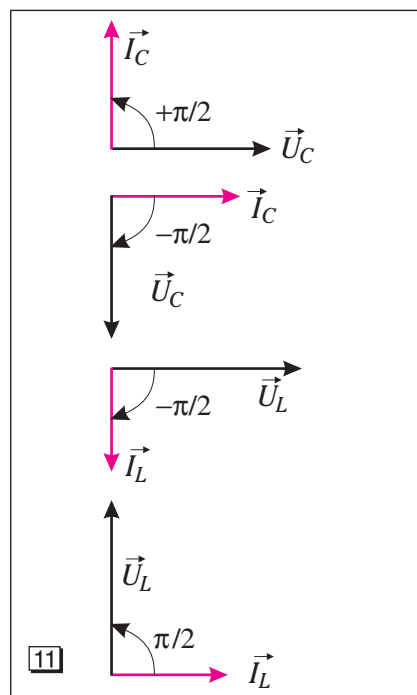
și

$$i = I_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

unde I și U sunt valorile efective ale celor două mărimi electrice.



Pe ecranul unui osciloscop cu două spoturi constatăm că tensiunile de la capetele unei bobine și ale unui rezistor înseriat cu aceasta sunt defazate. Valoarea instantanee a tensiunii u_L este maximă când valoarea instantanee a intensității curentului devine nulă.



Comportamentul bobinei în curent continuu și în curent alternativ

Tensiunea alternativă u aplicată la capetele unei bobine ideale (fără rezistență ohmică) compensează t.e.m. autoindusă e_a . Inductanța L a bobinei ideale defazează intensitatea curentului $i = I_{max} \sin \omega t$ în urmă (devans de fază)

cu $\Delta \varphi_{i-u} = -\frac{\pi}{2}$ și $\Delta t_{i-u} = -\frac{T}{4}$ față de tensiunea electrică, datorită fenomenului de autoinducție (vezi [10]).

Bobina ideală introduce într-un circuit de curent alternativ o rezistență aparentă cu mărimea $X_L = \omega L$ și dimensiunile unei rezistențe, numită **reactanță inductivă**.

Valorile maxime și efective ale tensiunii și intensității curentului electric verifică legea lui Ohm într-un circuit de curent continuu (asociat), în care rezistența ohmică este egală cu reactanța inductivă:

$$X_L = \omega L.$$

Legea lui Ohm pentru o bobină ideală în curent alternativ se poate scrie pentru valorile maxime sau efective:

$$I_{max} = \frac{U_{max}}{X_L} \text{ și } I = \frac{U}{X_L}.$$

Putem conecta o bobină reală (de rezistență ohmică R) într-un circuit de curent continuu și apoi într-un circuit de curent alternativ. Măsurăm cu instrumentele adecvate (selectând scala corespunzătoare, dacă folosim un multimetru) și calculăm raportul $\frac{U_{c.c.}}{I_{c.c.}} = R$, respectiv $\frac{U_{ef}}{I_{ef}} = Z$.

Constatăm că rezistența bobinei în curent continuu este mai mică decât rezistența în curent alternativ, numită **impedanță** și notată cu Z .

Reține!

În circuitele de curent alternativ, inductanța defazează tensiunea înaintea intensității cu 90° și introduce o rezistență aparentă, numită **reactanță inductivă**.

În schemele electrice, se folosesc ca simboluri grafice pentru bobine un dreptunghi hașurat sau câteva spire, având alături notația inductanței L sau a reactanței inductive X_L .

O bară paralelă cu simbolul folosit indică bobină cu miez feromagnetic fix.

Funcționarea unor circuite de curent alternativ întâlnite în practică

Fazorii \bar{I} și \bar{U} , atașați mărimilor electrice oscilante, au mărimile egale cu valorile efective ale acestora — I și respectiv U (vezi [11]) — și sunt defazați în circuitele de curent alternativ astfel:

$$\Delta\varphi_{\bar{I}-\bar{U}_L} = -\frac{\pi}{2} \text{ sau } \Delta\varphi_{\bar{U}_L-\bar{I}} = +\frac{\pi}{2}, \quad \Delta\varphi_{\bar{I}_C-\bar{U}_C} = +\frac{\pi}{2} \text{ sau } \Delta\varphi_{\bar{U}_C-\bar{I}_C} = -\frac{\pi}{2}$$

Observație:

În diagramele fazoriale, valorile efective se notează cu litere mari. Prin convenție, se poate folosi o bară deasupra sau dedesubtul notației folosite sau chiar vector.

*Diagrama fazorială pentru un circuit RL serie

Scriem ecuația tensiunilor momentane pentru circuitul RL (bobina reală cu rezistența ohmică R și inductanța L) în curent alternativ, a cărui schemă este prezentată în figura [12]:

$u = u_R + u_L$, unde

$$u_R = Ri = RI\sqrt{2}\sin\omega t; \quad i = I\sqrt{2}\sin\omega t;$$

$$u_L = X_L i = X_L I\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right); \quad u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_{bob}).$$

$$\text{Obținem: } U\sin(\omega t + \varphi_{bob}) = RI\sin\omega t + X_L I\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Ecuația se rezolvă construind **diagrama fazorială**. Asociem fiecărei mărimi sinusoidale un fazor cu modulul egal cu valoarea efectivă și orientat cu unghiul de fază față de axa de referință a intensității curentului considerat la momentul inițial.

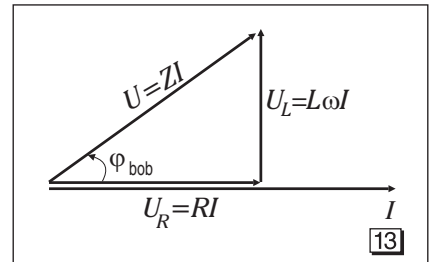
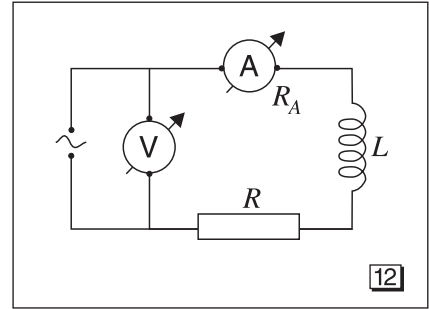
Rezultă ecuația fazorială: $\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L$,

unde $U_R = RI$ și $U_L = X_L I = \omega LI$.

Construim diagrama fazorială: Desenăm vectorul \bar{U}_R în fază cu \bar{I} și vectorul \bar{U}_L din vârful vectorului \bar{U}_R , perpendicular pe \bar{I} și \bar{U}_R (vezi [13]). Vectorul rezultat \bar{U} se obține prin unirea originii primului vector desenat cu vârful ultimului vector desenat. Tangenta defazajului dintre tensiunea și

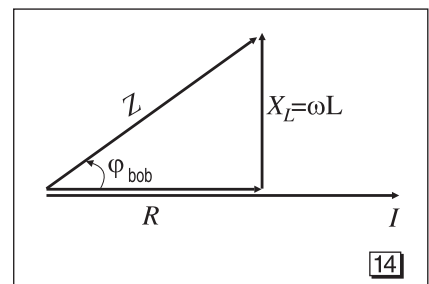
intensitatea curentului este: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega L}{R}$.

Din triunghiul tensiunilor, se obține **triunghiul impedanțelor**, cu laturile: $R = Z\cos\varphi$, $X_L = Z\sin\varphi$ și $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ (vezi [14]).



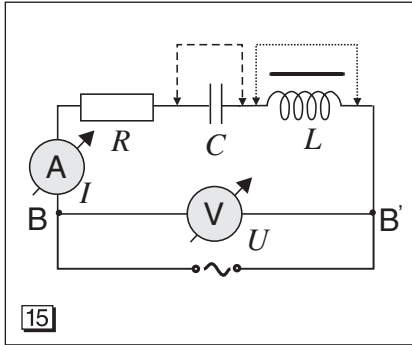
Din triunghiul tensiunilor, obținem mărimea tensiunii de la bornele bobinei reale:

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \\ &= I\sqrt{R^2 + X_L^2} = \\ &= I\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = IZ \end{aligned}$$



Impedanța bobinei reale este definită de relația:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \text{ (}\Omega\text{)}.$$



15

*Diagrama fazorială pentru un circuit RLC serie

Putem conecta în serie un rezistor cu rezistența R , o bobină ideală cu inductanța L , un condensator cu capacitatea C și un generator electric cu frecvența variabilă (vezi [15]). Dacă scurtcircuităm bobina sau condensatorul, mărimea impedanței circuitului, $Z = \frac{U}{I}$, crește.

Tensiunea măsurată U nu este egală cu suma tensiunilor pe elementele circuitului, deci tensiunile se adună ca mărimi fazoriale.

Circuitul RLC serie este parcurs de un curent de intensitate $i = I_{\max} \sin \omega t$ atunci când la borne este tensiunea electrică: $u = U_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$. Unghiul φ este defazajul între tensiune și intensitatea curentului. Scriem legea a doua a lui Kirchhoff în valori instantanee:

$$u + e_a = u_R + u_C \text{ sau } u = u_R + u_L + u_C,$$

unde $u_L = -e_a$ (vezi [16]).

Știm că: tensiunea momentană (instantanee) pe rezistorul ohmic u_R oscilează în fază cu intensitatea momentană i a curentului electric; tensiunea momentană u_L pe bobina ideală este defazată înaintea intensității momentane i cu $\frac{\pi}{2}$ (radiani); tensiunea momentană u_C pe condensator este în urma intensității momentane i cu $\frac{\pi}{2}$ (radiani). Rezultă ecuația:

$$U_{\max} \sin(\omega t + \varphi) = RI_{\max} \sin \omega t + X_L I_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + X_C I_{\max} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Scriem ecuația fazorială atașată circuitului RLC serie:

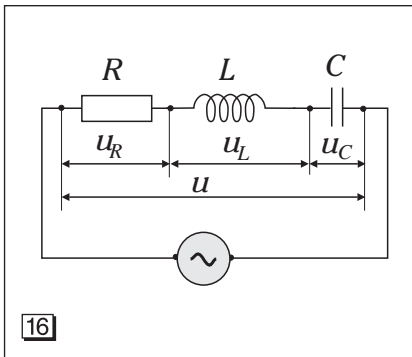
$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C,$$

și construim diagrama fazorială (vezi [17]). Obținem **impedanța Z a circuitului serie RLC**:

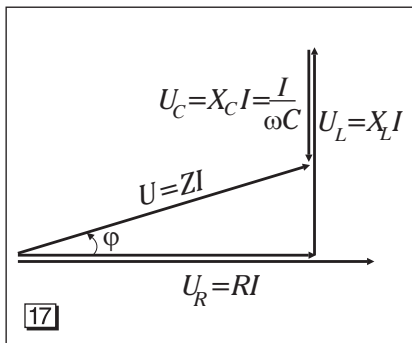
$$Z_{\text{serie}} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

și tangenta defazajului tensiunii față de intensitatea curentului electric din circuit:

$$\tan \varphi_{U-I} = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$



16



17

Din diagrama fazorială obținem expresia legii lui Ohm:

$$U = I \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = IZ, \text{ unde}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

reprezintă impedanța întregului circuit serie, iar $X = X_L - X_C$ reprezintă reactanța echivalentă a circuitului.

Probleme rezolvate

1. O bobină este conectată la o tensiune continuă $U_C = 100 \text{ V}$, fiind parcursă de un curent continuu de intensitate $I_C = 2,5 \text{ A}$. Aceeași bobină, conectată la o tensiune alternativă $U_a = 100 \text{ V}$, cu frecvența $\nu = 50 \text{ Hz}$, este parcursă de un curent de intensitate $I_a = 2 \text{ A}$. Se cer:

- rezistența bobinei;
- inductanța bobinei;
- defazajul între intensitatea și tensiunea la bornele bobinei prin funcția $\cos\varphi$.

Rezolvare:

$$\text{a) } R = \frac{U_C}{I_C} = 40 (\Omega);$$

$$\text{b) } L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi\nu} = \frac{3}{10\pi} (\text{H}); \quad \text{c) } \cos\varphi = \frac{R}{Z} = 0,8.$$

2. Într-un circuit RLC serie de curent alternativ, se cunosc: rezistența $R = 100 \Omega$, inductanța $L = 2 \text{ H}$, capacitatea $C = 50 \mu\text{F}$, tensiunea de alimentare la bornele circuitului $U = 150 \text{ V}$ și frecvența $\nu = 50 \text{ Hz}$. Se cer:

- diagrama fazorială a tensiunilor;
- intensitatea I a curentului din circuit;
- tensiunea la capetele inductanței.

Rezolvare:

a) Diagrama fazorială a tensiunilor este reprezentată în figura [18].

b) Aplicăm legea lui Ohm:

$$I = \frac{U}{Z},$$

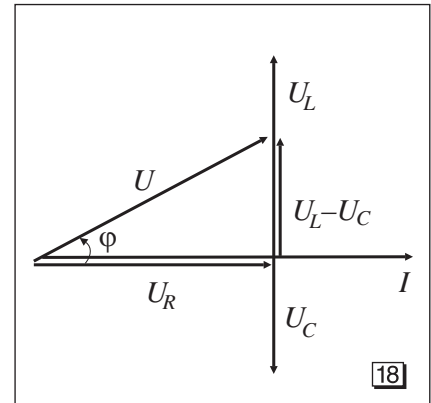
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = 0,556 \text{ A};$$

$$\text{c) } U_L = IX_L = I\omega L = 349,3 \text{ V}.$$

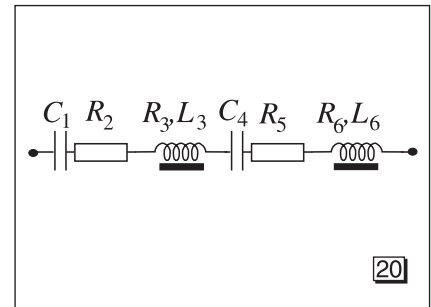
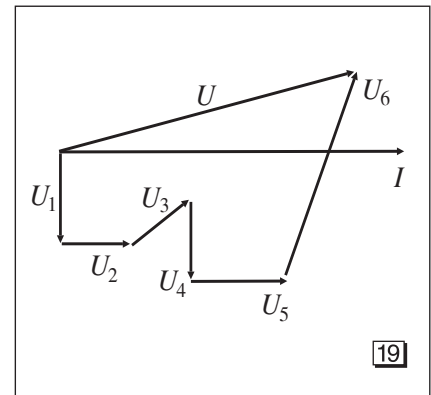
3. Care este schema electrică a circuitului corespunzătoare diagramei fazoriale [19]?

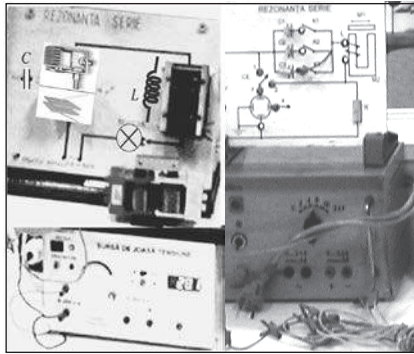
Rezolvare:

Schema electrică este reprezentată în figura [20].

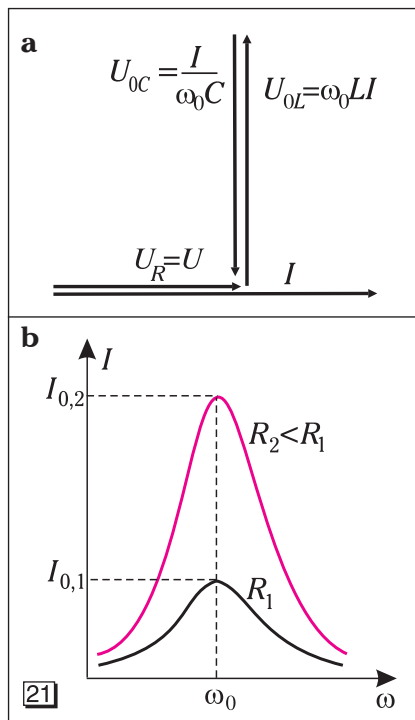


Tensiunea măsurată U nu este egală cu suma tensiunilor pe elementele circuitului, deci tensiunile nu se adună ca mărimile scalare, ci ca mărimile fazoriale.





Pentru studiu, se pot folosi panourile experimentale existente în laboratorul școlar sau pe care le poți confecționa și tu.



[21]a La rezonanță, tensiunile notate $U_{0,L}$ și $U_{0,C}$ pot deveni mai mari decât tensiunea $U = U_R$

[21]b La rezonanța tensiunilor, intensitatea curentului atinge valoarea maximă, $I_0 = \frac{U}{R}$, care depinde numai de rezistența ohmică a rezistorului din circuit.

*Funcționarea în regim de rezonanță a circuitelor RLC serie

Din analiza diagramei fazoriale a circuitului serie RLC (triunghiul tensiunilor sau triunghiul rezistențelor), se observă că fazorii tensiunilor \bar{U}_L la bornele bobinei și \bar{U}_C la armăturile condensatorului sunt în opoziție de fază, iar defazajul dintre fazorul tensiunii \bar{U} la bornele circuitului față de fazorul intensității \bar{I} a curentului electric depinde de diferența dintre mărimile fazorilor atașați acestor tensiuni ($U_L - U_C$). Poți face experimente și tu (vezi montajele din figurile alăturate)!

Dacă mărimile acestor fazori sunt egale, $U_L = U_C$, se îndeplinește condiția de realizare a **rezonanței tensiunilor**, care implică:

$$X = X_{0,L} - X_{0,C} = 0.$$

Obținem pulsația de rezonanță:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Perioada de rezonanță corespunzătoare este:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC},$$

iar frecvența de rezonanță se calculează cu formula lui Thomson:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

La rezonanță, tensiunile notate $U_{0,L}$ și $U_{0,C}$ sunt maxime și egale între ele (vezi [21]).

Dacă reactanțele sunt mai mari decât rezistența, atunci mărimile tensiunilor $U_{0,L} = U_{0,C}$ sunt mai mari decât mărimea tensiunii U de la bornele circuitului. Aceste supratensiuni pot atinge valori periculoase atunci când rezistența R este mică:

$$U_{0,L} = U_{0,C} = \omega_0 L I_0 = \frac{\omega_0 L}{R} \cdot U,$$

unde R poate fi rezistența filamentului unui bec.

La rezonanța tensiunilor, intensitatea curentului atinge valoarea maximă:

$$I_0 = \frac{U}{R},$$

care depinde numai de rezistența ohmică a rezistorului din circuit.

Tensiunea de la bornele circuitului ajunge în fază cu intensitatea curentului ($\varphi = 0$); $Z_0 = R$, deci impedanța devine ohmică.

Filamentul unui beculeț ajunge la incandescență în condiții de rezonanță (vezi [22]), dar nu mai luminează dacă modificăm frecvența tensiunii sau modificăm inductanța L (poziția miezului bobinei).

La un osciloscop cu două spoturi, se observă că, la rezonanță ($\omega = \omega_0$), defazajul dintre tensiunile u_R de la bornele rezistorului și u de la bornele circuitului este nul (vezi [23]).

Dacă $U_L > U_C$ (vezi [24]), predomină caracterul inductiv ($X_L > X_C$) și curentul este defazat în urma tensiunii ($\varphi > 0$).

Dacă $U_L < U_C$, predomină caracterul capacitiv ($X_L < X_C$) și curentul este defazat înaintea tensiunii de la bornele circuitului ($\varphi < 0$).

Factorul de calitate Q (numit și factor de supratensiune) arată de câte ori este mai mare, în condiții de rezonanță, tensiunea efectivă la bornele bobinei sau condensatorului față de tensiunea alimentare a circuitului:

$$Q = \frac{U_L}{U} \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{U_C}{U} \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

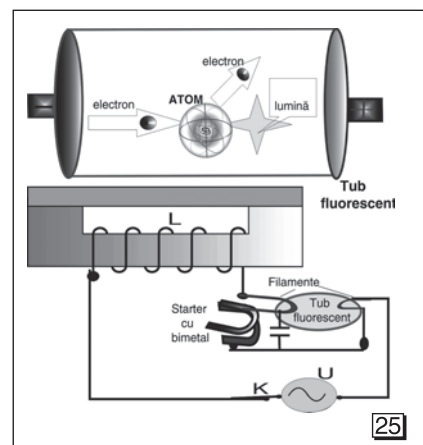
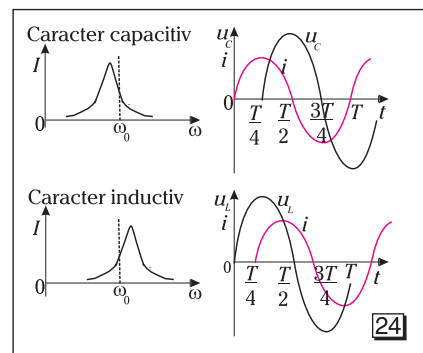
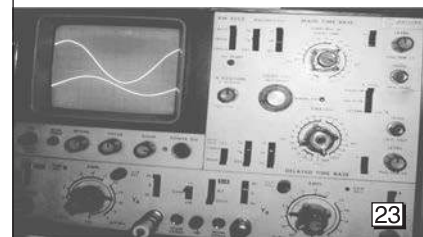
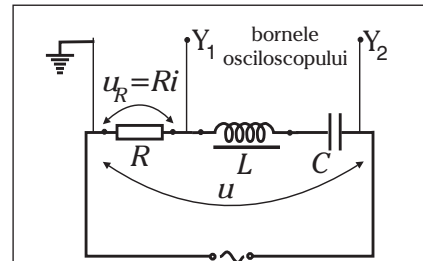
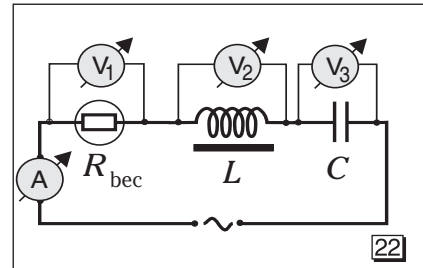
Aplicații în tehnică ale circuitelor de curent alternativ

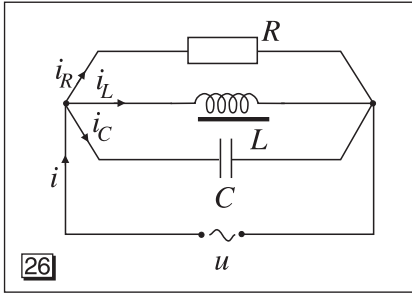
Circuitele de curent alternativ sunt utilizate în construirea aparatelor electrotehnice și dispozitivelor electronice: aparate electrocasnice de încălzire, osciloscopia, televizoare, radio-receptoare, echipamente cu relee, instalații de sudură cu arc electric, instalații electrice de tracțiune electrică, motoarele electrice de curent alternativ, circuite redresoare, starterul pentru tubul fluorescent.

Montajul electric al unui tub fluorescent este ansamblul bobină-tub-starter (vezi [25]). Tuburile fluorescente cu vapori de mercur la joasă presiune au doi electrozi reprezentați de cele două filamente între care se produc descărcări electrice în gaz, urmate de emisii de radiații ultraviolete.

Aceste radiații bombardează atomii stratului fluorescent, de pe interiorul tubului de radiații, care emit lumină vizibilă prin dezexcitare (fenomen care va fi studiat în clasa a XII-a).

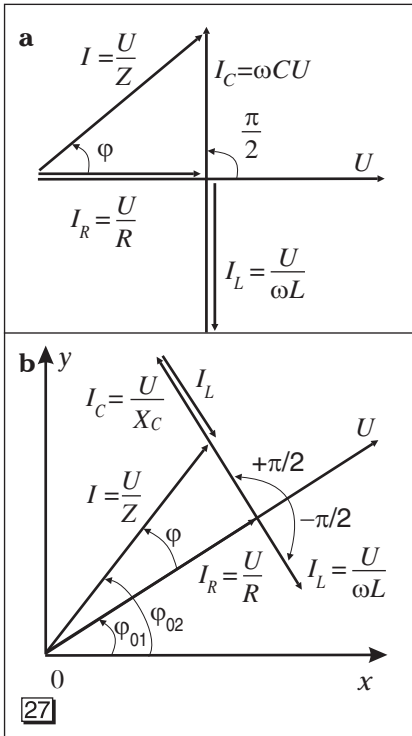
Lamela bimetalică a starterului, alimentat prin cele două filamente ale tubului și prin bobină, se curbează prin efect termic și face contact electric cu celalalt electrod pentru un mic interval de timp. Tensiunea de alimentare $U = 220 \text{ V}$ se distribuie pe reactanța bobinei în curent alternativ și pe filamente.





Un circuit RLC paralel este un circuit format dintr-un rezistor cu rezistența R , o bobină cu inductanța L și un condensator cu capacitatea C , toate conectate în paralel la bornele unui generator cu tensiunea electrică alternativă:

$$u = U_{\max} \sin \omega t = U\sqrt{2} \sin \omega t$$



Asociem fazorii corespunzători mărimilor oscilante și îi compunem fazorial:

$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C.$$

Analizând diagrama fazorială din figura 27b, constatăm că diferența de fază $\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01}$ este aceeași ca și în diagrama fazorială 27a, când am considerat una dintre faze ca fiind de referință: $\varphi_{01} = 0$ (zero fals) și $\varphi_{02} = \varphi$.

*Diagrama fazorială pentru un circuit paralel RLC

În circuitele de curent alternativ RLC paralel (vezi 26), intensitatea curentului prin bobina ideală este defazată cu $\frac{\pi}{2}$ în urma tensiunii la borne, iar prin firele de conectare a condensatorului este în avans cu $\frac{\pi}{2}$ față de tensiunea dintre armăturile acestuia. Curenții electrici au intensitățile:

$$i_R = \frac{U\sqrt{2}}{R} \sin \omega t, \quad i_L = \frac{U\sqrt{2}}{X_L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{și} \quad i_C = \frac{U\sqrt{2}}{X_C} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Valorile momentane ale intensităților satisfac legea I a lui Kirchhoff:

$$i = i_R + i_L + i_C.$$

Desenăm diagrama fazorială (vezi 27).

Valorile momentane ale intensității curentului electric de la bornele generatorului sunt defazate cu unghiul φ față de cele ale tensiunii momentane de la bornele comune pentru conectarea dipolilor electrici în paralel: $i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$. Înlocuim expresiile intensităților în relația corespunzătoare primei legi a lui Kirchhoff și obținem:

$$I \sin(\omega t + \varphi) = \frac{U}{R} \sin \omega t + \frac{U}{X_L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{U}{X_C} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Din triunghiul dreptunghic al intensităților, obținem:

$$\begin{aligned} I^2 &= I_R^2 + (I_C - I_L)^2 = U^2 \left[\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^2 \right] = \\ &= U^2 \left[\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

$$\text{unde } I_C = \frac{U}{X_C}, \quad I_L = \frac{U}{X_L} \quad \text{și} \quad I_R = \frac{U}{R}.$$

Rezultă legea lui Ohm în valori efective:

$$I = \frac{U}{Z_p},$$

unde **impedanța circuitului paralel** este definită prin relația:

$$Z_p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}}.$$

Defazajul dintre intensitatea curentului electric dat de generatorul electric și tensiunea la bornele acestuia este descris de relația:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_C - I_L}{I_R} = R \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) = R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right).$$

Se observă că:

$$I \cos \varphi = \frac{U}{R} \text{ și } I \sin \varphi = U \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right).$$

Unghiul φ poate fi pozitiv, negativ sau zero.

*Funcționarea în regim de rezonanță a circuitelor RLC paralel

Din analiza diagramei fazoriale a circuitului paralel RLC (triunghiul curenților), se observă că fazorii intensităților curenților \bar{I}_L prin bobină și \bar{I}_C prin latura condensatorului sunt în opoziție de fază, iar defazajul dintre fazorul \bar{I} al intensității curentului total prin circuit și fazorul tensiunii \bar{U} al tensiunii la bornele circuitului depinde de diferența dintre mărimile fazorilor acestor intensități ($I_C - I_L$).

La o anumită frecvență, numită **frecvență de rezonanță**, intensitatea curentului electric are valoare minimă (vezi [28]).

Dacă reactanțele $X_{0,L} = X_{0,C}$ sunt mai mici decât rezistența R , atunci mărimile intensităților curenților prin bobină și latura condensatorului sunt egale între ele (vezi [29]), dar sunt mai mari decât intensitatea curentului total dat de generator în circuit:

$$I_{0,L} = I_{0,C} = \frac{U}{\omega_0 L} = \frac{R}{\omega_0 L} I_{0,min}.$$

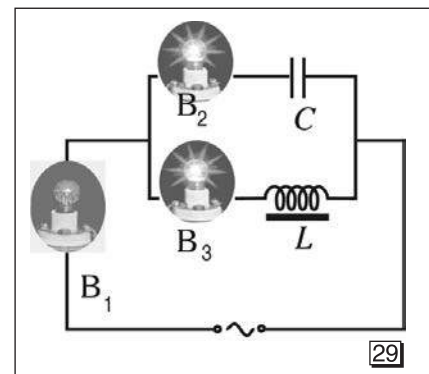
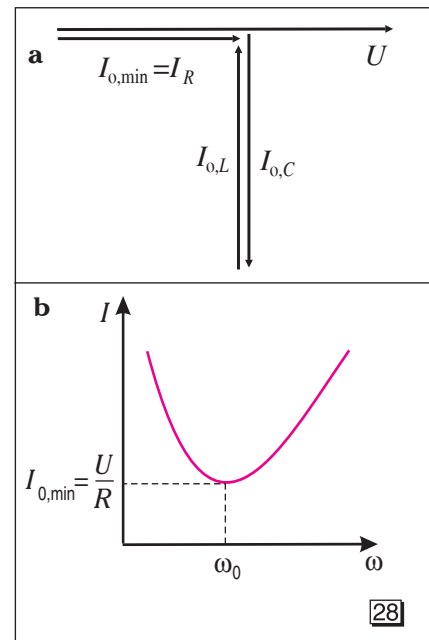
Pulsația corespunzătoare rezonanței tensiunilor se notează cu ω_0 .

Perioada de rezonanță corespunzătoare se calculează cu formula lui Thomson:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Reține!

La rezonanța curenților, intensitatea efectivă a curentului total atinge valoarea minimă $I_{0,min} = \frac{U}{R} = I_R$, care depinde numai de rezistența ohmică a rezistorului din circuit.



Dacă reglăm inductanța L (poziția miezului bobinei) sau capacitatea unui condensator variabil, putem obține condiția de rezonanță a curenților pentru frecvența unui generator electric.

Studiul circuitului RLC în curent alternativ

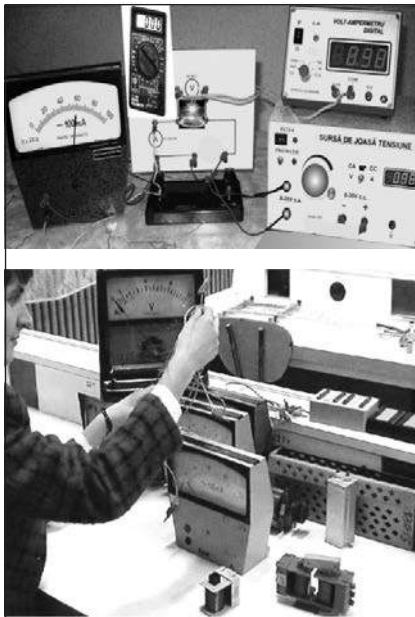
Investigație experimentală

Conectăm o bobină reală (de rezistență ohmică R) într-un circuit de curent continuu și apoi într-un circuit de curent alternativ. Măsurăm tensiunile și intensitățile curenților și calculăm raportul

$\frac{U_{c.c.}}{I_{c.c.}} = R$, respectiv $\frac{U_{ef}}{I_{ef}} = Z$. Constatăm că rezistența bobinei în curent continuu este mai mică

decât impedența Z .

Impedanța de sarcină Z_S între punctele A și B	$Z_S = 0$ (regim de scurtcircuit)	Z_S are valori foarte mari ($Z_S \rightarrow \infty$, regim de circuit deschis)	$Z_S \neq 0$ (regim de funcționare normală în sarcină)
Tensiunea U_{AB} între punctele A și B	$U_{AB} = 0$	$U_{AB} = U$	$U_{AB} = U \frac{Z_S}{Z_S + z_{sursă}}$
Intensitatea I a curentului electric prin circuit	$I_{sc} = \frac{U}{z_{sursă}}$	$I = 0$	$I = \frac{U_{AB}}{Z_S}$; $I = \frac{U}{Z_S + z_{sursă}}$



Impedanța bobinei (în c.a.) crește cu frecvența curentului alternativ și cu inductanța bobinei (la introducerea unui miez feromagnetic în bobină, de exemplu). Se vor folosi condensatoare pentru tensiune alternativă (neelectrolitice). Nu este admis ca intensitatea curentului electric prin circuit să fie mai mare decât valoarea maximă a scalei selectate.

Inductanța unei bobine se calculează cu relația

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi f}, \text{ unde } R = \frac{U_{c.c.}}{I_{c.c.}}.$$

Se poate folosi un generator electric de curent alternativ cu t.e.m. $U = 6-25$ V conectat în serie cu impedența de sarcină $Z_S = 100 \Omega$ și curentul maxim suportabil $I_{max} = 1-2$ A.

Materiale necesare: elemente de circuit (rezistor, bobină, condensator), reostat cu cursor, voltmetru, ampermetru.

Măsurăm cu instrumente adecvate (selectând scala corespunzătoare, dacă folosim un multimetru) și reprezentăm grafic $I = f(U)$ în c.c. și în c.a.

Dacă notăm cu U tensiunea pe o porțiune de circuit, atunci legea lui Ohm pentru această porțiune de circuit se poate scrie: $U = ZI$.

Citește și notează într-un tabel, valorile tensiunii U și, respectiv, ale intensității curentului electric I . Reprezintă grafic $I = f(U)$.

Nr. crt.	$U_{c.a.}$ (V)	$I_{c.a.}$ (A)	f (Hz)	$Z = U/I$ (Ω)

Rezolvarea unor circuite de curent alternativ (RLC serie, *RLC paralel, *rețele)

1. *Stabilirea formalismului* pentru circuitul serie RC_2 pentru circuitul paralel R_1C_2 și pentru rețeaua din figura [30] cu $n = 2$ noduri (A, B) și $l = 3$ laturi

Cu teoremele lui Kirchhoff, se obține un sistem de ecuații independente:

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 && \text{în nodul A;} \\ u &= u_1 + u_R && \text{în ochiul I sau } u = u_2 + u_R \text{ în circuitul serie } RC_2; \\ u_1 &= u_2 && \text{în ochiul II și în circuitul paralel } R_1C_2. \end{aligned}$$

În diagrama fazorială este notată ordinea construirii fazorilor. Orientarea acestora se obține, față de primul fazor ales arbitrar, ținând cont de defazajele cunoscute dintre tensiunea la bornele fiecărui element de circuit și intensitatea curentului electric prin acel element de circuit.

2. *Utilizarea formalismului în rezolvarea unei rețele de c.a.* care conține elemente de circuit RLC serie și *RLC paralel

Rețeaua RLC din figura [31] este alimentată cu o tensiune alternativă și are parametrii: $U_{BD} = 2\sqrt{2}$ V, $R = X_L = X_C = 2 \Omega$.

Se cer: valorile tensiunilor pe elementele de circuit, intensitatea I a curentului total, puterea activă primită de circuit, puterea aparentă și puterea reactivă.

Rezolvare:

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{R\sqrt{2}}; \quad I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{U}{R\sqrt{2}}; \quad I_1 = I_2 = 1 \text{ A};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{X}{R} = 1 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{4};$$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = I_1\sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ (A)};$$

$$U_1 = U_2 = U_L = U_C = 2 \text{ (V)}; \quad U_{AB} = U_{DF} = 2\sqrt{2} \text{ (V)}.$$

Fazorul \underline{U}_{AB} este coliniar cu fazorul \underline{U}_{BD} .

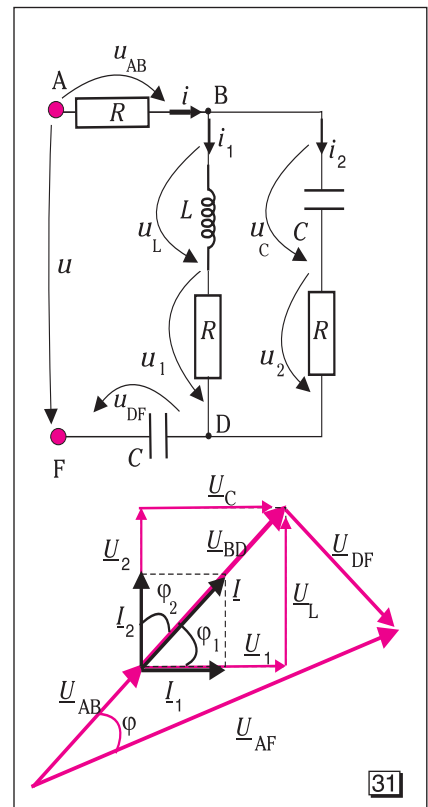
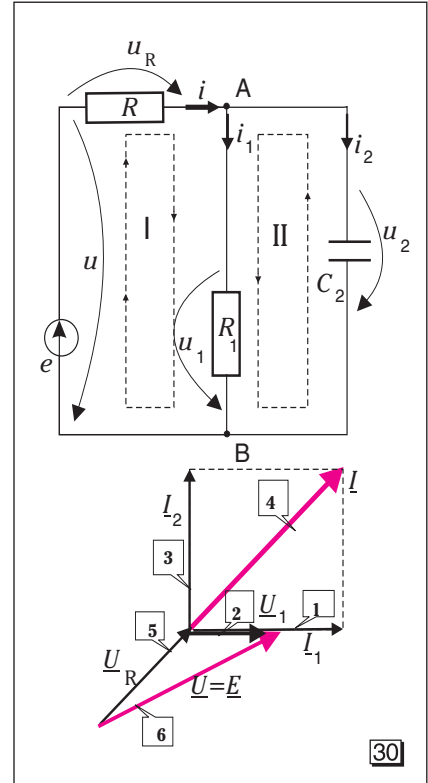
Fazorul \underline{U}_{DF} este perpendicular pe fazorul \underline{U}_{BD} .

Cu ajutorul diagramei fazoriale (vezi [31]), se calculează tensiunea la bornele circuitului $U_{AF} = 2\sqrt{10}$ (V).

$$\text{Puterea activă: } P_a = 2RI_1^2 + RI^2 = 8 \text{ (W)}.$$

$$\text{Puterea aparentă: } S = UI = \sqrt{20} \text{ (VA)}.$$

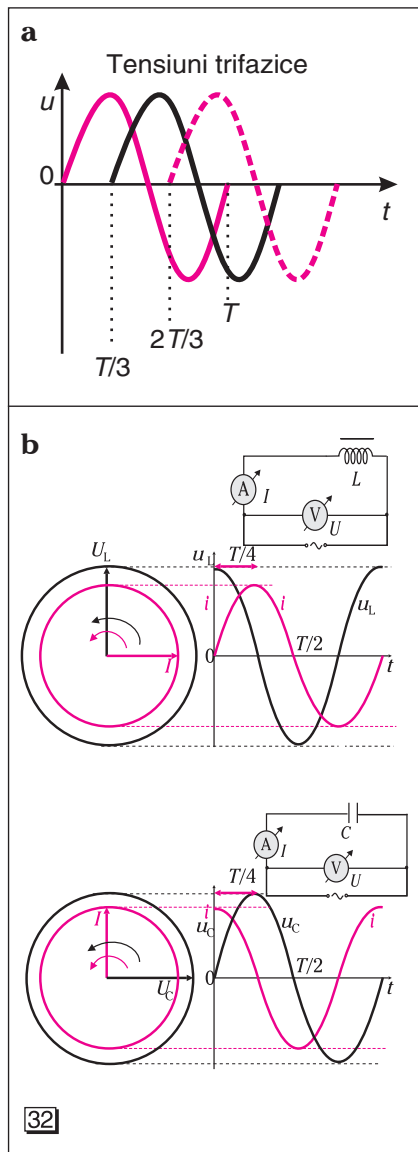
$$\text{Puterea reactivă: } P_r = \sqrt{S^2 - P_a^2} = \sqrt{80} \text{ (var)}.$$





Test pentru autoevaluare

Caută răspunsul corect la problemele următoare:



1. Ce valori au defazajele între tensiunea momentană u și intensitatea momentană i din circuitele reprezentate în figurile **32b** ?
2. Un circuit RLC serie alimentat este la rezonanță pentru o anumită frecvență a tensiunii. Dacă frecvența tensiunii de alimentare crește de n ori, atunci produsul reactanțelor este:
 - a) $X_L X_C = \sqrt{\frac{L}{C}}$; b) $X_L X_C = \sqrt{\frac{C}{L}}$;
 - c) $X_L X_C = 1$; d) $X_L X_C = \frac{L}{C}$.
3. Tensiunile momentane pe elementele unui circuit serie sunt: $u_1 = 10\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ (V) și, respectiv, $u_2 = 10\sqrt{2} \sin \omega t$ (V). Tensiunea de alimentare la bornele circuitului este:
 - a) $u = 20 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ (V); b) $u = 20 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$ (V);
 - c) $u = 10\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right)$ (V); d) $u = 10\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right)$ (V).
4. Un circuit RLC serie în curent alternativ se află la rezonanță. Dacă se dublează R , L și w , atunci se ajunge din nou la rezonanță, când capacitatea electrică:
 - a) se mărește de două ori;
 - b) se mărește de patru ori;
 - c) se micșorează de patru ori;
 - d) se micșorează de opt ori.
5. Într-un circuit serie, este îndeplinită condiția de rezonanță ($I_0 = U/R$). La frecvențe diferite de frecvența de rezonanță, tensiunea pe rezistorul ohmic R este:
 - a) $U_R < RI_0$; b) $U_R > RI_0$; c) nemodificată; d) practic nulă.
6. Două condensatoare de capacități $C_1 = 200$ pF și $C_2 = 300$ pF sunt conectate în serie între punctele unui circuit unde tensiunea este $u = 10\sqrt{2} \sin 1000t$ (V). Curentul prin această latură are valoarea:
 - a) $I = 0,10$ A; b) $I = 1,2$ mA; c) $I = 12$ A; d) $I = 0,1$ mA.

Răspunsuri:

1. $\Delta\varphi_{\text{tensiuni}} = \pm \frac{2\pi}{3}$; $\Delta\varphi_{I-U} = \pm \frac{\pi}{2}$. 2. d. 3. a. 4. d. 5. a. 6. b.

Funcționarea, din punct de vedere energetic, a circuitelor de curent alternativ

Puterea activă P_a reprezintă puterea dezvoltată prin efect Joule în rezistoarele circuitului.

Dacă la bornele unui circuit RLC se aplică o tensiune alternativă

$$u = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) = U_{\max} \sin(\omega t + \varphi),$$

atunci valoarea instantanee (momentană) a intensității curentului electric este dată de relația: $i = I\sqrt{2} \sin \omega t = I_{\max} \sin \omega t$.

Puterea instantanee în circuit este:

$$p = ui = U_{\max} I_{\max} \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t.$$

Folosim relația trigonometrică:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2},$$

unde $\alpha = \omega t + \varphi$ și $\beta = \omega t$, și obținem:

$$p = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi).$$

Aceleași concluzii se obțin dacă alegem faza inițială nulă pentru tensiune:

$$u = U_{\max} \sin \omega t \text{ și } i = I_{\max} \sin(\omega t - \varphi).$$

Valoarea medie, în timp de o perioadă, a mărimii cosinusoidale este nulă.

Puterea activă P_a este media puterii dezvoltate prin efect Joule (termic) în rezistoarele circuitului în intervalul de o perioadă (vezi [33]). Rezultă expresiile puterii active:

$$P_a = UI \cos \varphi \text{ și } P_a = RI^2.$$

Unitatea de măsură: $[P_a]_{\text{S.I.}} = \text{W}$.

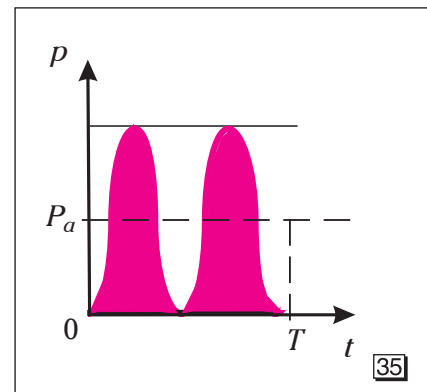
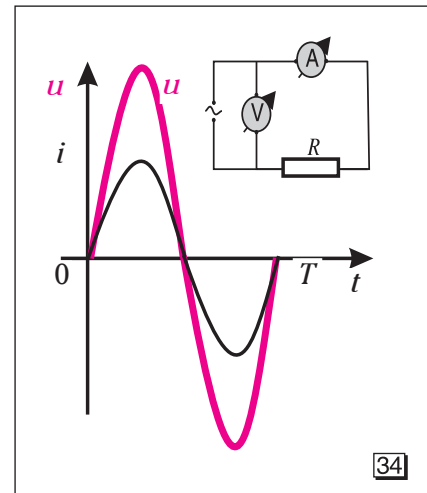
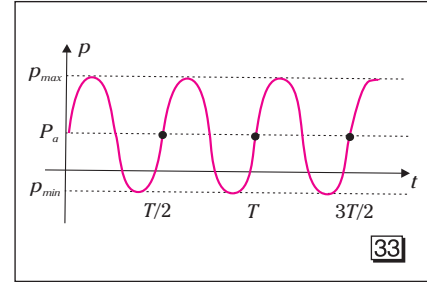
Dacă circuitul este format din generatorul de tensiune alternativă și un rezistor de rezistență R (vezi [34]), puterea activă, în acest caz, este dată de relația $P_R = UI$, deoarece $\cos \varphi = 1$.

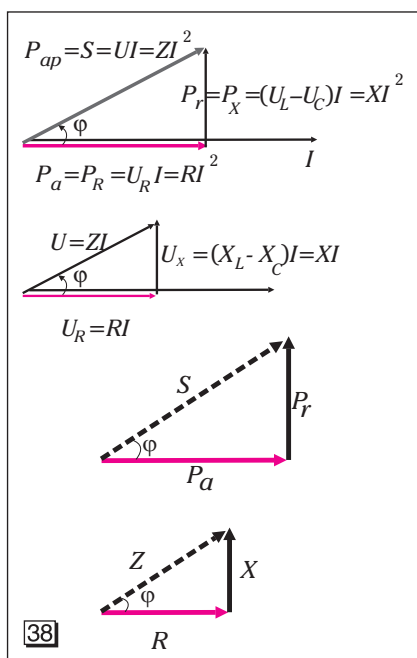
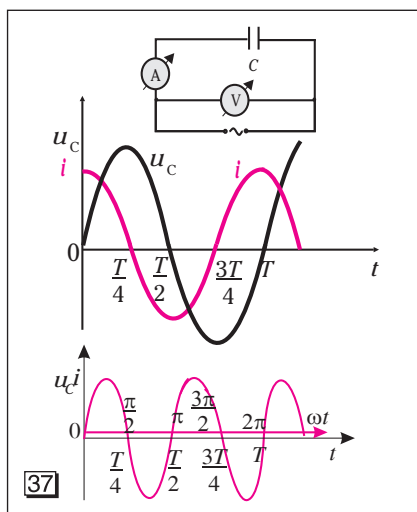
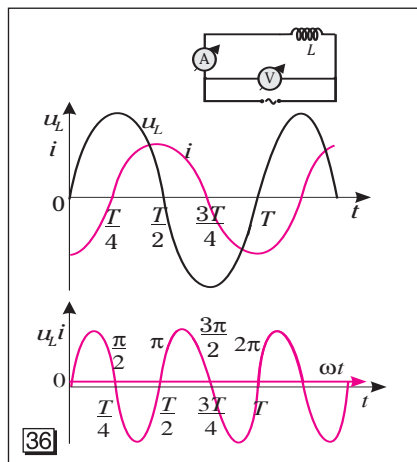
Energia electrică activă este cea consumată în intervalul de timp t (vezi [35]):

$$W_a = P_a t = UI t \cos \varphi.$$

Unitatea de măsură: $[W_a]_{\text{S.I.}} = \text{J}$, ca și în circuitele de curent continuu.

Factorul de putere $\cos \varphi$ este întotdeauna pozitiv și subunitar.





Puterea aparentă este mărimea dată de produsul UI , care se notează cu S sau P_{ap} și se măsoară în voltamperi: $[S]_{S.I.} = \text{VA}$.

Produsul $S = UI$ reprezintă valoarea maximă a puterii active.

Dacă circuitul este format din generatorul de tensiune alternativă și o bobină ideală de inductanță L , tensiunea la bornele bobinei este în avans de fază cu $\frac{\pi}{2}$ față de intensitatea instantanee a curentului prin circuit. În acest caz, puterea activă este nulă, deoarece valoarea medie în timp de o perioadă este nulă.

Bobina primește energie de la generator în timpul alternanței pozitive, o stochează în câmpul magnetic al bobinei și returnează generatorului, în alternanța negativă, tot atâta energie (vezi [36]).

Puterea reactivă inductivă $P_r = X_L I^2 = UI \sin \varphi$ nu este consumată, ci transferată alternativ între generator și bobină. Unitatea de măsură pentru puterea reactivă este: $[P_r]_{S.I.} = \text{VAR}$ (volt-ampere-reactiv).

Dacă circuitul este format dintr-un condensator ideal de capacitate C și generatorul de tensiune alternativă,

$P_r = -X_C I^2$ reprezintă **puterea reactivă capacitivă**. Puterea activă este nulă (vezi [37]). De ce?

Observații:

1. Puterea momentană oscilează în timp cu o pulsație dublă 2ω .

2. Într-un circuit RLC, puterea reactivă:

$P_r = (X_L - X_C) I^2 = X I^2 = UI \sin \varphi$ este pozitivă sau negativă.

Relația $P_r = UI \sin \varphi$ este valabilă pentru circuitele RLC serie sau paralel, unde U și I sunt valorile efective ale tensiunii la bornele circuitului și ale intensității curentului prin circuit, iar φ este defazajul dintre acestea.

3. Puterea reactivă $P_r = X I^2 = UI \sin \varphi$ nu este consumată, ci transferată alternativ între generator, condensator și bobină.

Relațiile dintre puterile activă (P_a), reactivă (P_r) și aparentă ($P_{ap} = S$) se obțin din triunghiul puterilor (vezi [38]):

$$P_a^2 + P_r^2 = S^2,$$

unde $P_a = S \cos \varphi$; $P_r = S \sin \varphi$ și $P_r = P_a \tan \varphi$.

Triunghiul puterilor se poate obține din triunghiul rezistențelor.

Energia activă consumată de aparatele electrocasnice $W_a = P_a \cdot t$ este citită pe contorul electric cu disc mobil (vezi [39]). Fiecare rotire a discului corespunde unei anumite cantități de energie consumată. O bobină este alimentată cu tensiunea de rețea, iar cealaltă este străbătută de curentul care alimentează instalația electrică a abonatului. Acțiunea conjugată a celor două bobine antrenează rotirea unui disc de aluminiu. Energia electrică consumată este proporțională cu numărul de rotații.

Probleme rezolvate

1. Pentru circuitul din figura [40], se cunosc: $P_a = 100 \text{ W}$, $U = 100 \text{ V}$, $I_C = 0,1 \text{ A}$. Calculează:

- rezistența R ;
- intensitatea curentului în ramura principală.

Rezolvare:

$$\text{a) } P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow R = \frac{U^2}{P} = 1000 (\Omega);$$

$$\text{b) } I_R = \frac{U}{R} = 0,1 (\text{A}). \text{ Folosim diagrama fazorială [41]:}$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = 0,1\sqrt{2} (\text{A}).$$

2. O bobină ideală are inductanța $L = 0,1 \text{ H}$ și este parcursă de un curent de intensitate $I = 10\sqrt{2} \sin 100t (\text{A})$. Calculează:

- reactanța bobinei;
- valoarea instantanee a tensiunii;
- valoarea maximă a energiei magnetice a bobinei;
- puterile activă și reactivă ale bobinei.

Rezolvare:

$$\text{a) } X_L = \omega L = 10 \Omega; \text{ b) } u_L = 100\sqrt{2} \sin\left(100t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V};$$

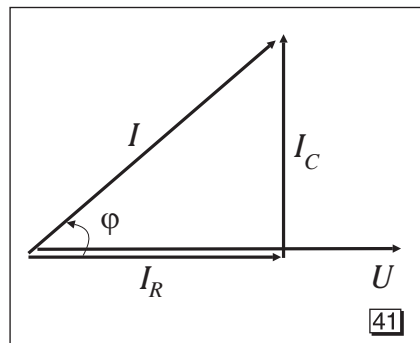
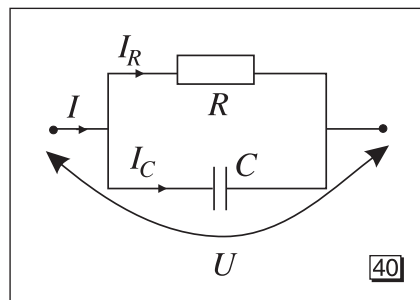
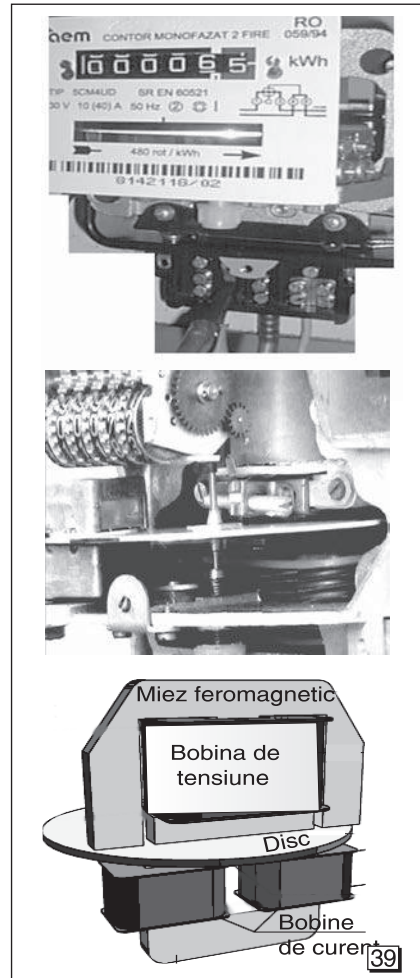
$$\text{c) } W_{\max c} = \frac{LI_{\max}^2}{2} = 20 \text{ J}; \text{ d) } P = 0; P_r = I^2 X_L = 1000 \text{ VAR.}$$

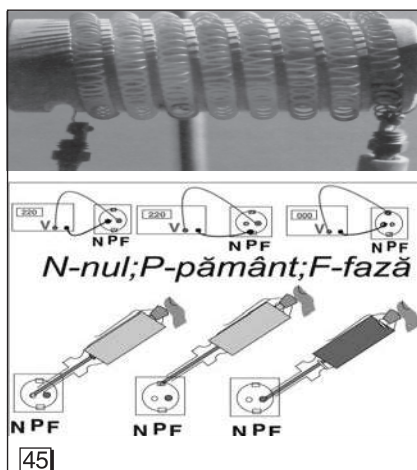
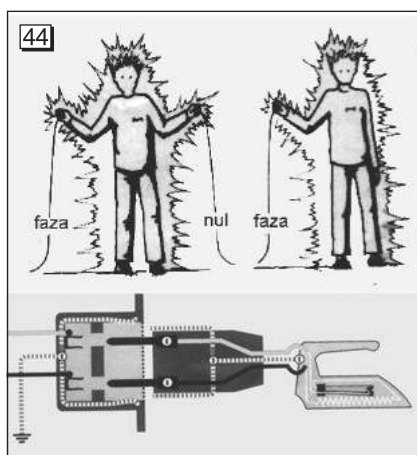
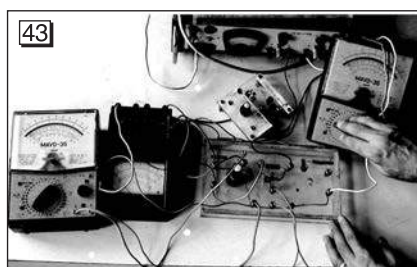
3. Se consideră un circuit paralel RC, alimentat la o tensiune alternativă pentru care se cunosc: $U = 100 \text{ V}$, $I = \frac{\sqrt{2}}{10} \text{ A}$, $P = 10 \text{ W}$, $n = 50 \text{ Hz}$. Calculează:

- rezistența circuitului;
- inductanța capacitivă a circuitului.

Rezolvare:

$$\text{a) } R = \frac{U^2}{P} = 10^3 \Omega; \text{ b) } X_C = \frac{U}{I_C} = 1 \text{ k}\Omega.$$





Măsuri de protecție a mediului și a propriei persoane în producerea și utilizarea curentului alternativ

- ◆ *Nu trebuie să conectezi mai multe aparate electrice de putere mare la aceeași priză, prin ștechere multiple. Încălzirile conductoarelor de alimentare pot provoca deteriorarea cablurilor și incendii (vezi [42]). Incendiile provocate astfel nu se sting cu apă, deoarece aceasta devine conductoare prin dizolvarea sărurilor din zona învecinată cablurilor aflate sub tensiune!*
- ◆ *Nu trebuie să faci depanări cu improvizații (vezi [43])! Dacă vrei să știi cum se remediază defectele electrice, trebuie să cunoști teoria, apoi să efectuezi depanarea cu schema electrică în față, fiind asistat la început de către cei cu experiență!*
- ◆ *Nu folosi fire neizolate pentru alimentarea aparatelor la rețeaua de tensiune alternativă (220 V), deoarece constituie pericol de electrocutare (vezi [44])! Carcasele metalice ale aparatelor electrice alimentate de la rețeaua națională (220 V) nu trebuie atinse cu mâinile sau alte părți ude ale corpului, mai ales dacă nu sunt prevăzute cu un cablu cu fir de împământare! Dacă am atinge cu mâna capetele neizolate ale unor fire conductoare aflate sub o tensiune electrică mai mare de 24 V, iar corpul uman ar face parte dintr-un circuit închis, în antebraț ar apărea o contracție dureroasă sau o senzație de șoc.*

Conductoarele pentru alimentarea de la rețea a aparatelor electrice cu carcase metalice au trei fire, care se conectează astfel: un fir la borna numită *fază*, care se poate identifica folosind creionul electricianului (vezi [45]); un fir, numit *nul*, la borna neutră (aparaturile electrice se alimentează între aceste două borne); un fir la pământ (carcasa metalică este conectată prin acest fir la pământ).

Pentru protecția mediului
Nu arunca în foc bateriile și acumulatele electrice sau pe câmp aparatele care nu se mai folosesc! Pentru sănătatea ta și a celorlalți, trebuie să le ducem la punctele speciale de colectare ale acestora.





Teste pentru autoevaluare

Testul 1

I. Pentru itemii 1-5 scrie pe foaia de răspuns litera corespunzătoare răspunsului considerat corect:

- Unitatea de măsură din SI:
 - pentru inductanță este H m;
 - pentru impedanță este Ω^{-1} ;
 - pentru reactanța capacitivă este Ω ;
 - pentru puterea reactivă este VA.
- Expresia puterii aparente dintr-un circuit RLC serie este:
 - $UI \sin \varphi$; b) $UI \cos \varphi$; c) UI ; d) LC .
- Frecvența de rezonanță într-un circuit RLC este:
 - $2\pi \sqrt{LC}$; b) $1 / \omega^2$; c) $1/2\pi \sqrt{LC}$; d) LC .
- Factorul de putere al unui circuit RLC serie este de 0,6. Factorul de putere al circuitului paralel realizat cu aceleași elemente este:
 - 0,6; b) 0,7; c) 0,8; d) 0,9.
- Expresia corectă a puterii active este:
 - $UI \sin \varphi$; b) $UI \cos \varphi$; c) UI ; d) LC .

II. Interpretează figurile alăturate (vezi [46]).

III. Rezolvă următoarele probleme:

- La o rețea de curent alternativ cu tensiunea efectivă $U = 120$ V sunt cuplate în paralel: un rezistor de rezistență pură $R = 2,5 \Omega$, o bobină ideală având $X_L = 4 \Omega$ și un condensator cu reactanța capacitivă $X_C = 7,5 \Omega$. Calculează intensitatea curentului prin fiecare ramură și curentul total.
- Un circuit de curent alternativ este alimentat de la o sursă cu tensiunea instantanee $u = 500\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ (V). Dacă expresia valorii instantanee a intensității curentului din circuit este $i = 20\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ (A), să se determine puterile.

Răspunsuri:

I. 1-4. c. 5. b.

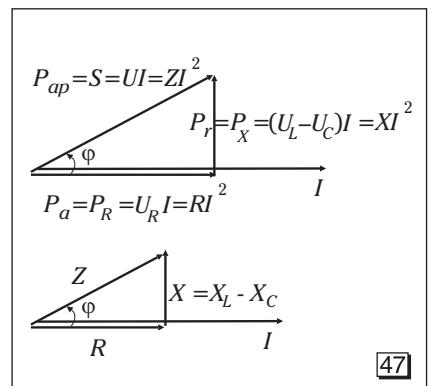
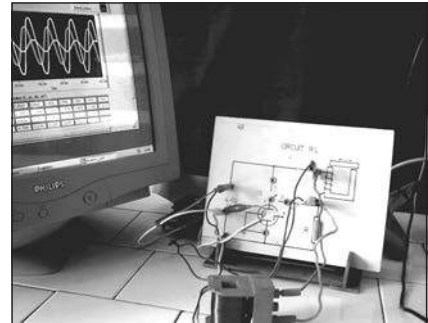
III. 1. $I_R = \frac{U}{R} = 48$ A; $I_L = \frac{U}{X_L} = 30$ A; $I_C = \frac{U}{X_C} = 16$ A;

$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = 50$ A; **2.** $I = 20$ A; $U = 500$ V și $\varphi = \frac{\pi}{12}$ rad.

Din triunghiul puterilor (vezi [47]) rezultă:

$P_a = UI \cos \varphi = 9,6$ kW; $P_r = UI \sin \varphi = 2500$ VAR;

$S = UI = 10$ kVA.



Testul 2

Rezolvă problemele următoare:

1. Intensitatea momentană a curentului care intră într-un nod este: $i = 10\sqrt{2} \sin(314t - \varphi)$ (A), iar intensitățile momentane prin laturile unui circuit paralel care pleacă din acest nod sunt:

$$i_1 = I_1\sqrt{2} \sin 314t \text{ (A) și } i_2 = 5\sqrt{2} \sin\left(314t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (A).}$$

Factorul de putere al circuitului paralel este:

- a) $\cos \varphi = 0,5$; b) $\cos \varphi = 0,6$; c) $\cos \varphi = 0,7$; d) $\cos \varphi = 0,9$.

2. Un circuit RLC serie de curent alternativ, alimentat la tensiunea efectivă $U = 200$ V și pulsația $\omega = 1000 \text{ s}^{-1}$, este parcurs de curentul cu intensitatea efectivă $I = 10$ A dacă rezistența circuitului este $R = 17,32 \Omega$. Factorul de putere al circuitului este:

- a) $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$; b) $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

3. O bobină ideală cu reactanța $X_L = 24 \Omega$ este conectată în paralel cu un rezistor de rezistență $R = 8 \Omega$. Circuitul este alimentat cu o tensiune $u = 24\sqrt{2} \sin 314t$ (V). Puterea reactivă este:

- a) $P_r = 72 \text{ VAR}$; b) $P_r = 3 \text{ VAR}$; c) $P_r = 24 \text{ VAR}$; d) $P_r = 76 \text{ VAR}$.

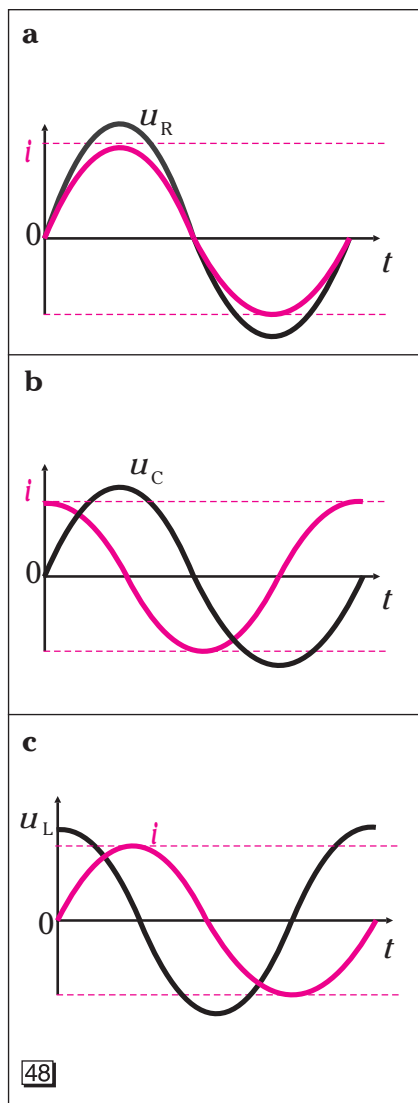
4. O bobină este străbătută de un curent $I_C = 1$ A atunci când este conectată la tensiunea continuă $U_C = 12$ V și de un curent de intensitate $I' = 0,5$ A atunci când este conectată la tensiunea alternativă de valoare efectivă $U' = 24$ V. Factorul de putere este:

- a) $\cos \varphi = 0,1$; b) $\cos \varphi = 0,25$; c) $\cos \varphi = 0,5$; d) $\cos \varphi = 0,4$.

5. Se consideră un circuit paralel RL la care se cunosc: $I_R = 3$ A, $I = 5$ A și $R = 40 \Omega$. Calculează:

- a) curentul prin bobină; b) impedanța circuitului; c) puterea reactivă.

6. La o rețea de tensiune alternativă cu tensiunea efectivă $U = 120$ V sunt cuplate în serie două bobine cu parametrii: $R_1 = 15 \Omega$ și $X_{L1} = 8 \Omega$ și, respectiv, $R_2 = 33 \Omega$ și $X_{L2} = 56 \Omega$. Calculează intensitatea curentului din circuit și diferența de fază introdusă de reactanța inductivă $X_{L1} + X_{L2}$. Care dintre reprezentările din figurile 48a, b și c corespund acestui caz?



48

Răspunsuri:

1. d. 2. c. 3. c. 4. b. 5. a) $I_L = \sqrt{I^2 - I_R^2} = 4$ A;

b) $Z = \frac{U}{I} = \frac{I_R R}{I} = 24 \Omega$; c) $P_r = I_L U = 480 \text{ VAR}$.

6. $I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_{L1} + X_{L2})^2}} = 1,5 \text{ A}$; $\Delta \varphi = 90^\circ$;

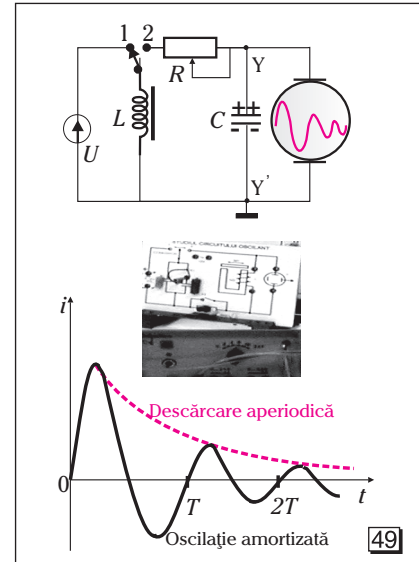
reprezentarea 48c.



2.2. OSCILAȚII ELECTROMAGNETICE LIBERE. CIRCUITUL OSCILANT

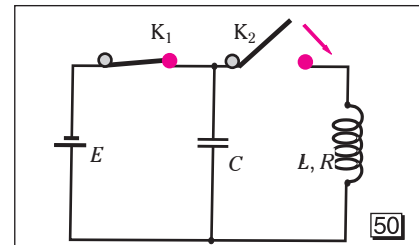
*Descărcarea unui condensator pe rezistor și bobină

Un generator electric cu tensiunea $U=1-6\text{ V}$ încarcă un condensator cu capacitatea $C=10\text{ nF}-100\text{ mF}$, când întrerupătorul K este închis în poziția 1 (vezi [49]). Atunci când întrerupătorul K este în poziția 2, condensatorul se descarcă prin reostatul cu rezistența $R=15-1\,000\ \Omega$ și printr-o bobină (500-1\,000 spire) de inductanță L , cu miez feromagnetic. Modificăm poziția cursorului reostatului până când pe ecranul osciloscopului se vizualizează oscilațiile libere amortizate ale tensiunii de la bornele condensatorului conectat la bornele YY' , dacă $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Dacă $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, semnalul vizualizat este aperiodic.



Modelarea oscilațiilor libere într-un circuit RLC (calitativ)

Circuitul format dintr-un condensator C și o bobină reală LR conectată în paralel se numește **circuit oscilant** (vezi [50], cu întrerupătoarele K_2 închis și K_1 deschis). Oscilațiile electromagnetice sunt analoage oscilațiilor mecanice. Considerăm condensatorul încărcat prin conectarea lui la un generator de curent continuu, cu întrerupătoarele K_1 închis și K_2 deschis. Dacă se comută întrerupătoarele în pozițiile K_2 închis și K_1 deschis, condensatorul se descarcă și apoi se reîncarcă, cu sarcini de polaritate inversă, datorită fenomenului de autoinducție în bobină.

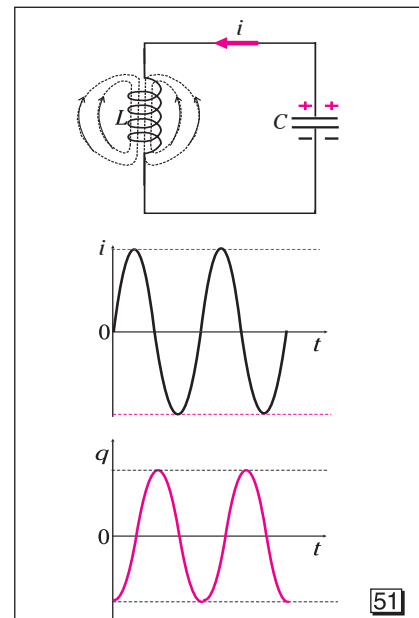


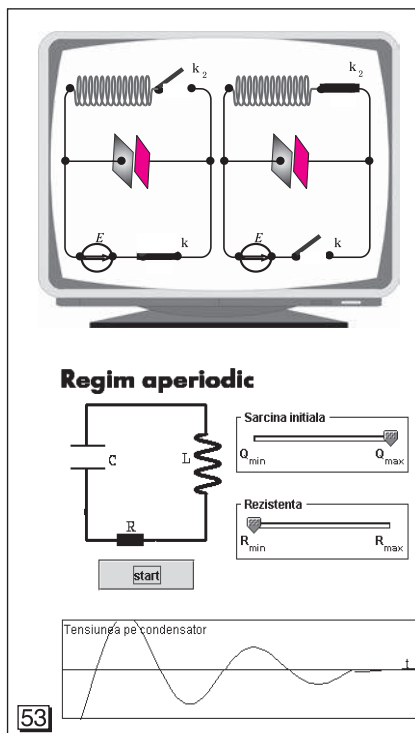
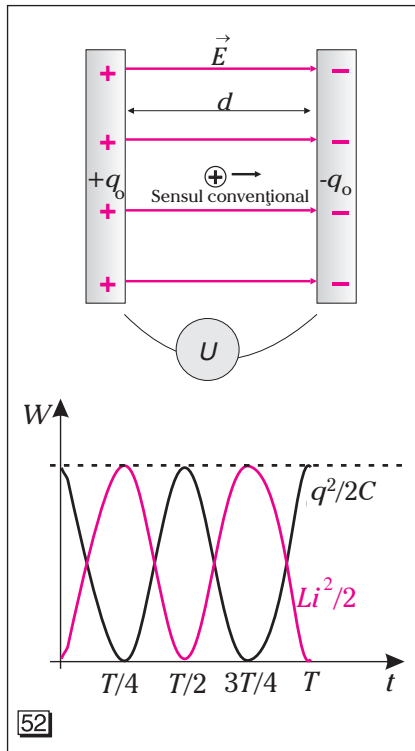
Intensitatea curentului electric prin bobină este zero atunci când valoarea sarcinii electrice de pe armăturile condensatorului este maximă și invers.

Oscilațiile electromagnetice libere din circuitul oscilant ideal LC ($R = 0$) sunt neamortizate (vezi [51]).

Oscilațiile electromagnetice libere din circuitul oscilant real RLC sunt amortizate (vezi [49]), deoarece o parte din energia electrică a condensatorului este convertită în căldură, prin efect Joule, în rezistența ohmică a bobinei.

Oscilațiile pot fi întreținute dacă circuitul primește periodic energie pentru a compensa pierderea de energie. Rezonanța se obține atunci când frecvența tensiunii de alimentare a circuitului considerat este aproximativ egală cu frecvența oscilațiilor libere.





Dacă studiul circuitului oscilant nu se poate face cu ajutorul osciloscopului, atunci se pot folosi simulările pentru calculator (vezi [53]).

Descrierea, din punct de vedere energetic, a oscilațiilor libere într-un circuit RLC

Considerăm momentul $t_0 = 0$, în care armăturile condensatorului din circuitul oscilant sunt încărcate cu sarcinile $+q_0$ și $-q_0$, tensiunea între armăturile condensatorului este $U_{0,c} = \frac{q_0}{C}$, iar energia câmpului electric dintre armăturile condensatorului este $W_{0,el}$. În circuitul oscilant are loc periodic transformarea reversibilă a energiei electrice în energie magnetică și invers (vezi [52]).

Electronii liberi încep să migreze spre armătura pozitivă, iar energia câmpului electric W_{el} începe să scadă, adică se produce descărcarea condensatorului electric. Apariția curentului electric de descărcare generează un câmp magnetic prin bobina circuitului oscilant. La momentul $t = \frac{T_0}{4}$,

unde $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, condensatorul este descărcat ($W_{el} = 0$), iar energia câmpului magnetic devine maximă ($W_{mg, \max}$), deoarece curentul de descărcare atinge valoarea maximă I_{\max} . Când intensitatea curentului începe să scadă, tensiunea electromotoare de autoinducție determină păstrarea sensului curentului și condensatorul este reîncărcat cu sarcină electrică, dar cu polaritatea inversată. La momentul $t = \frac{T_0}{2}$,

energia câmpului magnetic devine zero, iar energia câmpului electric din condensator devine maximă. Dacă pierderile energetice prin efect Joule sunt neglijabile ($R = 0$), atunci în orice moment energia se conservă:

$$W_{\text{electrică}} + W_{\text{magnetică}} = W_{el, \max} = W_{mg, \max} = \text{const.}$$

Procesul se repetă în sens opus până la momentul $t = T_0$. Perioada oscilațiilor electromagnetice libere din circuit este $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.

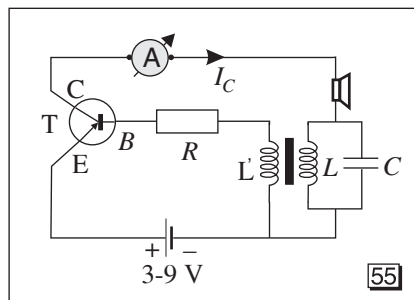
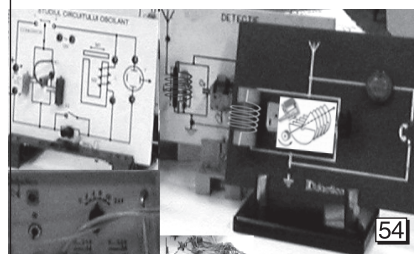
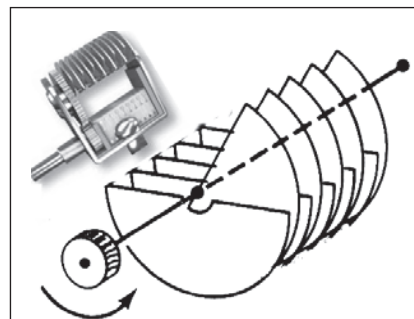
Într-un circuit oscilant LC ideal ($R=0$), se transformă o formă de energie în altă formă de energie, periodic și reversibil. Energia câmpului electric se transformă în energia câmpului magnetic și energia câmpului magnetic se transformă în energia câmpului electric.

Aplicații în tehnică ale circuitului oscilant

Pentru selectarea semnalelor unui post de radio sau de televiziune se folosește un circuit oscilant LC. Acordul la rezonanță într-o gamă de unde se obține prin modificarea valorii capacității condensatorului electric variabil (prin rotirea setului de plăci metalice) din circuitul oscilant de selectare al receptorului (vezi [54]). Trecerea dintr-o gamă în altă gamă de unde se obține prin comutarea pe altă bobină. Pentru lungimi de undă mici și frecvențe mari, din domeniul undelor scurte sau ultrascurte, bobinele corespunzătoare din circuitul oscilant au inductanțe mici, deci și numărul de spire este mai mic.

La concerte, ai sesizat că uneori se obține microfonie, adică în difuzoare se aude un fluierat. Amplificatorul devine oscilator și oscilațiile se autoîntrețin atunci când se aduce la intrarea în acesta, prin microfon, o parte din semnalul de la ieșirea amplificatorului, prin difuzoare.

Un oscilator poate fi construit cu bobina L a circuitului oscilant cuplată inductiv cu bobina L' din baza B a unui amplificator cu tranzistor, care va fi studiat în clasa a XII-a (vezi [55]). Variațiile câmpului magnetic din bobina L a circuitului oscilant induc o tensiune variabilă în bobina L' și determină o fluctuație periodică a curentului I_c , care produce compensarea pierderilor de energie din circuitul oscilant LC. În domeniul telecomunicațiilor sunt folosite oscilații obținute în circuite oscilante (vezi [56]).



Probleme rezolvate

1. Un circuit oscilant format dintr-o bobină și un condensator variabil este acordat pe lungimea de undă λ_0 . Dacă se mărește de 4 ori capacitatea condensatorului, cum se modifică lungimea de undă la rezonanță?

Rezolvare:

Crește de 2 ori.

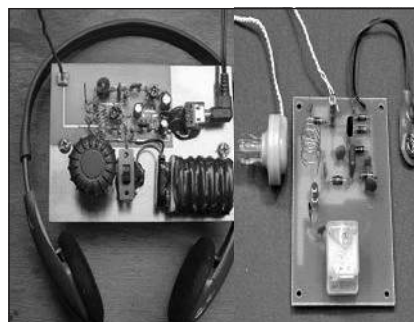
2. Găsește expresia valorii maxime a intensității curentului electric dintr-un circuit oscilant LC dacă energia câmpului magnetic are expresia $Li^2/2$, iar energia câmpului electric are expresia $Cu^2/2$?

Rezolvare:

Deoarece energia se conservă, atunci când tensiunea electrică între armături este nulă intensitatea curentului electric este maximă și invers:

$$\frac{1}{2}CU_{\max}^2 = \frac{1}{2}LI_{\max}^2 \Rightarrow I_{\max} = U_{\max}\sqrt{\frac{C}{L}}, \text{ unde } Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

este impedanța caracteristică a circuitului oscilant ideal.



Transferul mărimilor și formalismul utilizat în descrierea fenomenelor oscilatorii

Analiza calitativă și cantitativă a oscilațiilor mecanice și a oscilațiilor electromagnetice permite stabilirea mărimilor și a relațiilor analoage pentru oscilatorul mecanic și circuitul oscilant.

Oscilatorul mecanic (mărimi, simboluri, relații)	Circuitul oscilant (mărimi, simboluri, relații)
<ul style="list-style-type: none"> ◆ Elongația: $y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. ◆ Viteza de oscilație: $v = \frac{dy}{dt} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. ◆ Perioada: $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$. ◆ Cauza exterioară care produce oscilațiile este o forță F exterioară care a scos oscilatorul din poziția de echilibru static. ◆ Evoluția sistemului oscilant depinde de forțele elastice, $F_e = ky$, din resort. ◆ Constanta de elasticitate: k. ◆ Forțele de inerție, masa și impulsul: $F_i = -ma = -m \cdot \frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dt}; p = mv.$ ◆ Puterea mecanică: $p_{\text{mec}} = Fv$. ◆ Energia potențială elastică: $E_p = \frac{ky^2}{2} = \frac{F_e^2}{2k}$. ◆ Energia cinetică: $E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$. ◆ Conservarea energiei oscilațiilor libere neamortizate ale oscilatorului armonic: $E_{\text{totală}} = \frac{ky^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = \text{const.}$ $\frac{dE_{\text{totală}}}{dt} = 0 \Rightarrow ky \cdot \frac{dy}{dt} + mv \cdot \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow ky + ma = 0, \text{ deoarece } \frac{dy}{dt} = v.$ 	<ul style="list-style-type: none"> ◆ Sarcina electrică: $q(t) = q_{\text{max}} \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. ◆ Viteza de oscilație: $i = \frac{dq}{dt} = \omega_0 q_{\text{max}} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. ◆ Perioada: $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. ◆ Cauza exterioară care produce oscilațiile este o tensiune U a sursei la care se încarcă electric condensatorul din circuit. ◆ Evoluția sistemului oscilant depinde de tensiunea condensatorului: $U_C = q/C$. ◆ Inversul capacității: $1/C$. ◆ Tensiunea autoindusă, inductanța și fluxul: $e_a = -L \cdot \frac{di}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}; \Phi = Li.$ ◆ Puterea electrică: $p_{\text{el}} = ui$. ◆ Energia electrică: $E_{\text{el}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{Cu_C^2}{2}$. ◆ Energia magnetică: $E_{\text{mag}} = \frac{Li^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}$. ◆ Conservarea energiei oscilațiilor libere neamortizate în circuitul oscilant ideal: $E_{\text{totală}} = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} = \frac{Q_{\text{max}}^2}{2C} = \text{const.}$ $\frac{dE_{\text{totală}}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} + Li \cdot \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{q}{C} + L \cdot \frac{di}{dt} = 0, \text{ deoarece } i = \frac{dq}{dt}.$

(continuare)

$$\text{sau } ky + m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = 0.$$

Această ecuație, numită *diferențială*, are soluția: $y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, unde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

- ◆ În medii disipative, oscilațiile se amortizează datorită puterii disipate:

$$\frac{dE_{\text{totală}}}{dt} = -rv^2, \text{ unde } r \text{ — rezistența mecanică. Semnul minus arată că energia scade}$$

$$\text{în timp: } ky \cdot \frac{dy}{dt} + mv \cdot \frac{dv}{dt} = -rv^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ky + ma + rv = 0, \text{ deoarece } v = \frac{dy}{dt},$$

$$\text{sau } F_e + F_i + F_r = 0.$$

- ◆ Oscilațiile devin forțate sub acțiunea unei forțe periodice:

$$ky + ma + rv = F_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + \frac{r}{m} \cdot v + \frac{k}{m} \cdot y = \frac{F_{\text{ext}}}{m};$$

$$\text{notăm } \frac{r}{m} = 2\delta \text{ și } \frac{k}{m} = \omega_0^2.$$

După încetarea acțiunii forței exterioare, se produc oscilații amortizate în timp, cu

pulsăția $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, dacă $r < 2\sqrt{km}$, și cu

elongația $y(t) = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$, unde

φ_0 este faza mișcării la momentul $t = 0$, când încetează acțiunea forței exterioare.

Mărimile oscilante au valori maxime pentru anumite pulsății ω_0 , numite *pulsății de rezonanță*.

$$\text{sau } \frac{q}{C} + L \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} = 0.$$

Această ecuație, numită *diferențială*, are soluția: $q(t) = Q_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, unde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

- ◆ În circuitul oscilant real, oscilațiile se amortizează datorită puterii disipate:

$$\frac{dE_{\text{totală}}}{dt} = -Ri^2, \text{ unde } R \text{ — rezistența electrică}$$

Semnul minus arată că energia scade în

$$\text{timp: } \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} + Li \cdot \frac{di}{dt} = -Ri^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{q}{C} + L \cdot \frac{di}{dt} + Ri = 0, \text{ deoarece } i = \frac{dq}{dt}, \text{ sau}$$

$$u_C + u_L + u_R = 0$$

- ◆ Oscilațiile devin forțate sub acțiunea unei tensiuni periodice:

$$u_C + u_L + u_R = U_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i + \frac{q}{LC} = \frac{U_{\text{ext}}}{L};$$

$$\text{notăm } \frac{R}{L} = 2\delta \text{ și } \frac{1}{LC} = \omega_0^2.$$

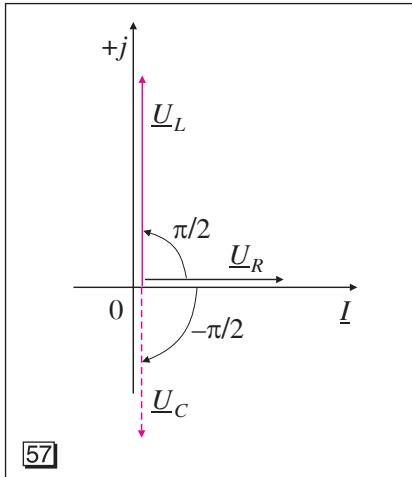
După decuplarea alimentării cu tensiune exterioară, se produc oscilații amortizate cu

pulsăția $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, dacă $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Din

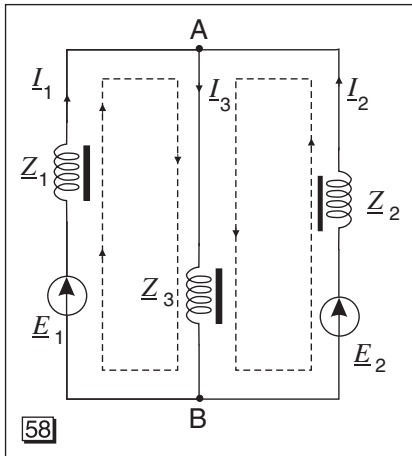
ecuația $q(t) = Q_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$, obținem intensitatea curentului oscilant care apare

la descărcarea condensatorului: $i(t) = \frac{dq}{dt}$.

Mărimile oscilante au valori maxime pentru anumite pulsății ω_0 , numite *pulsății de rezonanță*.



57



58

Impedanța echivalentă a unor impedanțe conectate în serie sau paralel se scrie analog rezistenței echivalente a unor rezistoare conectate în serie:

$$\underline{Z}_s = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2, \text{ sau în paralel:}$$

$$\underline{Z}_p = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

Un circuit paralel sau mixt are impedanța echivalentă a unui circuit serie $\underline{Z}_s = R_s + jX_s$, unde R_s este rezistența activă și X_s este reactanța impedanței echivalente.

Puterile active $P_a = RI^2$ și reactive $P_r = XI^2$ verifică bilanțul puterilor din expresia puterii aparente: $\underline{S} = P_a + jP_r$, $\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^*$, unde \underline{I}^* este expresia conjugată a intensității \underline{I} .

*Rezolvarea problemelor cu circuite RLC în curent alternativ prin metoda numerelor complexe (pentru curioși)

Putem găsi o corespondență între fazorii asociați mărimilor electrice instantanee și numerele complexe cu modulul egal cu valoarea efectivă. Tensiunii instantanee $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_0)$ îi atașăm numărul complex:

$$\underline{U} = U(\cos\varphi + j\sin\varphi) = U_{\text{activă}} + jU_{\text{reactivă}},$$

unde componenta activă este $U_{\text{activă}} = U\cos\varphi = RI$, fiind situată pe axa numerelor reale, în fază cu intensitatea curentului, componenta reactivă este $U_{\text{reactivă}} = U\sin\varphi = XI$, fiind situată pe axa numerelor imaginare, rotită cu $\frac{\pi}{2}$ față de axa numerelor reale și $j = \sqrt{-1}$.

Relațiile obținute pentru circuitul RLC serie se pot exprima prin mărimile efective complexe: $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$, unde $\underline{U}_R = RI$, în fază cu I , pe axa orizontală a numerelor reale (vezi 57); $\underline{U}_L = jX_L I$, rotit cu $\frac{\pi}{2}$ în sens trigonometric față de axa orizontală a numerelor reale; $\underline{U}_C = -jX_C I$, rotit cu $\frac{\pi}{2}$ în sensul acelor de ceasornic față de axa orizontală a numerelor reale.

Obținem:

Legea lui Ohm în numere complexe:

$$\underline{U} = [R + j(X_L - X_C)]\underline{I} = \underline{Z}\underline{I},$$

unde $\underline{Z} = R + j(X_L - X_C)$ reprezintă impedanța complexă cu modulul $|\underline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ și $\tan\varphi = \frac{X}{R} = \frac{X_L - X_C}{R}$.

Pentru un nod al unei rețele de curent alternativ, se scrie

legea I a lui Kirchhoff: $\sum_{k=1}^n I_k = 0$, analoagă expresiei folosite

pentru un nod al unei rețele de curent continuu (vezi 58). Alegem sensuri de referință pentru curenții din laturi și din generatoare. Aplicăm legea I a lui Kirchhoff pentru $(n-1)$ noduri.

Pentru un ochi al unei rețele de curent alternativ, se

scrie legea a II-a a lui Kirchhoff: $\sum_{n=1}^S E_n = \sum_{k=1}^n Z_k I_k$.

Alegem sensuri de citire arbitrare pentru $(l-n+1)$ ochiuri independente; termenii din ultima ecuație vor avea semnul pozitiv sau negativ, după cum sensul de referință al mărimii electrice coincide sau nu cu sensul de citire al ochiului.

***Probleme rezolvate**

1. Un condensator real cu rezistența de pierderi R_p prin dielectricul dintre armăturile acestuia, conectată în paralel cu reactanța capacitivă X_{Cp} a condensatorului ideal (fără pierderi), se poate transfigura într-un circuit serie $R_s X_s$, conectat la aceeași tensiune U , între aceleași puncte și dezvoltând aceleași puteri active, reactive, aparente (vezi [59])?

Rezolvare:

Scriem expresiile impedanțelor în numere complexe:

$$\underline{Z}_s = R_s + jX_s \text{ și } \underline{Z}_p = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}, \text{ unde } \underline{Z}_1 = R_p \text{ și } \underline{Z}_2 = -jX_{Cp}.$$

$$\underline{Z}_p = \frac{R_p (-jX_{Cp})}{R_p - jX_{Cp}} = \frac{-jR_p X_{Cp} (R_p + jX_{Cp})}{(R_p - jX_{Cp})(R_p + jX_{Cp})} = \frac{R_p X_{Cp}^2 - jR_p^2 X_{Cp}}{R_p^2 + X_{Cp}^2}$$

unde $j^2 = -1$. Prin identificarea părților reale și imaginare ale celor două impedanțe egale, scrise cu numere complexe:

$$\underline{Z}_s = \underline{Z}_p, \text{ obținem: } R_s = \frac{R_p X_{Cp}^2}{R_p^2 + X_{Cp}^2} \text{ și } X_s = \frac{R_p^2 X_{Cp}}{R_p^2 + X_{Cp}^2}.$$

2. Rețeaua RLC din figura [60] are parametrii: $U = 220 \text{ V}$, $R = 10 \Omega$, $L = 10 \text{ mH}$, $C = 500 \mu\text{F}$, $\omega = 1000 \text{ s}^{-1}$. Găsește valoarea tensiunii U'_{PB} .

Rezolvare:

Impedanța circuitului între punctele A și B se poate scrie folosind, prin analogie, relațiile utilizate la grupările rezistoarelor, astfel:

$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \Rightarrow \underline{Z}_{AB} = 10 + \frac{10j(-2j)}{10j - 2j} = (10 - 2,5j) (\Omega).$$

Am transfigurat circuitul electric mixt dintre A și B într-un circuit serie echivalent (un rezistor cu rezistența $R = 10 \Omega$ înseriat cu un condensator de reactanță $X_C = 2,5 \Omega$).

Din legea lui Ohm în numere complexe, obținem:

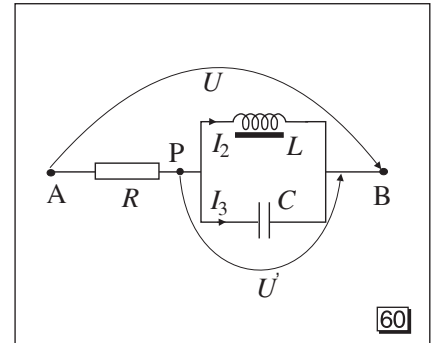
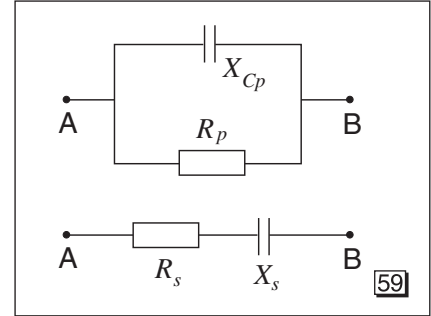
$$\underline{I} = \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} \Rightarrow \underline{I} = \frac{220}{(10 - 2,5j)} = (20,7 + 5,17j) \text{ (A)},$$

deoarece \underline{U}_{AB} pe axa numerelor reale este echivalent unui fazor de referință, iar $\underline{I}_1 = \underline{I}_a + \underline{I}_r$, unde $\underline{I}_a = 20,7 \text{ A}$ este componenta activă în fază cu tensiunea \underline{U}_{AB} și $\underline{I}_r = 5,17 \text{ A}$ este componenta reactivă, în avans de fază cu $\pi/2$ deoarece are

semnul plus. Rezultă: $I = \sqrt{I_a^2 + I_r^2} = 21,33 \text{ (A)}$;

$$\underline{U}'_{PB} = \underline{I} \underline{Z}_{PB} = (20,7 + 5,17j)(-2,5j) = (12,94 - 51,75j) \text{ (V)};$$

$$U' = 53,34 \text{ V}.$$



Folosim scrierea în numere complexe pentru impedanțe:

$$\underline{Z} = R + jX = R + j(X_L - X_C),$$

unde $j = \sqrt{-1}$.

Impedanțele laturilor sunt:

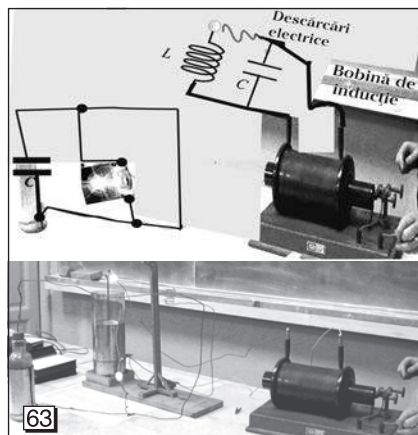
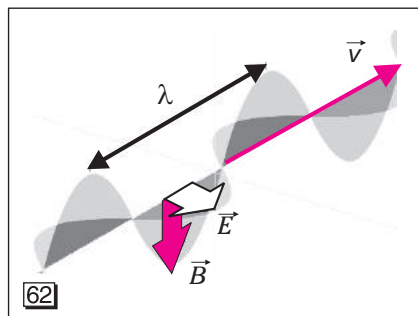
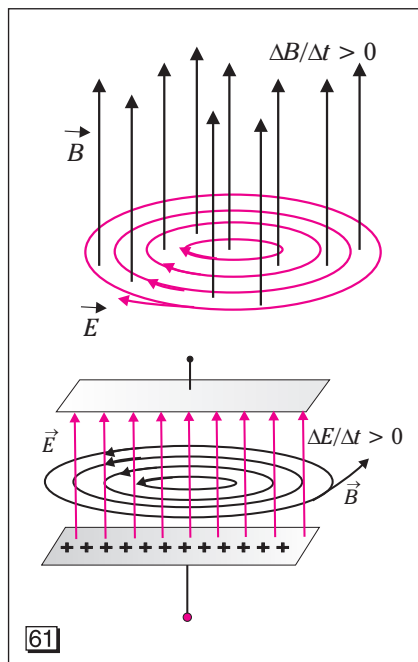
$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{AP} = R_1 + jX_1 = 10 + 0 (\Omega);$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{P-L-B} = R_2 + jX_{2L} = 0 + 10j (\Omega);$$

$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_{P-C-B} = R_3 - jX_{3C} = 0 - 2j (\Omega).$$



2.3. CÂMPUL ELECTROMAGNETIC. UNDA ELECTROMAGNETICĂ



Producerea câmpului electromagnetic; producerea și propagarea undei electromagnetice

Fizicianul englez James Clark Maxwell a stabilit, în anul 1864, **principiile teoriei câmpului electromagnetic**:

I. În jurul unui câmp magnetic variabil în timp se generează un câmp electric variabil, ale cărui linii de câmp sunt închise (vezi [61]).

II. În jurul unui câmp electric variabil în timp se generează un câmp magnetic variabil, ale cărui linii de câmp sunt închise.

Ansamblul câmpurilor electrice și magnetice variabile care se generează reciproc formează un **câmp electromagnetic**, care se propagă în spațiu sub formă de **unde electromagnetice** cu o viteză care depinde de proprietățile electrice și magnetice ale mediului considerat (vezi [62]).

Fizicianul german Heinrich Hertz a produs, în anul 1887, unde electromagnetice, cu ajutorul circuitelor oscilante deschise.

Dispariția câmpului magnetic produs de curentul din bobina unui circuit oscilant alimentat de la o bobină de inducție, în momentul în care curentul alternativ își schimbă sensul, dă naștere unui câmp electric în vecinătatea descărcărilor electrice (vezi [63]).

În jurul unui câmp magnetic variabil în timp, apare un câmp electric variabil, astfel încât curentul indus într-un circuit dă naștere unui flux magnetic indus care se opune variației (creșterii sau scăderii) fluxului inductor. Câmpul magnetic este dependent de câmpul electric și invers, deoarece în timp ce unul „se naște” sau dispare, celălalt dispare, respectiv este generat.

Când câmpul electric dispare, trebuie ca în vecinătate să ia naștere un câmp magnetic care preia energia, deoarece energia totală trebuie să se conserve.

Transferul de energie prin convertirea energiei magnetice în energie electrică și invers, prin intermediul câmpurilor magnetice și electrice care „se nasc și mor”, presupune posibilitatea propagării perturbațiilor inițiale din antenele de emisie până la un receptor (radio, televizor, telefon mobil) sub formă de unde electromagnetice.

*Relațiile dintre mărimile caracteristice unde electromagnetice

Într-un circuit oscilant, câmpul magnetic este localizat în bobină și câmpul electric este localizat în condensator.

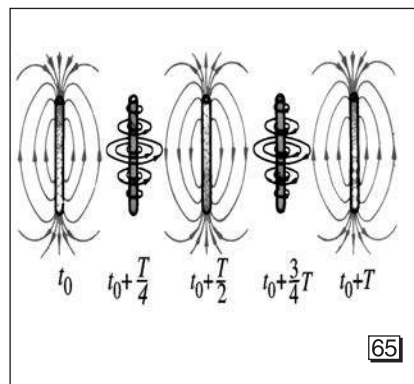
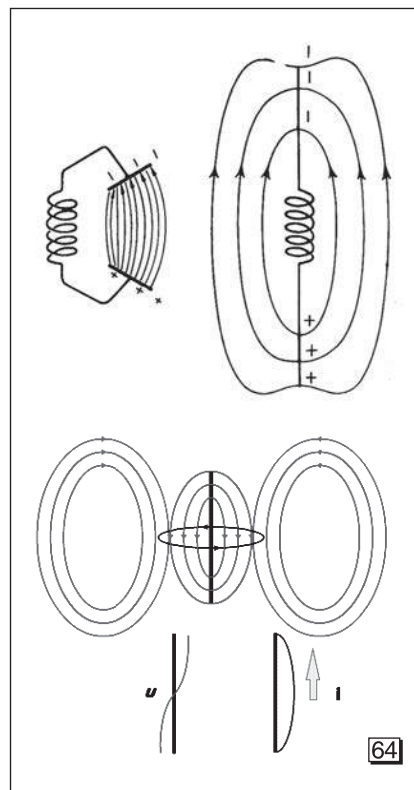
Oscilațiile electromagnetice din circuitul oscilant sunt analoage oscilațiilor mecanice ale unui oscilator armonic cu masa concentrată la capătul acestuia.

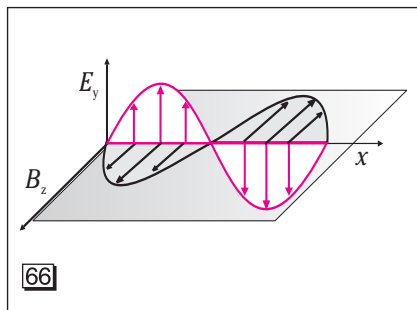
O coardă vibrantă are masa distribuită de-a lungul corzii și este sediul unor unde staționare. Dacă printr-un experiment mental îndepărtăm armăturile condensatorului și întindem conductorul bobinat, obținem un *circuit oscilant deschis*, adică o antenă dipol de emisie, care are inductanța și capacitatea distribuite de-a lungul circuitului (vezi [64]). Un fir conductor cu lungimea de un metru are capacitatea $C_1 \approx 5 \text{ pF}$ și inductanța $L_1 \approx 3 \text{ } \mu\text{H}$. În jurul antenei, se generează și dispar, alternativ, câmp electric și câmp magnetic. Energia câmpului electric generat de sarcinile de la capetele circuitului antenei, când curentul este nul, se transformă în energia câmpului magnetic, atunci când curentul este maxim în mijlocul antenei.

Undele electromagnetice se propagă printr-un mediu, caracterizat de permeabilitatea magnetică μ și permitivitatea mediului ϵ , cu viteza:

$$v = \frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_{\text{relativ}} \mu_{\text{relativ}}}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\text{relativ}} \mu_{\text{relativ}}}}; \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

Dacă la momentul t_0 , considerat inițial, electronii au concentrația maximă la un capăt al antenei și deficitul de electroni (sarcina pozitivă) are concentrația maximă la celălalt capăt, atunci curentul este practic nul, iar energia, intensitatea câmpului electric și tensiunea au valori maxime (vezi [65]). După un sfert de perioadă, electronii liberi au viteză maximă, intensitatea curentului și energia câmpului magnetic generat în jurul dipolului au valori maxime, iar câmpul electric este practic nul. După o jumătate de perioadă, câmpul electric are intensitatea maximă, dar cu liniile câmpurilor de sens opus față de sensul inițial, iar energia câmpului magnetic este nulă. După trei sferturi de perioadă, câmpul electric dispare, iar câmpul magnetic atinge din nou valoarea cea mai mare, dar liniile de câmp au sens opus față de sensul lor la momentul $t_0 + T/4$. După o perioadă, se ajunge la starea inițială.

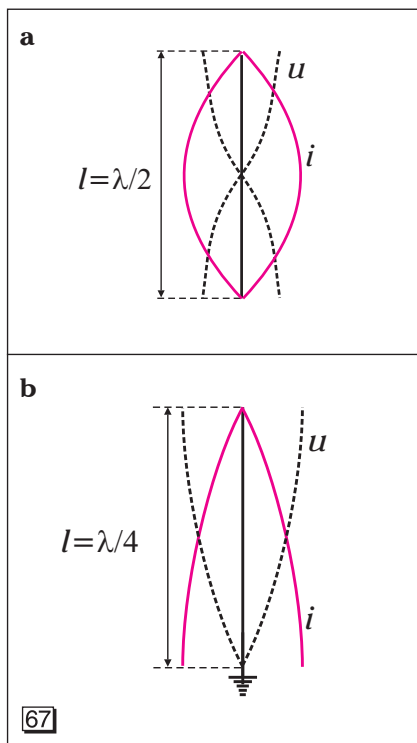




Transferul mărimilor și formalismul utilizat în descrierea fenomenelor ondulatorii

În propagarea perturbațiilor electromagnetice sub formă de unde electrice: $E_y = E_0 \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$, și unde magnetice

$B_z = B_0 \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$, vectorii intensitate \vec{E} a câmpului electric și inducție \vec{B} a câmpului magnetic sunt perpendiculari între ei și pe direcția de propagare (vezi [66]).



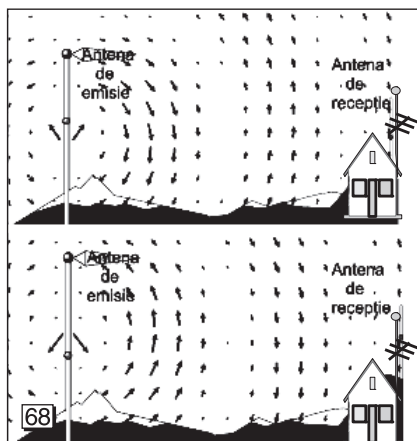
Undele electromagnetice transportă energie la distanță cu viteza v , care depinde de proprietățile electrice și magnetice ale mediului, deci nu transportă particule de substanță.

În antene, se formează unde staționare de curent și de tensiune electrică, cu ventre și cu noduri (vezi [67]). Oscilațiile electrice se propagă de-a lungul antenei, se reflectă la capete și interferează. Cea mai simplă antenă este un fir conductor liniar în care se induc curenți intensi de înaltă frecvență și se formează unde staționare, atunci când firul are o anumită lungime, $l = \lambda/2$. Intensitatea curentului variază în lungul antenei și se formează unde staționare de curent. La capetele antenei se formează nod pentru intensitatea curentului și ventru pentru tensiunea electrică (vezi [67]a).

Dacă antena are un capăt conectat la pământ (vezi [67]b), la acest capăt se formează nod pentru tensiunea electrică față de pământ și ventru pentru intensitatea curentului, iar la capătul liber se formează nod pentru intensitatea curentului și ventru pentru tensiunea electrică față de pământ. În acest caz, lungimea l a antenei este egală cu un sfert din lungimea de undă a undelor electromagnetice emise sau recepționate ($l = \lambda/4$).

Antena este un circuit oscilant deschis și este folosită, în multe variante constructive, pentru a radia în spațiu unde electromagnetice sau pentru a capta unde electromagnetice care au o anumită lungime de undă (vezi [68]). Transferul de energie este maxim atunci când frecvența proprie a oscilațiilor electromagnetice din antenă este egală cu frecvența oscilațiilor din circuitul oscilant închis cu care se cuplează inductiv antena considerată.

Un condensator inseriat în circuitul antenei are ca efect micșorarea lungimii antenei, iar o bobină inseriată în circuitul antenei are ca efect mărirea lungimii antenei. Antenele se cuplează inductiv cu circuitul oscilant al emițătorului sau al receptorului.



* Probleme rezolvate

1. Se definesc: energia magnetică din unitatea de volum

$$w_{mg} = \frac{B^2}{2\mu} \text{ și energia electrică din unitatea de volum } w_{el} = \frac{\epsilon E^2}{2},$$

unde B — inducția câmpului magnetic, μ — permeabilitatea magnetică, E — intensitatea câmpului electric și ϵ — permitivitatea mediului. Ce relație poate fi stabilită între aceste mărimi?

Rezolvare:

Propagarea undelor electromagnetice presupune transformarea reversibilă a energiei câmpului electric în energie a câmpului magnetic, iar densitățile medii ale acestor energii

trebuie să fie egale: $w_{el} = w_{mg}$, adică $\frac{\epsilon E^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu}$. Rezultă

$$\frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

2. Se consideră că asupra unei particule de substanță, cu sarcina q și viteza v , acționează forța electrică $\vec{F} = q\vec{E}$ și forța Lorentz $\vec{f}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$ din partea unei unde electromagnetice.

Forța rezultantă dintre forța electrică $\vec{F} = q\vec{E}$ și forța Lorentz $\vec{f}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$ este nulă, deoarece undele nu transportă particule de substanță. Ce relație poate fi stabilită între mărimile E, B și v ?

Rezolvare:

$\vec{R} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{v}$. Mărimile acestor vectori satisfac relația $E = Bv$, deoarece $\vec{B} \perp \vec{v}$.

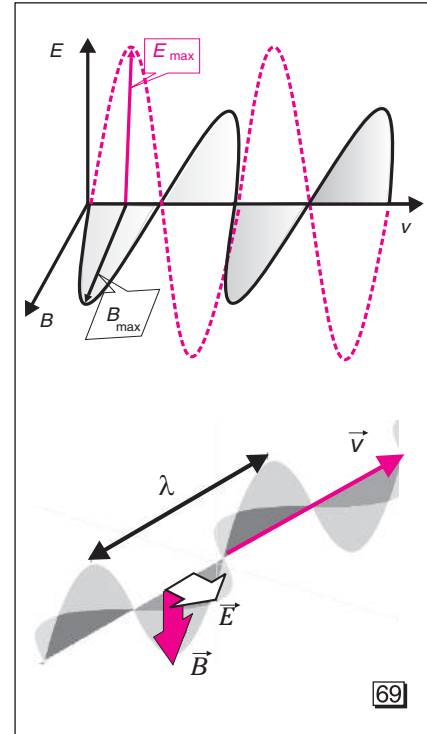
Folosim relația obținută la problema 1 și obținem expresia vitezei de propagare a undelor electromagnetice:

$$v = \frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}.$$

3. Undele electromagnetice se propagă în spațiu. Câmpurile se detașează de o antenă dipol de emisie când frecvențele au valori mari și se propagă în spațiu sub formă de unde electromagnetice transversale (vezi [69]). Care sunt componentele acestor unde la distanța r față de antenă?

Rezolvare:

$$E = E_0 \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{r}{\lambda}\right) \text{ și } B = B_0 \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{r}{\lambda}\right).$$



Toate undele electromagnetice se propagă în vid cu viteza luminii:

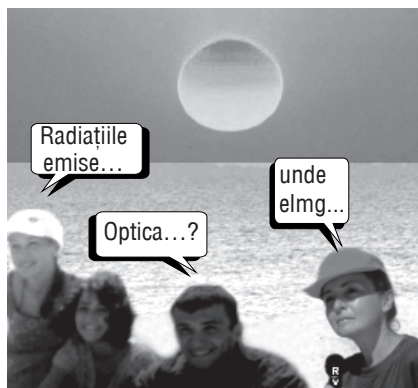
$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{8,856 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = \\ &= 3 \cdot 10^8 \text{ m/s.} \end{aligned}$$



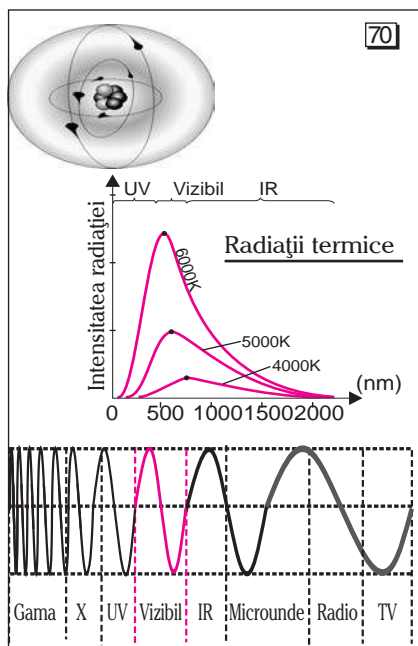
2.4. CLASIFICAREA UNDELOR ELECTROMAGNETICE

„Un atom nu se pierde în natură. O stea s-a stins și lumina ei — ca efect al existenței — călătorește mii de ani pentru a ajunge la ochiul nostru.”

M. Eminescu — *Fragmentarium*



...Atomii unei substanțe pot emite și absorbi unde electromagnetice de anumite frecvențe, ca și cum ar fi „oscilatori acordați” pe acele frecvențe, electronii executând tranziții între anumite nivele de energie.



Clasificarea undelor electromagnetice în funcție de sursă ori frecvență

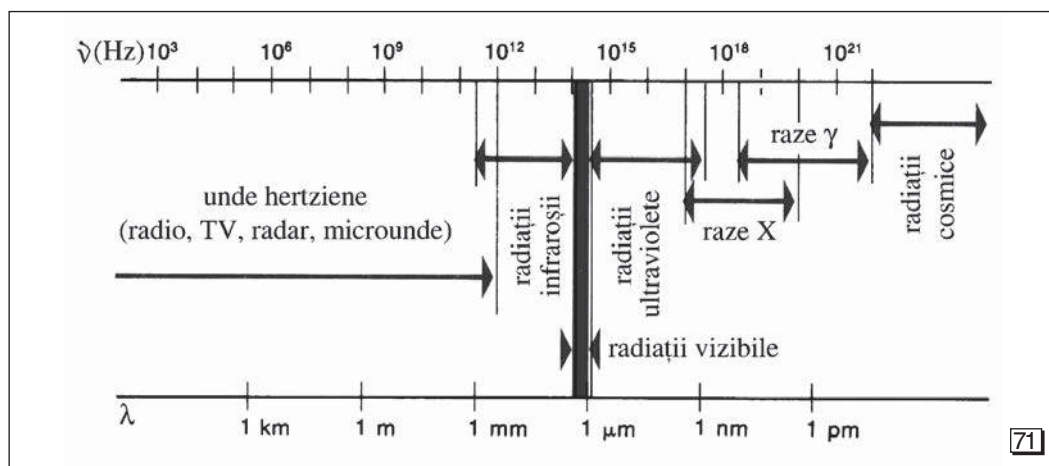
Undele electromagnetice sunt unde transversale deoarece intensitatea câmpului electric \vec{E} și inducția câmpului magnetic \vec{B} oscilează în fază, pe direcții perpendiculare între ele și pe direcția de propagare. Lungimile de undă ale radiațiilor se exprimă în **nanometri** ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) sau în **angstromi** ($1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$).

Prin **radiații monocromatice** (vezi [71]) vom înțelege unde cu o anumită frecvență ν și cu o anumită lungime de undă λ ($\lambda = c/\nu$, unde $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$). Radiațiile cu anumite frecvențe pot fi emise de surse diferite.

- **Undele hertziene** sunt emise de oscilațiile electronilor din antenele emițătoarelor folosite în sistemele de radiocomunicații (radio, televiziune, radar) și generatoare de microunde ($\lambda = 10^{-3}$ – 3 000 m). Oscilațiile electronilor, care sunt mișcări accelerate în antena de emisie, generează un câmp electric variabil, înconjurat de un câmp magnetic variabil, ale cărui linii de câmp sunt curbe închise, iar câmpul magnetic variabil generează prin inducție electromagnetică un alt câmp electric variabil, ale cărui linii de câmp sunt închise. Sub acțiunea câmpului electromagnetic radiat până la antena de recepție, care satisface condiția de rezonanță, se obține tensiune indusă oscilantă cu o frecvență egală cu cea a undelor electromagnetice. Domeniile undelor electromagnetice se întrepătrund.

- **Radiațiile vizibile** (percepute de ochiul uman) sunt emise de Soare, stele, lămpi cu filamente incandescente, a căror temperatură poate atinge 2 000 – $3 \text{ 000}^\circ\text{C}$ (vezi [70]) sau tuburi cu descărcări în gaze, arcuri electrice. Emisia luminii se obține la tranzițiile electronilor de pe nivele energetice superioare pe nivele energetice inferioare ale atomilor. Radiațiile cu lungimile de undă $\lambda \in [400 \text{ nm}; 700 \text{ nm}]$, spectru de mărimi acceptate de majoritatea specialiștilor, produc senzații de culoare asupra ochiului fără defecte de vedere. Senzația de lumină este produsă de intensitatea câmpului electric al unde.

- **Radiațiile infraroșii** au frecvențe mici și, respectiv, lungimi de undă mari față de cele vizibile.



Culori	roșu	oranj	galben	verde	albastru	indigo-violet
λ (nm) \approx	700-630	630-595	595-560	560-500	500-450	450-400
λ (Å) \approx	7000-6300	6300-5950	5950-5600	5600-5000	5000-4500	4500-4000

• **Radiațiile ultraviolete** au aceeași origine ca și radiațiile vizibile, dar frecvențele sunt mai mari și, respectiv, lungimile de undă mai mici față de cele vizibile.

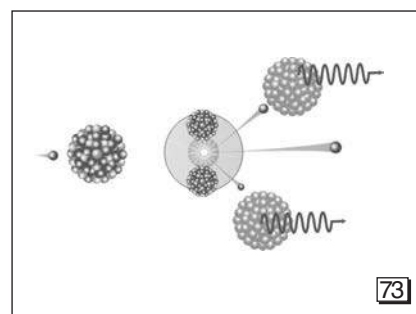
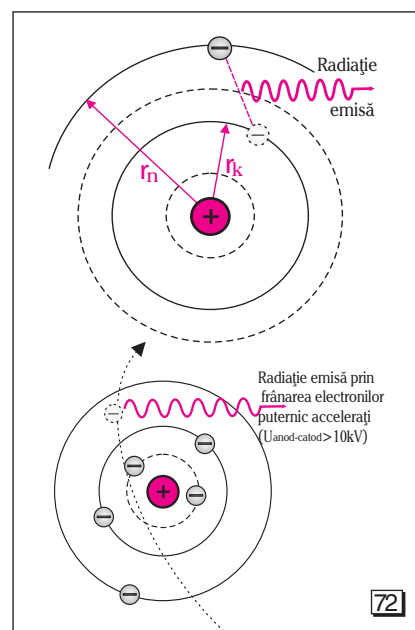
• **Radiațiile X** au frecvențe mai mari decât radiațiile ultraviolete *Vom învăța ulterior* că acestea sunt emise prin frânarea puternică a electronilor care pătrund din exterior, cu viteze mari, în învelișurile electronice ale atomilor sau prin tranziția electronilor de pe nivele energetice superioare la nivele energetice inferioare ale atomilor (vezi [72]).

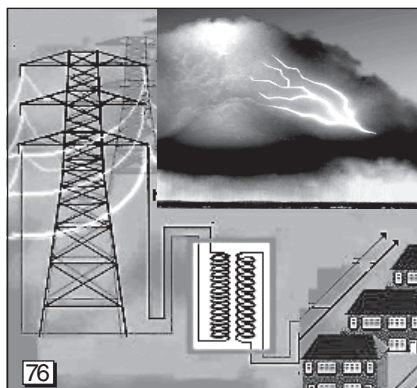
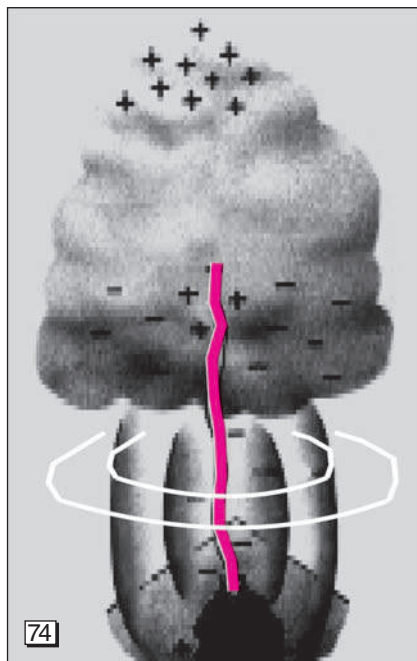
• **Radiațiile γ emise** în procese nucleare (vezi [73]) și unele radiații cosmice emise de corpuri cerești (pulsari, quasari) au frecvențe mai mari decât radiațiile X.

Surse de unde electromagnetice; producerea undelor electromagnetice

Față de sursele de unde electromagnetice amintite mai sus, trebuie menționate emițătoarele electronice cu frecvențe dintr-o bandă pentru: radio, televiziune, telefonie fără fir, radar, telecomenzi cu microunde, radiografii cu radiații X etc.

Emițătoarele electronice pentru comunicații radiază, prin antene de emisie, unde electromagnetice de frecvență înaltă, modulate de undele de joasă frecvență care conțin informația. Undele electromagnetice emise de antene se reflectă, se refractă, se difractă, interferează și sunt atenuate până ajung la antena receptorului.





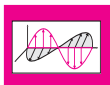
Emitătoarele electronice pentru radiolocație și telecomenzi radiază în impulsuri, prin antene parabolice de obicei, numai trenuri de unde electromagnetice de frecvență constantă.

Sursele de unde electromagnetice cu frecvențe aleatorii sunt descărcările electrice din atmosferă, instalațiile de sudură cu arc, bobinele releelor și contactoarelor, mijloacele de transport electric etc. Descărcările electrice din atmosferă produc câmpuri electromagnetice intense, care pot perturba activitatea umană și sistemele de transport ale energiei electrice (vezi [74]). Organismul uman se comportă ca o antenă în care apar curenți induși de câmpurile electromagnetice variabile din zona descărcărilor electrice sau a liniilor de înaltă tensiune.

Ai remarcat că radioreceptoarele sesizează perturbațiile produse de descărcările electrice — naturale (vezi [75]) sau dintre electrozii bujiilor unui motor de autovehicul în funcțiune — sub forma unui semnal parazit (pocnete la radio sau imagine distorsionată pe ecranul televizorului). Conectarea și deconectarea unui motor electric de putere mare provoacă variații ale tensiunii rețelei electrice care influențează alte aparate conectate la aceeași rețea, iar în cadrul unui aparat, funcționarea unui etaj de putere în impulsuri poate influența (prin semnale parazite) alte etaje ale aparatului respectiv.

Cablul de antenă cu fir coaxial ecranat (cu o rețea metalică) elimină semnalele parazite din exterior. Dacă pui mâna pe antena telescopică sau la borna de antenă exterioară a unui radioreceptor se recepționează mai bine? La introducerea unui simplu fir conductor la borna Y a unui osciloscop, pe ecranul osciloscopului sunt vizualizate semnale electrice. Dacă atingi zona neizolată a firului sau ții zona izolată în mână, constăți că forma semnalului se modifică. Rezultă că și corpul uman are efect de antenă de recepție.

Un semnal nedorit, indus de un câmp electromagnetic poluant, poate defecta funcționarea unui echipament sau sistem (vezi [76]). Variațiile unui semnal electric provoacă prin inducție semnale în alte circuite ale aparatului. De exemplu, un pistol de lipit cu transformator poate afecta prin impulsurile câmpului electromagnetic un calculator. Când două linii de transmisie se află dispuse paralel și foarte aproape unele de altele, un semnal (o undă electromagnetică) propagat în lungul uneia dintre acestea induce în cealaltă linie un semnal perturbator (o altă undă electromagnetică). Acest fenomen poartă denumirea de *diafonie* între liniile de transmisie. Un exemplu în acest sens sunt traseele de pe cablajele imprimate.



2.5. APLICAȚII

Aplicații științifice și tehnice ale undelor electromagnetice

Aplicațiile științifice și tehnice ale undelor electromagnetice se întâlnesc în: sistemele de radiocomunicații, navigație, radar, preparare hrană, telecomenzi TV în infraroșu și teledetecție, medicină, defectoscopie, protecție antifracție etc. Un *dispozitiv electronic integrat* îndeplinește o anumită funcțiune (generare de oscilații, mixare de semnale sau modulară, emisie, recepție, detecție, demodulare, amplificare). *Antenele* folosite în radiocomunicații au anumite configurații pentru domeniile de frecvențe folosite.

Termografierea este o metodă de vizualizare a contrastului de intensitate a radiațiilor termice emise de ființe vii, mijloace de transport, foc ascuns și de clădiri în raport cu cele emise de mediul înconjurător (vezi [77]). Metoda permite determinarea pierderilor de căldură a locuințelor și identificarea țesuturilor bolnave, care sunt mai calde decât cele sănătoase din vecinătatea lor.

Utilizarea undelor electromagnetice în funcționarea unor aparate și dispozitive (detecția în infraroșu, cuptorul cu microunde, radioul, televizorul etc.)

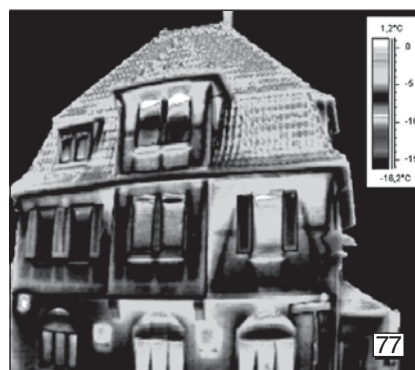
Suprafețele închise la culoare și mate sunt mai bune absorbante și mai bune emițătoare de radiație termică și în domeniul infraroșu, decât celelalte suprafețe.

Senzorii detectoarelor în infraroșu sesizează, atât ziua cât și noaptea, radiația emisă în infraroșu de ființe vii, mijloace de transport, foc ascuns etc.

Cuptorul cu microunde încălzește alimente folosind căldura degajată de vibrația moleculelor de apă, grăsimi și zaharuri sub acțiunea microundelor cu frecvența de 2 500 MHz, mult mai mare decât cea necesară transmiterii semnalelor radio, de televiziune sau de telefon celular (vezi [78]).

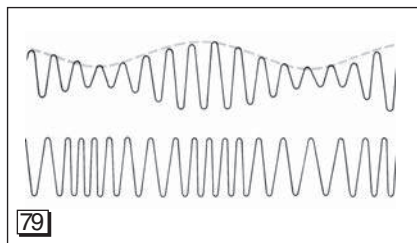
Acordul la rezonanță într-o gamă de unde a unui receptor se obține prin variația capacității condensatorului (prin rotirea axului acestuia) din circuitul oscilant de selectare. Pentru lungimi de undă mici și frecvențe mari, din domeniul undelor scurte sau ultrascurte, bobina corespunzătoare din circuitul oscilant are inductanța mică, deci și numărul de spire este mai mic, deoarece frecvența de

rezonanță este dată de expresia $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

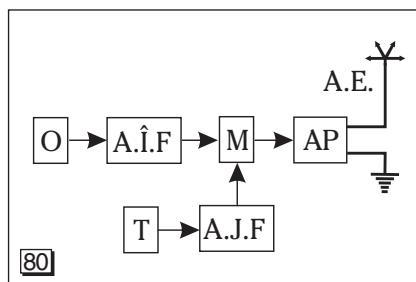


Senzorii detectoarelor în infraroșu discriminează modificări ale temperaturii de până la o miime de grad produsă de o deplasare cu 10 m a unei persoane.

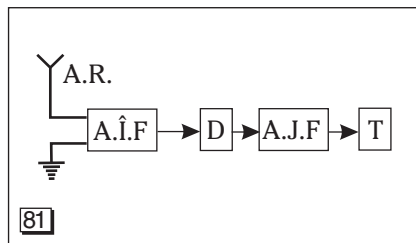




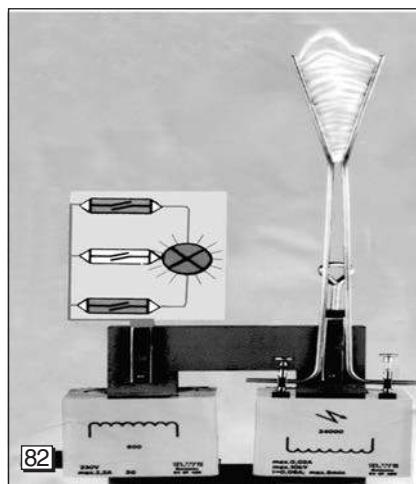
79



80



81



82

Se amorsează descărcări electrice în scânteii, ca la bujiile motorului în funcțiune al unui autoturism. Dacă se aduce un tub cu neon la presiune scăzută (creionul electricianului) în apropierea cablurilor izolate care fac legătura cu bobina secundară, se observă luminiscenta portocalie caracteristică neonului.

Undele electromagnetice hertziene pot fi produse de un oscilator electromagnetic (circuitul oscilant deschis al unui emițător). Transmiterea informațiilor sonore și vizuale la distanțe mari se realizează cu ajutorul unor dispozitive electronice pentru emiterea și receptarea undelor modulate. Undele modulate se obțin prin modificarea amplitudinii, frecvenței sau fazei unei unde purtătoare, de frecvență ridicată, în ritmul impus de unda de joasă frecvență care conține informația care trebuie transmisă (vezi [79]).

Etajele unui emițător (vezi [80]):

- generatorul **O** de oscilații electrice de înaltă frecvență;
- amplificatorul **A.Î.F.** pentru oscilațiile de înaltă frecvență;
- traductorul **T** care transformă semnalele sonore sau video în oscilații electrice de joasă frecvență;
- amplificatorul **A.J.F.** pentru oscilațiile de joasă frecvență;
- modulatorul **M** care compune oscilațiile de înaltă frecvență cu cele de joasă frecvență;
- amplificatorul de putere **A.P.** care amplifică oscilațiile modulate;
- antena de emisie **A.E.** cuplată inductiv la ieșirea amplificatorului de putere radiază unde electromagnetice purtătoare de informații.

Etajele unui receptor (vezi [81]):

- antena de recepție **A.R.** intersectată de unde electromagnetice purtătoare de informații devine sediul oscilațiilor electrice induse de înaltă frecvență;
- amplificatorul **A.Î.F.** pentru oscilațiile de înaltă frecvență;
- demodulatorul **D** care separă oscilațiile de înaltă frecvență cu cele de joasă frecvență;
- amplificatorul **A.J.F.** pentru oscilațiile de joasă frecvență purtătoare de informații;
- traductorul **T** care transformă oscilațiile electrice de joasă frecvență în sunete sau imagini.

*Experiență (pentru curioși)

Câmpul electric intens, generat de t.e.m. indusă în bobina secundară a unui transformator ridicător de tensiune sau a unei bobine de inducție, ionizează aerul dintre două bare conductoare, conectate la capetele bobinei secundare (vezi [82]).

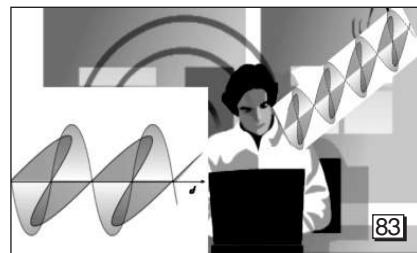
Un radioreceptor portabil adus în apropiere sesizează perturbațiile produse de aceste descărcări electrice.

Măsurile de protecție a mediului și a propriei persoane în utilizarea undelor electromagnetice

În practică, sunt utilizate aparate și dispozitive electronice care funcționează cu unde electromagnetice ale căror frecvențe sunt în intervalul 10 kHz și 3 000 GHz. Toate aparatele trebuie să încorporeze sisteme de protecție a sănătății și siguranței vieții utilizatorilor. Producătorul trebuie să furnizeze utilizatorului toate informațiile privind folosirea aparatului în limba română și în alte limbi de circulație internațională. În țara noastră, Institutul Român de Standardizare și Mărci adaptează regulamentele internaționale din domeniul măsurilor de protecție a mediului și a persoanelor în utilizarea unor aparate care funcționează cu unde electromagnetice. *Trăim într-un ocean de unde electromagnetice, benefice până la anumite limite* (vezi [83]).

Studiile efectuate în ultimii ani au pus în evidență efecte complexe ale diferitelor tipuri de unde electromagnetice (radio, microunde, radiații infraroșii, vizibile, ultraviolete etc.) asupra organismului uman. S-a constatat că prezența undelor electromagnetice de joasă frecvență în spațiile de producție are o influență negativă asupra sistemului cardio-vascular al muncitorilor, observându-se o reducere a pulsului, o micșorare a puterii de recepție vizuale și auditive sau o accentuare a stării de oboseală. Undele electromagnetice provenite de la liniile de tensiune și microundele provenite de la telefoanele celulare induc curenți turbionari în țesuturile biologice cu efecte negative (acutizarea bolilor cardiovasculare; slăbirea sensibilității ochiului uman; alterarea metabolismului și slăbirea sistemelor vitale nervos, endocrin, imunitar și de reproducere). Aceste efecte depind de intensitatea câmpurilor electromagnetice și de durata de expunere. Un răspuns compensator al organismului la acțiunea câmpului electromagnetic este determinat de predispozițiile genetice ale acestuia. Radiațiile electromagnetice ionizante rup legăturile dintre electroni și atomi sau dintre componentele moleculelor. Din această categorie fac parte radiațiile U.V. și X, caracterizate de frecvențe mari și lungimi de undă foarte mici. Radiațiile electromagnetice neionizante sunt caracterizate de frecvențe mai mici (radiațiile ultraviolete, lumina vizibilă, radiația infraroșie, microundele, undele radio).

În prezent, pe plan mondial, se întreprind acțiuni pentru limitarea efectelor câmpurilor electromagnetice asupra organismelor vii, dintre care cele mai importante sunt normarea intensității admisibile ale undelor electromagnetice în funcție de timpul de expunere, pentru activități industriale și pentru locuințe, cât și aplicarea de măsuri de protecție în desfășurarea unor activități cu surse de unde electromagnetice (vezi [84]).

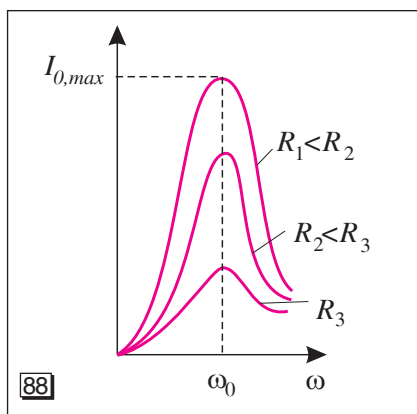
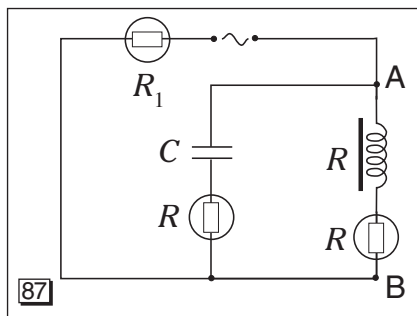
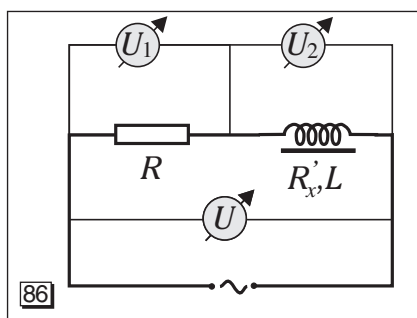
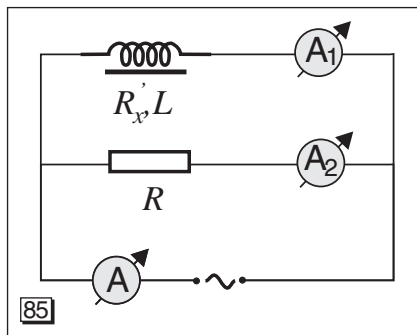


Companiile de telefonie mobilă trebuie să limiteze numărul de antene și să reducă nivelul emisiei de microunde, suspectate că ar fi periculoase pentru sănătatea noastră.



Limitarea efectelor câmpurilor electromagnetice se obține prin:

- protecția față de undele intense de joasă frecvență se realizează cu ecrane ale locului de muncă din aliaje fier-nichel;
- protecția prin limitarea timpului de expunere, utilizând aparate de avertizare acustică sau optică;
- protecția prin desfășurarea activităților la distanță față de sursa de unde electromagnetice;
- protecția prin utilizarea unor articole de îmbrăcăminte pentru protecție, realizate din țesături din bumbac, în structura cărora intră fire subțiri metalice, care formează ochiuri de dimensiuni mici.



Test pentru autoevaluare

1. Două conductoare ohmice, dintre care unul de rezistență R și altul de rezistență R'_x bobinat pe un miez de fier, sunt înseriate fiecare cu câte un ampermetru identic. Cele două laturi conectate în paralel sunt înseriate la o sursă de c.a. prin al treilea ampermetru, identic cu celelalte (vezi [85]). Dacă I , I_1 și I_2 sunt intensitățile curenților măsurate cu cele trei ampermetre, găsește expresia puterii consumate prin efect Joule pe rezistorul de rezistență R'_x .
2. Un conductor ohmic de rezistență R se leagă în serie la o sursă de curent alternativ cu un al doilea conductor de rezistență R'_x , care este bobinat pe un miez de fier. Cele trei voltmetre identice de curent alternativ, conectate ca în figura [86], măsoară tensiunile U_1 , U_2 și U . Găsește expresia puterii active dezvoltată prin efect Joule pe conductorul bobinat.
3. Un condensator se leagă în serie cu o bobină ($R = 60 \, \Omega$ și $X_L = 20\sqrt{3} \, \Omega$). La capetele circuitului se aplică tensiunea $u = 220\sqrt{2} \sin 100\pi t$ (V). Ce valoare trebuie să aibă capacitatea condensatorului astfel încât puterea activă primită de circuit să fie maximă și ce valoare are aceasta?
4. Dacă o bobină se conectează la o tensiune continuă $U_c = 220$ V, aceasta este parcursă de un curent $I_c = 0,46$ A. Dacă se alimentează cu o tensiune alternativă ($\hat{v} = 50$ Hz) de valoare efectivă $U = 220$ V, se măsoară un curent efectiv $I = 0,44$ A. Ce valoare are inductanța bobinei?
5. Cum se poate obține intensitate luminoasă maximă la cele două becuri montate pe laturile cu bobină, respectiv cu condensator și intensitate luminoasă minimă la becul de pe latura înseriată cu sursa electrică?
6. Reprezintă grafic intensitatea curentului la rezonanță prin circuite RLC serie, cu diferite rezistențe electrice R .

Răspunsuri:

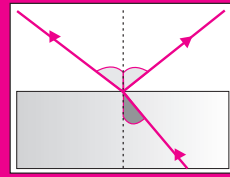
$$1. P = \frac{R(I^2 - I_1^2 - I_2^2)}{2}. \quad 2. P_a = \frac{U^2 - (U_1^2 + U_2^2)}{2R}.$$

3. $C = 92 \, \mu\text{F}$, $P_{\max} = 806,66$ W. 4. $L = 0,46$ H. 5. Prin modificarea frecvenței tensiunii de alimentare sau a reacțanței inductive X_L modificând poziția miezului (vezi [87]). 6. La rezonanță ($\omega = \omega_0$), intensitatea curentului prin circuite cu diferite rezistențe electrice R are valoarea maximă

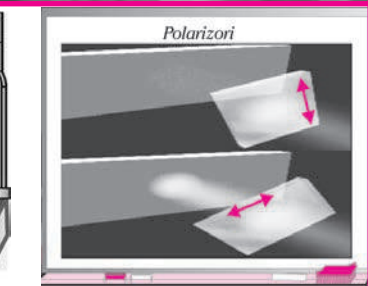
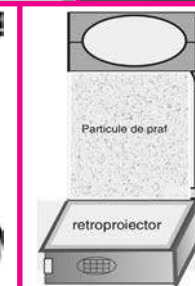
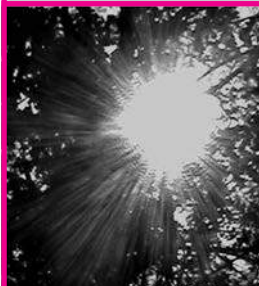
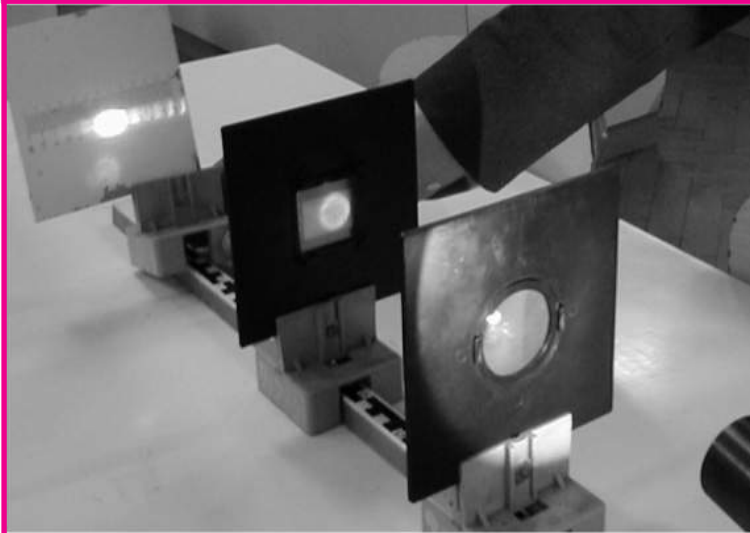
$$I_{0\max} = \frac{U}{R} \text{ (vezi [88])}.$$

OPTICA ONDULATORIE

CAPITOLUL 3



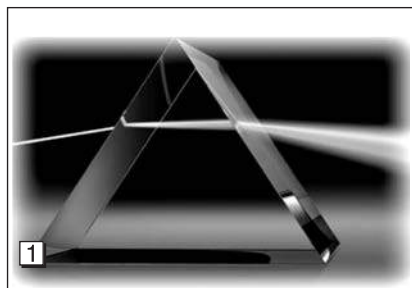
*„Am motive temeinice să cred că și lumina
este o formă de radiație electromagnetică”
J. C. Maxwell*





3.1. DISPERSIA LUMINII.

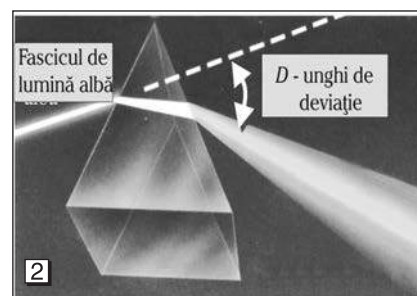
*INTERPRETARE ELECTROMAGNETICĂ



Identificarea în natură și în tehnică a fenomenului de dispersie a luminii

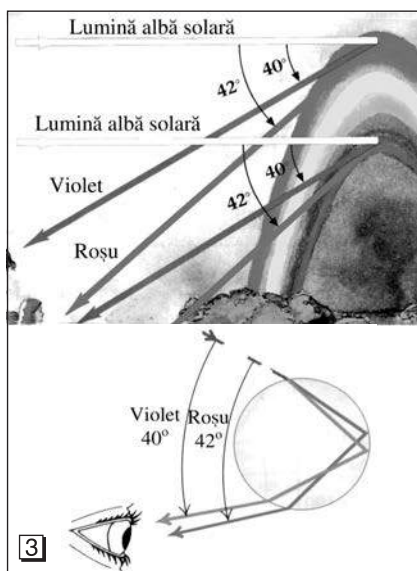
Viteza de propagare a unui fascicul de lumină albă în vid nu depinde de frecvența sau de lungimea de undă a radiațiilor componente, ci are valoarea $c = 299\,792\,458$ m/s. În alte medii transparente, radiațiile monocromatice componente interacționează diferit cu atomii sau moleculele acestora și direcțiile de propagare vor fi deviate diferit.

Observăm că fascicul de lumină emergent devine colorat, deoarece viteza V de propagare a fazei radiațiilor luminoase prin acel mediu transparent și indicele de refracție $n = \frac{c}{V}$ al mediului transparent depinde de lungimile de undă ale radiațiilor.



Dispersia luminii este fenomenul de variație a indicelui de refracție ($n = c/V$) al mediului în funcție de lungimea de undă a radiațiilor luminoase.

Prisma optică este un mediu transparent limitat de doi dioptri plani care formează între ei un unghi diedru A , numit **unghiul prisme**, și se intersectează pe muchia ei (vezi [1]).



Prisma optică descompune lumina în radiațiile componente, care sunt deviate diferit spre baza prisme (vezi [2]). Secțiunea principală în planul perpendicular pe muchia prisme optice poate fi triunghi isoscel sau echilateral.

Indicele de refracție al unui mediu transparent depinde de culoarea luminii refractate, prin frecvența sau lungimea de undă a radiației luminoase. Lumina albă se descompune în culorile spectrului, datorită dispersiei.

După ploaie, în picăturile de apă aflate, în număr mare, în suspensie, se produce de două ori refracția și reflexia diferită a luminii care vine de la Soarele aflat în spatele observatorului, descompunând-o în culorile curcubeului (vezi [3]). Ai sesizat că picăturile de rouă sau de apă în suspensie, din apropierea unei fântâni arteziene, par „colorate“?

Experimente pentru evidențierea dispersiei luminii

1. Fixează o oglindă în apă, sub un unghi, încât să vezi spectrul luminii pe un perete. Sistemul se comportă ca o prismă (vezi [4]).

2. Pe fiecare față a unei prisme optice, orice rază de lumină monocromatică se refractă conform legii refracției:

$$\sin i_1 = n \sin r_1 \text{ și } \sin i_2 = n \sin r_2,$$

unde n este indicele de refracție al mediului prisme în raport cu mediul exterior, unghiurile i_1 și i_2 sunt unghiurile de incidență pe fețele prisme, iar r_1 și r_2 sunt unghiurile de refracție corespunzătoare în prismă (vezi [5]).

Unghiul făcut de prelungirea razei incidente cu raza emergentă se numește **unghi de deviație** și este notat cu D . Se constată că acest unghi depinde de lungimea de undă a radiațiilor și este minim în cazul în care o rază de lumină monocromatică se propagă simetric față de bisectoarea unghiului prisme:

$$r_1 = r_2 = r = A/2; i_1 = i_2 = i.$$

Înseamnă că raza refractată de prima față întâlnește se propagă paralel cu baza prisme (vezi [6]).

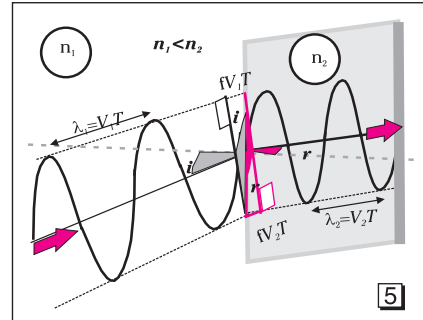
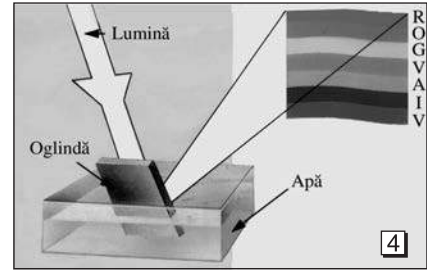
$$\text{Rezultă: } D_{\min} = 2i - A \text{ și } n = \frac{\sin \frac{D_{\min} + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}.$$

Aceasta este formula utilă pentru calcularea indicilor de refracție pentru radiațiile monocromatice, măsurând unghiurile A și D_{\min} .

În conturul prisme, trasează o paralelă la baza prisme, care va intersecta celelalte laturi în punctele I_1 și I_2 , în care înfigi două ace (metoda deviației minime). Readu prisma în interiorul conturului desenat, fețele sale fiind tangente la aceste ace. Mai înfige două ace în alte două puncte, R și S , astfel încât să le vezi pe aceeași direcție aparentă când le privești prin prismă dinspre oricare față a acesteia (imaginea acului mai apropiat acoperind-o pe a celoralte). Unește punctele I_1 cu R și I_2 cu S , apoi construiește normalele în I_1 și I_2 .

Măsoară cu raportorul, unghiurile $i_1 = i_2$ și $r_1 = r_2$. Verifică direcția razei de lumină cu o diodă laser. Măsoară unghiul prisme A , unghiul de deviație minimă D_{\min} și calculează indicii de refracție pentru radiații monocromatice cu formula:

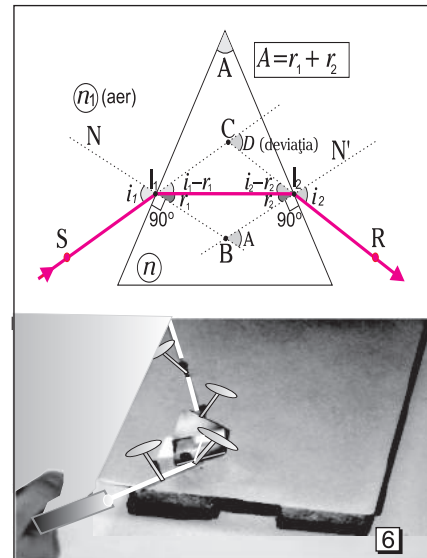
$$n = \frac{\sin \frac{A + D_{\min}}{2}}{\sin \frac{A}{2}}.$$



$$\Delta t = fT; \sin i = \frac{V_1 f T}{AB}; \sin r = \frac{V_2 f T}{AB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V_1 T}{V_2 T} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1};$$

$$\sin r = f(\lambda_2) \text{ și } n_2 = \frac{c}{V_2} = f(\lambda_2).$$



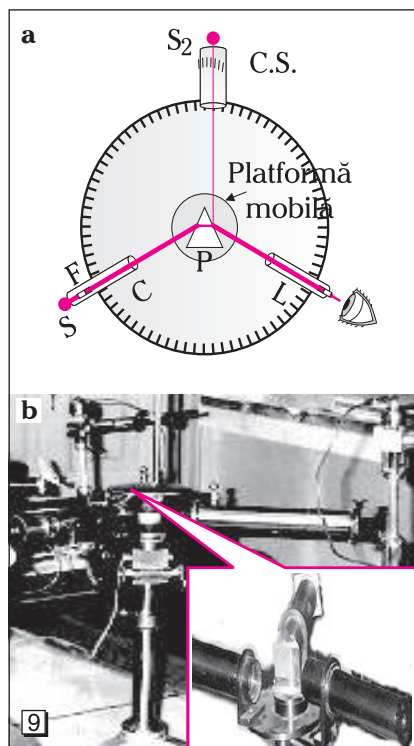
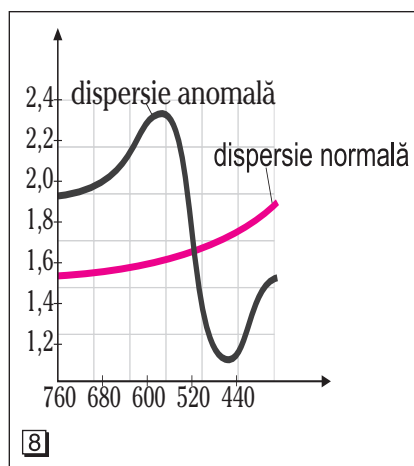
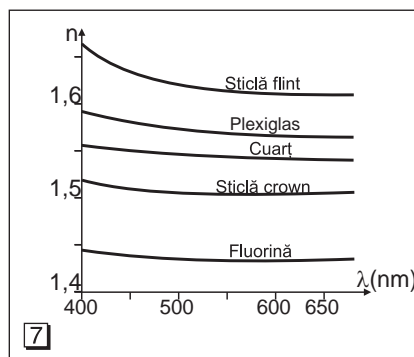
Relații utile la prisme optice:

$$A = r_1 + r_2;$$

$$D = (i_1 - r_1) + (i_2 - r_2) = i_1 + i_2 - A;$$

$$\sin i_1 = n \sin r_1;$$

$$\sin i_2 = n \sin r_2.$$



Descrierea și explicarea fenomenelor de dispersie întâlnite în natură și în tehnică

Dispersia este normală dacă indicele de refracție absolut n crește odată cu frecvența sau scade odată cu creșterea lungimii de undă, deci are valori mai mari pentru radiațiile violete decât pentru cele roșii. În majoritatea mediilor optice, dispersia este normală (vezi [7]).

Dispersia anomală este o excepție, indicele de refracție crește odată cu lungimea de undă, într-un mic interval spectral (vezi [8]). La prisme și lamele colorate se constată o dispersie anomală (radiațiile albastre sunt refractate mai puțin decât cele roșii). Această dispersie se explică prin absorbția selectivă a radiațiilor, dintr-un interval de lungimi de undă, de către atomi. În expresia legii exponențiale a intensității I a undelor transmise prin aceste medii optice, $I = I_0 e^{-\alpha d}$, unde I_0 — intensitatea unei incidente și d — distanța străbătută prin mediul considerat, apare și coeficientul de absorbție α , care depinde de frecvența radiației incidente și de natura atomilor. La temperaturi obișnuite, sticla absoarbe radiațiile din domeniul ultraviolet.

Analiza radiațiilor unei surse luminoase se poate face cu *spectroscopul cu prismă* (vezi [9]). Prisma optică (P), fixată pe o măsuță, dispersează radiațiile luminoase primite din colimator. Colimatorul (C) are o fantă dreptunghiulară reglabilă spre capătul luminat de sursa analizată și o lentilă convergentă la celălalt capăt. Fasciculul luminos emergent are razele paralele dacă fanta este așezată în focarul lentilei. Prin luneta (L) se observă spectrul, obținut la ieșirea din prismă, suprapus peste scala gradată a colimatorului ($C.S.$), pe ale cărei diviziuni semitransparente ajunge lumina de la altă sursă și se reflectă pe fața prisme dinspre lunetă.

*Extindere (pentru curioși)

Prisme optice și lentilele se confecționează din sticlă optică obținută prin răcirea topiturilor de bioxid de siliciu cu anumite cantități de alți oxizi. Oxidul de plumb este adăugat în proporție mai mare de 10% în sticla flint, cu proprietăți dispersive ridicate. Sticla crown, cu indici de refracție mici, se obține prin adăugarea oxidului de bariu.

Sticla optică	Indicii de refracție $n = f(\lambda)$				
	700 nm	589 nm	550 nm	480 nm	430 nm
crown	1,5118	1,5153	1,5186	1,5214	1,5267
flint ușor	1,6020	1,6085	1,6145	1,6200	1,6308
flint dens	1,7406	1,7515	1,7623	1,7723	1,7922



3.2. INTERFERENȚĂ

Analiza calitativă și *cantitativă a fenomenului de interferență; obținerea interferenței staționare

Optica ondulatorie descrie fenomenele în care se manifestă caracterul ondulatoriu al luminii: interferența, difracția și polarizarea.

Interferența luminii este fenomenul de suprapunere într-o zonă a unui mediu, a două sau mai multe unde electromagnetice cu aceeași frecvență din spectrul vizibil. Știi că undele produse pe suprafața unui lichid aflat în repaus, de două corpuri care ating periodic acea suprafață, interferă constructiv în punctele franjelor de amplitudine maximă și interferă distructiv în punctele franjelor de amplitudine minimă (vezi [10]).

Undele coerente sunt acele unde care au aceeași frecvență și păstrează între ele o diferență de fază constantă în timp. Conform principiului lui Huygens, fiecare punct de pe frontul de undă momentan sau de pe o suprafață de undă poate fi considerat sursă secundară de unde sferice secundare, iar frontul de undă, la un moment ulterior, reprezintă înfășurătoarea fronturilor de undă secundare (vezi [11]). Fresnel a completat acest principiu, considerând că undele secundare interferă, respectiv sursele de la care provin sunt coerente, deoarece sunt în fază.

Vom analiza **interferența luminii** în cazul suprapunerii a două sau mai multe unde coerente ai căror vectori \vec{E}_k (intensitate a câmpului electric) sunt paraleli, rezultând maxime și minime ale intensității iluminării, în punctele unui mediu optic.

În cazul *interferenței staționare*, amplitudinea E'_0 a undei rezultante și intensitatea luminoasă I într-un punct, definită ca o mărime proporțională cu pătratul amplitudinii, sunt constante în timp.

În anumite puncte din câmpul de interferență (vezi [12]), intensitatea luminoasă este maximă. Undele de la sursele S_1 și S_2 , cu ecuațiile:

$$E_1 = E_0 \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{r_1}{\lambda}\right) \text{ și } E_2 = E_0 \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{r_2}{\lambda}\right),$$

sunt defazate cu $\Delta\varphi = 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda}$ și au vectorii intensitate câmp

electric \vec{E} situați în același plan de oscilație, de aceeași amplitudine E_0 .

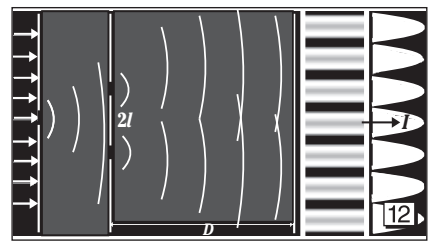
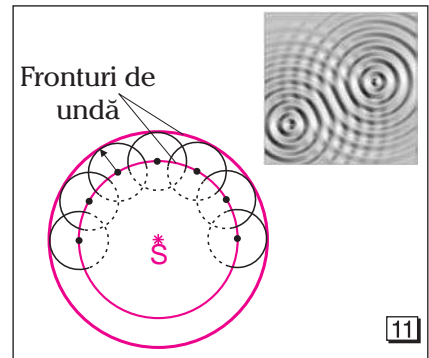
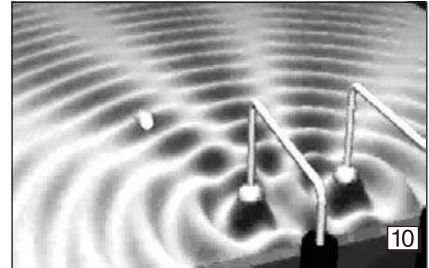
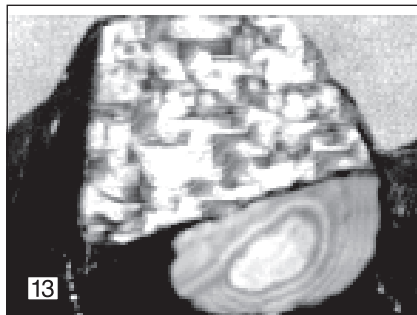


Figura de interferență este staționară dacă diferența de drum $\Delta r = r_1 - r_2$ a undelor care interferează este constantă în timp, deci și diferența de fază

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} \text{ este constantă.}$$

Intensitatea luminoasă într-un punct este maximă dacă $\Delta r = k\lambda$ sau minimă

$$\text{dacă } \Delta r = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}.$$



Diferența de drum între undele care interferează este $\Delta r = r_2 - r_1$. Într-un punct de interferență, unda rezultantă are ecuația:

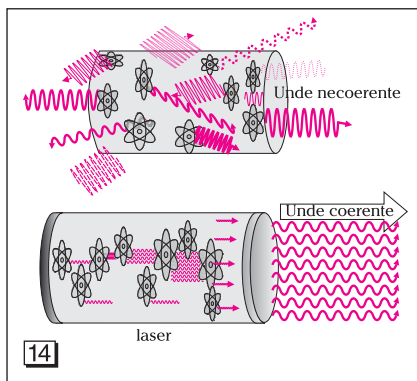
$$E = E_1 + E_2 = E_0 \left[\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) + \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right) \right] =$$

$$= 2E_0 \cos \frac{\pi(r_1 - r_2)}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right) = E'_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right).$$

Intensitatea luminoasă I , într-un punct din câmpul de interferență, este proporțională cu pătratul amplitudinii E'_0 a acestei unde:

$$E'_0 = 2E_0 \cos \frac{\pi(r_1 - r_2)}{\lambda}, \text{ deci } I = C4E_0^2 \cos^2 \left[\frac{\pi(r_1 - r_2)}{\lambda} \right],$$

unde C este o constantă.



Condiția de maxim pentru interferență constructivă

(*franje luminoase*) este $\cos \pi \frac{\Delta r}{\lambda} = \pm 1$, adică $\Delta r = k\lambda = 2k \frac{\lambda}{2}$ (multiplu întreg de lungimi de undă sau multiplu par de „semiundă”).

Condiția de minim pentru interferență distructivă

(*franje întunecate*) este $\cos \pi \frac{\Delta r}{\lambda} = 0$, adică $\Delta r = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$ (multiplu impar de „semiundă”).

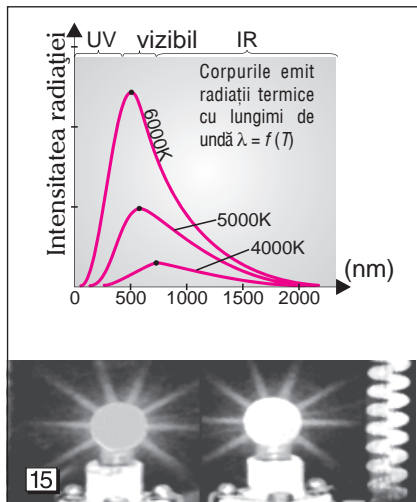
Distribuția energiei în interferența staționară

Energia luminoasă se distribuie între franjele luminoase și întunecate din câmpul de interferență.

Interferența luminii albe produce franjele colorate localizate pe pelicule de săpun, de ulei și oxizi sau pe lame foarte subțiri de mică, sidex și materiale plastice (vezi [13]).

Cu excepția surselor laser, sursele luminoase obișnuite emit în toate direcțiile trenuri de unde electromagnetice în urma proceselor de excitare-dezexcitare ale atomilor și ionilor, care se repetă la intervale de timp foarte mici (vezi [14]).

Sursele de lumină obișnuite (de exemplu, două becuri) nu sunt coerente, deoarece figura de interferență produsă pe un ecran de radiațiile provenite de la aceste surse de lumină se schimbă rapid și ochiul observă o iluminare medie, deoarece are o inerție fiziologică. Spectrul radiațiilor emise depinde de temperatura sursei (vezi [15]).



3.2.1. *Dispozitivul Young

*Investigarea experimentală a interferenței luminii utilizând dispozitive de interferență nelocalizată

Interferența se poate obține dacă radiația luminoasă emisă de o sursă de mici dimensiuni este divizată în două părți care parcurg drumuri diferite și apoi se suprapun. Dispozitivele experimentale pentru investigarea interferenței nelocalizate a luminii folosesc unde coerente obținute:

— de la două imagini ale unei surse luminoase, prin divizarea frontului de undă;

— de la o sursă luminoasă și o imagine a acesteia.

Franjele figurii de interferență sunt nelocalizate (ecranul poate fi așezat oriunde în câmpul de interferență).

*Dispozitivul Young de interferență nelocalizată

Dispozitivul Young permite obținerea undelor coerente prin divizarea luminii monocromatice de la o fantă luminoasă filiformă S către alte două fante S_1 și S_2 , filiforme și paralele între ele și cu fanta S (vezi [16]). Fantele sunt perpendiculare pe planul figurii și simetrice față de axa perpendiculară pe ecran, care trece prin S . Fanta S este iluminată de un filament liniar incandescent, printr-un filtru, sau de o sursă monocromatică (tub cu descărcări în vapori de sodiu sau diodă laser, de exemplu). Punctele de pe suprafața de undă din fantele S_1 și S_2 emit unde coerente secundare:

$$E_i = E_0 \sin(\omega t - 2\pi r_i / \lambda), \text{ unde } i = 1, 2.$$

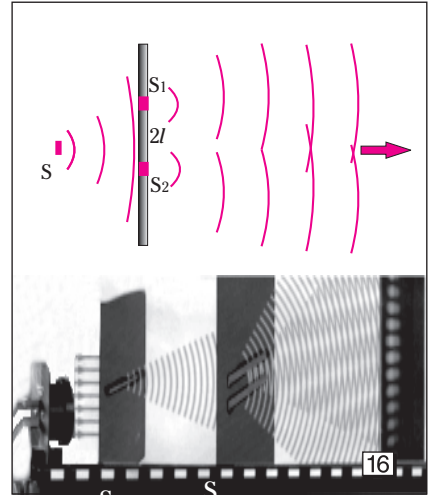
În punctul P_k de pe ecran (vezi [17]), unda rezultantă are amplitudinea:

$$E'_0 = 2E_0 \cos \pi \Delta r / \lambda.$$

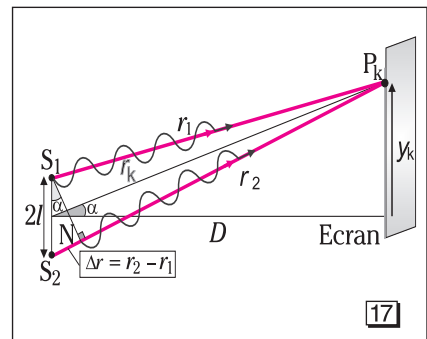
Până în punctul P_k de pe ecran, aflat la distanța y_k față de axa de simetrie, undele cilindrice care provin din sursele S_1 și S_2 parcurg distanțele r_1 și r_2 . Deoarece $D \gg 2l$, segmentul S_1N este practic perpendicular pe r_1 și r_2 .

Pentru unghiuri $\alpha < 5^\circ$ între axa de simetrie și r_k (segmentul care unește punctul P_k cu punctul median dintre fantele S_1 și S_2), putem folosi aproximația: $\sin \alpha \approx \tan \alpha$, deci $\frac{\Delta r}{2l} = \frac{y_k}{D}$.

Rezultă că în punctele P_k de pe ecran care au ordonatele $y_k = \frac{kD\lambda}{2l} = \frac{2kD\lambda}{4l}$, cu $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, se formează **maximul de ordin k** . În punctul de pe axa mediană, se formează maximul central luminos ($k = 0$).



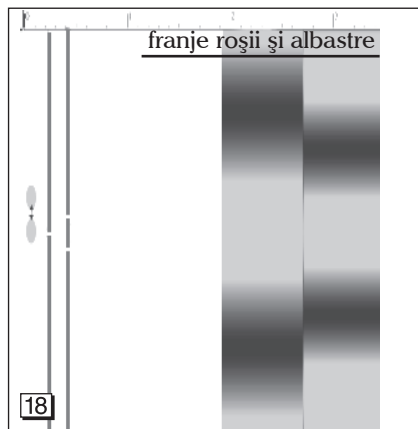
Între fantele S_1 și S_2 (două tăieturi paralele) este o distanță $2l < 1$ mm. Franjele luminoase și întunecate nu sunt localizate și se pot vedea pe un ecran așezat la distanța $D = 1-3$ m. Franjele pot fi focalizate pe un ecran așezat în planul focal al unei lentile convergente.



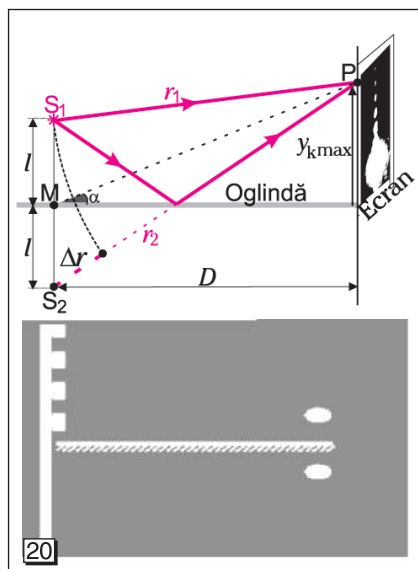
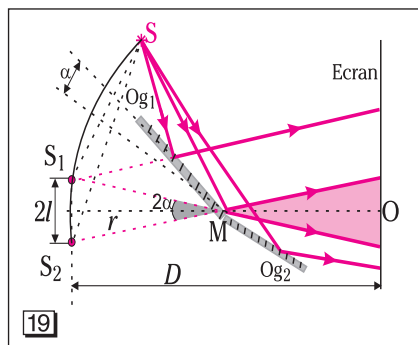
Intensitatea luminoasă, într-un punct de pe ecran, este maximă dacă

$$\Delta r = k\lambda = 2k\frac{\lambda}{2} \text{ sau minimă dacă}$$

$$\Delta r = (2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$



Interfranja radiațiilor roșii este cea mai mare.



Interfranja $i = y_k - y_{k-1} = \frac{D\lambda}{2l}$ reprezintă distanța dintre două maxime sau două minime luminoase consecutive (vezi [18]).

În punctele de pe ecran care au ordonatele $y_k = (2k+1)\frac{D\lambda}{4l}$, se formează **minimul de ordin k**, cu $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Observație:

Formulele de mai sus se aplică oricărui dispozitiv cu două surse de unde coerente, a cărui schemă se reduce la schema dispozitivului Young. Dispozitivele de tip Young formează **franje nelocalizate**, adică se formează în orice poziție a ecranului din regiunea de interferență.

Dacă mediul optic dintre planul fantelor S_1 și S_2 până la ecran nu este aerul, atunci indicele de refracție este $n \neq 1$, iar diferența de drum optic, care satisface condiția de maxim, se scrie: $n(r_2 - r_1) = k\lambda$, deoarece lungimea de undă a luminii în noul mediu devine: $\lambda' = \lambda/n$.

Drumul optic (r) = nr reprezintă drumul geometric pe care l-ar străbate lumina în vid, în același timp în care aceasta ar parcurge distanța r în mediul cu indice de refracție n :

$$(r) = nr, \text{ unde } (r) = ct; r = Vt \text{ și } n = c/V.$$

$$\text{Se verifică: } ct = \frac{c}{V}Vt.$$

* Alte dispozitive echivalente cu dispozitivul Young

♦ **Oglinzile lui Fresnel** este un dispozitiv format din două oglinzi plane care formează un unghi α foarte mic (vezi [19]). Interferența se obține din suprapunerea celor două unde care provin de la cele două surse coerente virtuale S_1 și S_2 , care sunt imaginile sursei luminoase S în cele două oglinzi plane $O_{g,1}$ și $O_{g,2}$. Sursa S este o fantă paralelă cu muchia M comună oglinzilor. Aceste două surse virtuale corespund celor două fante din dispozitivul lui Young. Ecranul se aranjează paralel cu planul imaginilor S_1 și S_2 . Sursele S , S_1 și S_2 sunt dispuse pe un cerc cu raza r egală cu distanța dintre S și muchia M a

oglinzilor. Obținem expresia interfranței: $i = \frac{\lambda D}{2l} \approx \frac{\lambda(r + MO)}{2r\alpha}$.

♦ În dispozitivul interferențial numit **oglinzile lui Lloyd**, interferența se obține din undele care provin de la sursa S_1 , care poate fi o diodă laser sau o fantă luminoasă, și imaginea S_2 a acesteia în oglinda plană O_g (vezi [20]). Franja centrală este întunecată, deoarece reflexia pe oglindă este cu pierdere de

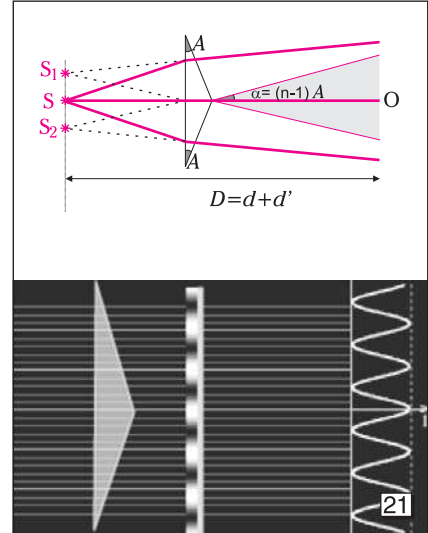
semiundă. Raza directă și raza reflectată parcurg drumuri diferite, deci ajung în punctul P de pe ecran cu un defazaj $\Delta\phi$. Se pot scrie relațiile:

$$\Delta r = \delta = 2l \sin \alpha; \sin \alpha \cong \tan \alpha = \frac{y_k}{D}; \delta = k\lambda; \text{ deci } y_{k,max} = \frac{kD\lambda}{2l}.$$

♦ **Biprisma Fresnel** este un sistem de două prisme identice subțiri (cu unghiul A mic), cu aceeași bază (vezi [21]). Sursa de radiații S , așezată pe axa de simetrie, care este și axă optică, la o distanță d față de planul prismelor, formează prin refracție două imagini virtuale S_1 și S_2 , în același plan cu sursa S . Imaginea de interferență a undelor de la aceste surse coerente se obține pe un ecran așezat la distanța d' față de planul prismelor. Interfranja o scriem prin analogie:

$$i = \frac{\lambda(d' + d)}{2l}, \text{ deoarece } S_1 \text{ și } S_2 \text{ se comportă ca fantele dispozitivului Young plasate la distanța } D = d + d' \text{ față de ecran.}$$

Utilizarea unor dispozitive interferențiale simple are ca scop determinarea cu precizie a lungimilor de undă ale radiațiilor luminoase, a grosimilor lamelor transparente foarte subțiri și a indicilor de refracție ai materialelor din care sunt confecționate lamele transparente.



Probleme rezolvate

1. Dacă pe direcția razei r_2 din dispozitivul Young se introduce o lamă transparentă de grosime $d = e$, drumul optic al undei care trece prin lamă devine: $(r_2) = r_2 - e + ne = r_2 + (n - 1)e$.

Noua diferență de drum optic pentru franja de ordin k devine:

$$\delta'_k = (r_2) - (r_1) = r_2 - r_1 + (n - 1)e = \delta_k + (n - 1)e.$$

Cum se deplasează pe ecran sistemul de franje luminoase (vezi [22])?

Rezolvare:

$$\text{Din } \frac{y_k}{D} = \frac{\delta_k}{2l} \text{ și } \frac{y'_k}{D} = \frac{\delta'_k}{2l}, \text{ rezultă } \frac{y'_k 2l}{D} = y_k \frac{2l}{D} + (n - 1)e.$$

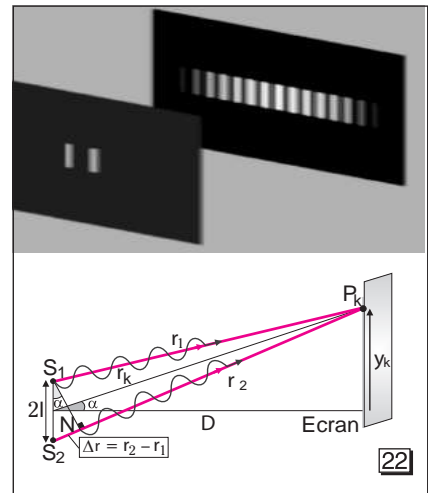
Deplasarea fiecărei franje este egală cu deplasarea noului maxim de ordin zero ($y'_0 = 0$), care ajunge într-o poziție y_k a maximului de ordin k din situația când nu era introdusă lama:

$$0 = y_k \frac{2l}{D} + (n - 1)e. \text{ Obținem deplasarea } y_k = -(n - 1) \frac{eD}{2l}, \text{ spre fanta în dreptul căreia a fost introdusă lama.}$$

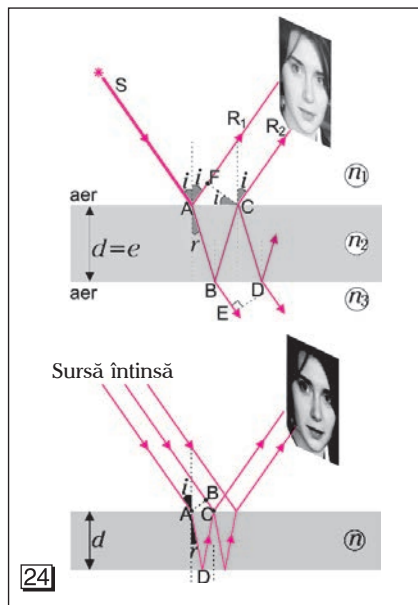
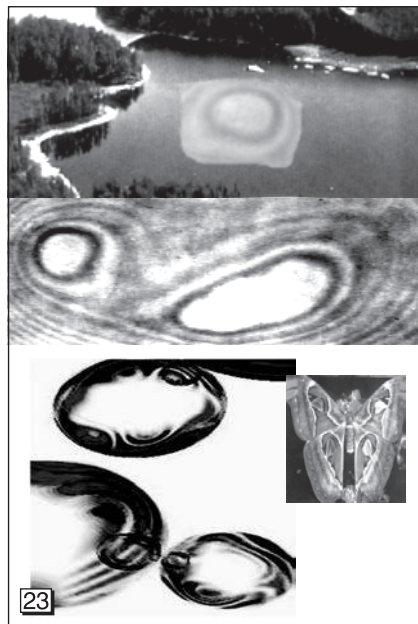
2. Din ce condiție se obține ordinul maxim de interferență care poate fi observat cu oglinda lui Lloyd?

Rezolvare:

Ordinul maxim de interferență care poate fi observat se obține din condiția: $\alpha = 90^\circ$, deci $y_{k,max} = D \sin 90^\circ$ și $k_{max} \lambda = 2l$.



3.2.2. Interferența localizată. Aplicații



În câmpul de interferență, se obțin:

— franje luminoase dacă

$$2n_2d \cos r = (2k + 1)\lambda/2,$$

unde $k = 0, 1, 2, \dots$;

— franje întunecate dacă:

$$2n_2d \cos r = 2k \lambda/2,$$

$$\text{adică } 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} = 2k \frac{\lambda}{2}.$$

Investigarea experimentală a interferenței luminii cu dispozitive de interferență localizată

Interferența localizată se obține cu raze de lumină paralele, emise din puncte diferite ale unei surse de lumină întinse, care se reflectă pe ambele fețe ale peliculelor sau lamelor subțiri transparente: cu fețele plane și paralele sau neparalele. Franjele figurii de interferență sunt localizate.

Interferența constructivă a radiațiilor luminoase provenite de la surse întinse de lumină albă pe peliculele subțiri, cu grosimi de ordinul a zeci sau sute de lungimi de undă, produce irizări foitelor de mică, baloanelor de săpun, peliculelor de ulei pe apă, sidefului, insectelor, lamelor, penelor optice (vezi [23]).

Dispozitive de interferență localizată: lama cu fețe plan paralele și pana optică

Să considerăm radiațiile luminoase care provin de la o sursă, punctiformă sau întinsă, și ajung pe o lamă transparentă cu fețele plan paralele (vezi [24]). Raza R_1 , obținută după reflexia cu pierdere de semiundă pe suprafața de separare cu mediul mai refringent al lamei ($n_2 > n_1$), interferează cu raza paralelă R_2 , obținută după refracție în punctul de incidență A , reflexie în punctul B (fără pierdere de semiundă dacă $n_3 < n_2$) și refracție în punctul C . Razele de lumină R_1 și R_2 sunt coerente (deoarece provin din același punct al sursei) și sunt paralele, deci formează **franje de interferență localizate** (pot fi observate pe suprafața lamei cu privirea neacomodată sau pot fi observate mai bine în planul focal al unei lentile convergente). Diferența de drum optic între aceste raze este:

$$\delta = n_2(AB + BC) - \left(n_1 AF + \frac{\lambda}{2} \right),$$

unde $AB = BC = d/\cos r$; $AC = 2d \tan r$; $AF = AC \sin i = 2d \tan r \sin i$ și $n_1 \sin i = n_2 \sin r$. Obținem:

$$\begin{aligned} \delta &= n_2 \frac{2d}{\cos r} - \frac{2n_1 d \sin i \sin r}{\cos r} - \frac{\lambda}{2} = 2n_2 d \left(\frac{1}{\cos r} - \frac{\sin^2 r}{\cos r} \right) - \frac{\lambda}{2} = \\ &= \frac{2n_2 d}{\cos r} (1 - \sin^2 r) - \frac{\lambda}{2} = 2n_2 d \cos r - \frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

La formarea unei **franje de egală înclinare**, luminoase sau întunecate, contribuie toate razele care ajung pe lamă sub același unghi de incidență. În cazul incidenței normale ($i = 0$ și $r = 0$, din legea refracției), obținem în lumina reflectată: $\delta = 2n_2 d - \lambda/2$. Se observă **franje luminoase circulare monocromatice** dacă $\delta = k\lambda$.

Interferența în lumina transmisă se obține analog, dintr-o rază refractată și o rază care se reflectă pe ambele fețe ale lamei. Așadar, diferența de drum optic nu mai conține pierdere de $\lambda/2$, deci: $\delta = 2n_2 d \cos r$. Rezultă că *franșelor luminoase de la reflexia luminii le corespund franșele întunecate de la transmisia luminii prin lamă*. În lumină albă, franșele de interferență sunt colorate și se observă numai dacă lamele sunt foarte subțiri. Condițiile de maxime luminoase sunt îndeplinite pentru anumite culori la un anumit unghi de incidență (peliculele de săpun apar colorate).

Pana optică este o peliculă de grosime variabilă, delimitată de cele două fețe plane care fac un unghi $\alpha < 5^\circ$. Prelungirile razelor coerente care provin din aceeași rază incidentă și s-au reflectat pe cele două fețe ale lamei formează franșe de interferență virtuale, localizate într-un plan virtual OV , perpendicular pe planul de incidență (vezi [25]).

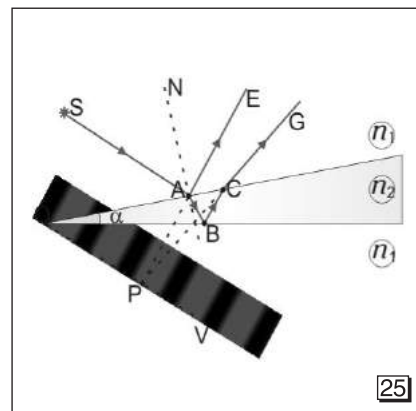
Diferențele de drum optic se modifică de la un punct la altul, deci franșele de interferență paralele și echidistante unesc punctele în care lama are aceeași grosime și se numesc *franșe de egală grosime*.

În cazul incidenței normale pe fața superioară a penei, franșele sunt localizate în interiorul penei (vezi [26]). Condiția de maxim pentru ordinul de interferență k devine:

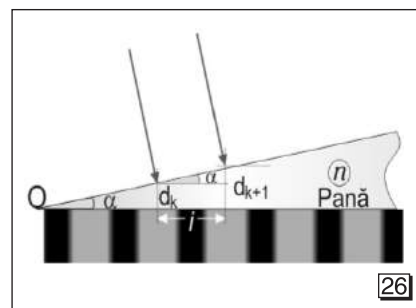
$$\delta = 2n_2 d_k + \lambda/2 = k \lambda, \text{ deoarece } \cos r \approx 1.$$

Rezultă: $2n_2 d_k = (2k - 1)\lambda/2$ și $2n_2 d_{k+1} = (2k + 1)\lambda/2$, de

unde obținem $d_{k+1} - d_k = \frac{\lambda}{2n_2} = i \operatorname{tg} \alpha \approx i \alpha$. Interfranșă $i = \frac{\lambda}{2n_2 \alpha}$ este mai mare atunci când unghiul este mai mic.

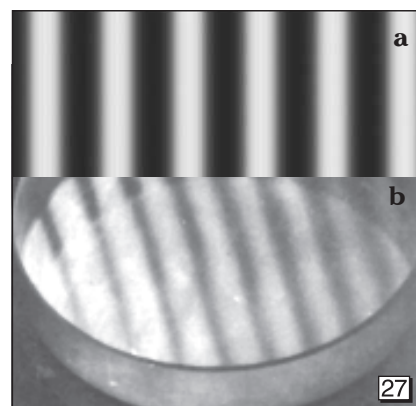


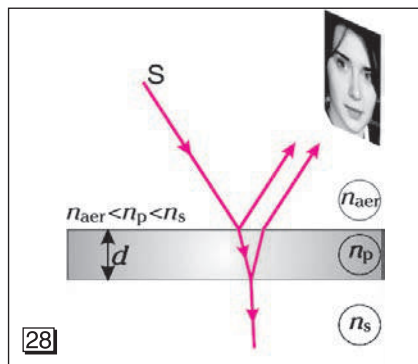
Pentru o anumită grosime a penei se formează o franșă paralelă cu muchia, numită **franșă de egală grosime**.



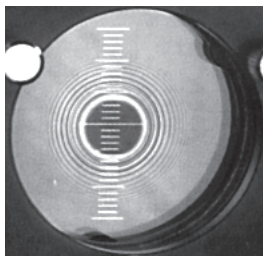
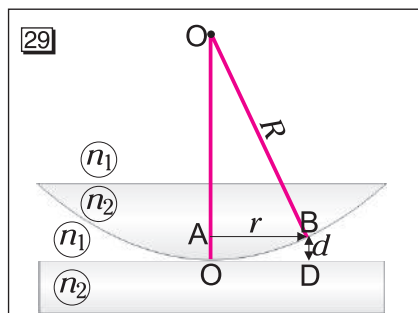
Aplicații în tehnică ale interferenței localizate: planeitate, *, „optica albastră”

1. Pana de aer este folosită pentru a verifica dacă lamele transparente au fețe plan paralele. Cu lama transparentă pe care dorim să o verificăm se poate forma o pană de aer față de suprafața orizontală a apei dintr-un vas. Apar franșe de egală grosime. Interferența produsă în pana de aer de lumina monocromatică este caracterizată de franșe luminoase paralele între ele și cu muchia de intersecție lamă-apă, dacă fețele lamei sunt plane și paralele (vezi [27a]). Dacă nu sunt plane și paralele, apar franșe luminoase neparalele între ele (vezi [27b]). Dispozitivele de interferență etalonate pentru efectuarea unor măsurători precise a dimensiunilor și a indicilor de refracție se numesc *interferometre*.

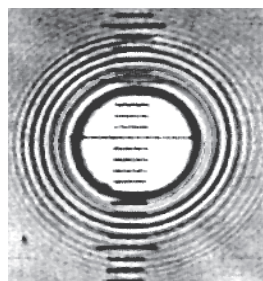




Dacă indicele de refracție al peliculei este *mai mare decât* al sticlei ($n_p > n_s$), atunci reflexia luminii se face fără pierdere de $\lambda/2$ pe suprafața de separație peliculă-sticlă. Pelicula are grosimea minimă $d_{\min} = \lambda/2n_p$, deoarece condiția de minim este $2n_p d_{\min} = 2k \lambda/2$.



Franje în lumină reflectată



Franje în lumină transmisă

2. *Peliclele transparente subțiri depuse pe suprafețele lentilelor pot să se comporte ca strat antireflex dacă undele reflectate pe cele două fețe interferă distructiv (vezi [28]). Această tehnică de reducere a reflexiei radiațiilor luminoase poartă numele de „**optică albastră**”. Dacă indicele de refracție al peliculei este $n_p = 1,4$ și al sticlei $n_s = 1,5$, atunci reflexia luminii se face cu pierdere de $\lambda/2$ pe ambele suprafețe de separație (aer-peliculă și peliculă-sticlă). La incidență aproape normală, se obține interferență distructivă dacă pelicula are grosimea minimă d_{\min} pentru condiția de interferență distructivă:

$$2n_p d_{\min} = (2k + 1)\lambda/2. \text{ Grosimea minimă } d_{\min} = \frac{\lambda}{4n_p} \text{ se obține}$$

pentru $k = 0$. În practică, dacă se realizează extincția razelor galben-verzui, se mai reflectă nedistructiv cele albastre, violete și roșii. Suprafețele acestor lentile, privite la lumina zilei, apar colorate.

Probleme rezolvate

1. O lentilă plan convexă, cu raza R de curbură mare, este așezată cu fața curbă pe o lamă plană din sticlă. Se formează o pană de aer subțire, de grosime variabilă. Când lentila este iluminată la incidență normală, cu diferite radiații λ , se observă franje circulare, numite *inelele lui Newton*, cu centre în punctul de contact între lentilă și placă (vezi [29]). În lumină albă, culorile absente în lumina transmisă sunt prezente în lumina reflectată.

Calculați raza franjelor.

Rezolvare:

Zona centrală corespunde minimului de ordin $k = 0$, în reflexie, și maximumului de ordin $k = 0$, în transmisie. Notăm $r = AB$ și R — raza sferei din care face parte lentila. Folosind teorema înălțimii într-un triunghi dreptunghic înscris într-un cerc de rază R , obținem: $r^2 = d(2R - d)$. Deoarece $d \ll R$, rezultă că $r^2 \approx 2dR$ și deci:

$$\delta \approx 2d + \lambda/2 = r^2/R + \lambda/2; \delta_{\max} = k\lambda; \delta_{\min} = (2k + 1)\lambda/2,$$

$$\text{rezultă: } r_{k,\max} = [(2k - 1)R\lambda/2]^{1/2}; r_{k,\min} = (kR\lambda)^{1/2}.$$

2. Prin așezarea unui fir de păr între două lame de sticlă se formează o pană de aer. Dacă interfranja este $i = 15$ mm pentru iluminarea cu $\lambda = 600$ nm, se cere unghiul penei, exprimat în radiani. Cât devine interfranja dacă sistemul se introduce în apă?

Rezolvare:

Deoarece $n_{\text{aer}} = 1$, relația de calcul devine $i = \lambda/2\alpha$.

Se obține $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}$. Interfranja devine $i' = i/n_{\text{apă}} = 10$ mm.



3.3. *DIFRAȚIA LUMINII. APLICAȚII

**Identificarea în natură și în tehnică a fenomenelor de difracție*

Raza de lumină este modelul folosit pentru propagarea rectilinie a radiațiilor luminoase, dacă dimensiunile deschiderilor folosite sunt mult mai mari decât lungimea de undă a acestor radiații. Lumina care pătrunde printre gene sau prin țesături produce irizații, vârful unui corp ascuțit pare „tăiat” de lumina provenită de la o sursă puternică, iar prin fante lumina pătrunde în spatele zonei opace, adică în zona umbrei apare lumină (vezi [30]). Ce observi când privești, printre două degete apropiate, o sursă de lumină? Din studiul undelor elastice am reținut faptul că fenomenul de difracție constă în schimbarea direcției de propagare a undelor când acestea întâlnesc un obstacol sau o deschidere cu dimensiuni comparabile cu lungimea de undă a acestora. Punctele din fantele înguste sau de lângă marginile obstacolelor devin (conform principiului Huygens) surse de unde sferice, care se propagă în spatele acestora.

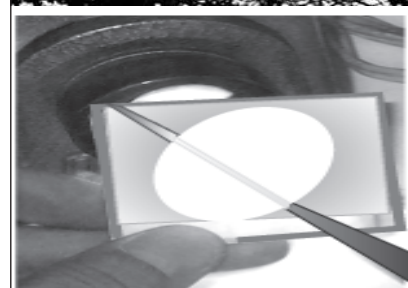
Difracția luminii reprezintă fenomenul de pătrundere a luminii în spatele obstacolelor și fantelor, deci abaterea de la propagarea rectilinie. Prin difracția luminii, frontul de undă se deformează și lumina se propagă și în spatele orificiilor sau obstacolelor, în zona de umbră geometrică (vezi [31]).

Fiecare punct al unui front de undă poate fi considerat ca sursă secundară de unde sferice coerente, iar noul front de undă reprezintă înfășurătoarea fronturilor de unde secundare. Undele secundare sunt coerente, pot interfera în zona dintre lumină și umbra geometrică, deci difracția luminii este însoțită de apariția unor maxime și minime luminoase, numite **franje de difracție**.

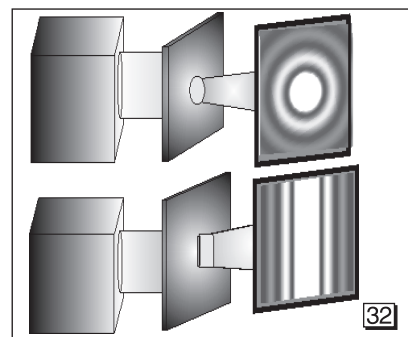
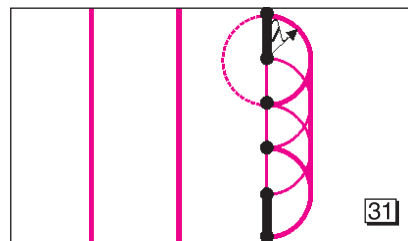
**Investigarea experimentală a fenomenului de difracție a luminii*

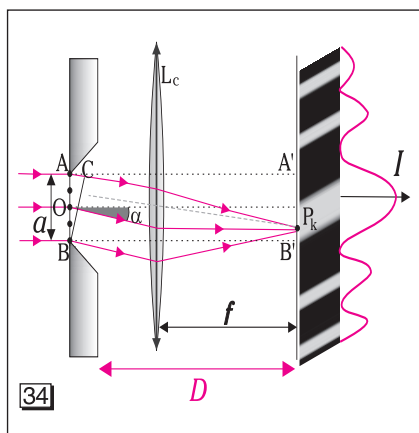
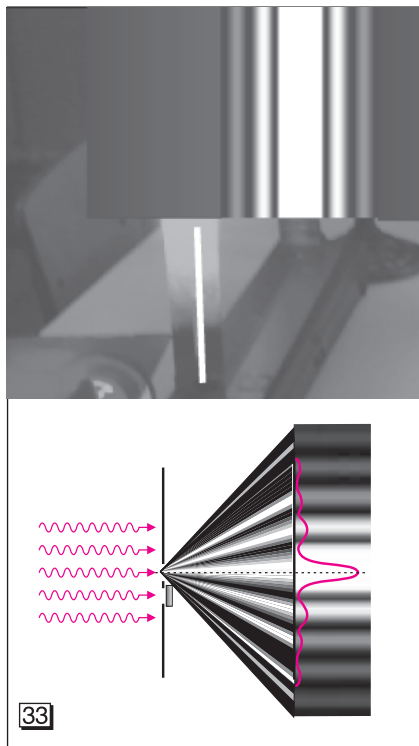
Un fascicul paralel de lumină monocromatică pătrunde printr-o deschidere reglabilă (dreptunghiulară sau circulară) și formează pe un ecran o zonă luminoasă de aceeași culoare (deci frecvența ν nu se modifică la trecerea prin fantă) și de aceeași formă cu fanta, dacă lățimea fantei este mult mai mare decât lungimea de undă.

Dacă micșorăm foarte mult deschiderea, vom observa că pe ecran apar franje luminoase și întunecate de difracție (vezi [32]).



În vecinătatea marginilor unui corp opac apar maxime și minime luminoase.





Dacă acoperim una dintre fantele dispozitivului Young, franjele de interferență dispar, dar se văd franjele de difracție ale unei fante (vezi [33]). Se poate spune că franjele de interferență ale celor două fante sunt modulate de franjele de difracție ale unei singure fante.

Intensitatea luminoasă a maximului central este mai mare decât a celorlalte maxime. În lumină albă, franja centrală luminoasă este albă, iar celelalte sunt irizate.

*Condițiile în care se poate produce difracția luminii

Difracția în lumină cu raze divergente se numește **difracție Fresnel**, iar în lumină cu raze paralele se numește **difracție Fraunhofer**.

În practică, un fascicul de lumină cu raze paralele, care trece printr-o fantă filiformă, foarte îngustă, formează franje de difracție pe un ecran (vezi [34]).

Considerăm fanta, de lățime a , împărțită în $2k$ surse luminoase filiforme coerente, de lățime $\Delta a = \frac{a}{2k}$, ca surse secundare de la care se propagă unde cilindrice elementare până la ecran, în punctul P_k de coordonată y_k . Pentru anumite unghiuri α de difracție față de direcția normală pe planul fantei și pe al ecranului, aflat la distanța D , diferența de drum a undelor care ajung în punctul P_k de pe ecran este:

$$\delta = r_2 - r_1 = r_4 - r_3 = \dots = r_{2k} - r_{2k-1} = (\Delta a) \sin \alpha,$$

unde $\Delta a = a/2k$. Dacă $\delta = \lambda/2$, atunci este satisfăcută condiția de minim și undele coerente se anulează două câte două în acest punct:

$$\frac{a}{2k} \sin \alpha = \frac{\lambda}{2}, \text{ adică } a \sin \alpha = k \lambda.$$

Formula este valabilă pentru minimele de difracție ale fantei. Dacă fanta are lățimea a foarte mică, atunci primul maxim (central) de difracție se întinde simetric, între primele minime ($k = \pm 1$); $\sin \alpha = \pm \frac{\lambda}{a} = \frac{x_{1,l'}}{D}$. Franja centrală de difracție corespunzătoare are lățimea:

$$i_{0, \text{difracție}} = x_1 - x'_1 = 2 \frac{D\lambda}{a} \text{ sau } i_{0, \text{difracție}} = x_1 - x'_1 = 2 \frac{f\lambda}{a}$$

(în cazul în care se focalizează franjele pe ecran cu ajutorul unei lentile convergente, cu distanța focală f , practic alipită fantei).

*Construcția rețelei de difracție

Rețeaua de difracție constă dintr-un număr mare N de fante filiforme identice, de lățime a , paralele, echidistante și foarte apropiate una de cealaltă, la distanța b (vezi [35]). O astfel de rețea se realizează prin trasarea pe o lamă netedă din sticlă sau material plastic transparent sau opac a unui număr N de zgârieturi rectilinii și opace, de lățime b , pe o distanță L . Intervalele transparente sau opace și netede dintre zgârieturi reprezintă fantele. O rețea are un număr $n' = \frac{N}{L}$ de trăsături pe unitatea de lungime și o distanță $l'_{\text{rețea}} = \frac{L}{N} = \frac{1}{n'}$ între centrele a două trăsături succesive, distanță care se numește **constanta rețelei** ($l'_{\text{rețea}} = a + b$).

Observație:

Notăm deocamdată constanta rețelei cu l' pentru a nu se confunda cu notația l de la dispozitivul Young și numărul de trăsături pe unitatea de lungime cu n' pentru a nu se confunda cu notația n a indicelui de refracție. Difracția printr-o rețea poate fi realizată prin transmisie și prin reflexie dacă lama este transparentă sau numai prin reflexie dacă lama este opacă.

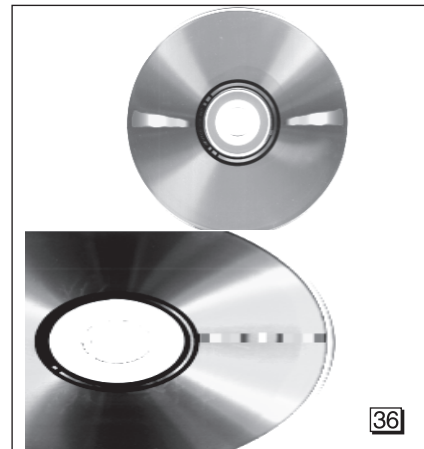
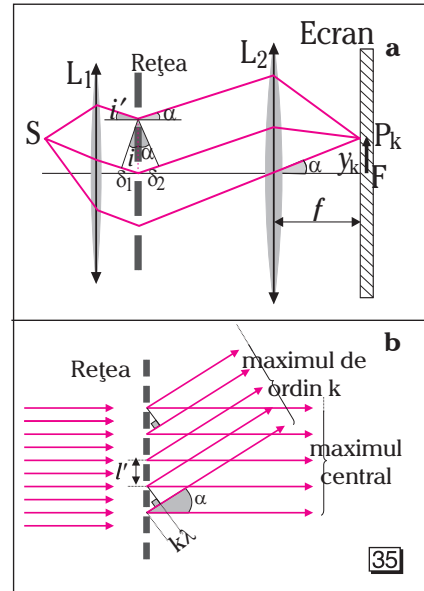
*Experimente pentru evidențierea difracției luminii

Apropie un compact disc (CD) de flacăra unei lumânări sau brichete. CD-ul se comportă ca o rețea de difracție, prin reflexia luminii (vezi [36]). În afară de imaginea centrală, vei mai vedea câteva franje colorate de difracție, deoarece razele de lumină difractate prin reflexie pe rețeaua de șanțuri ale acestuia interferă.

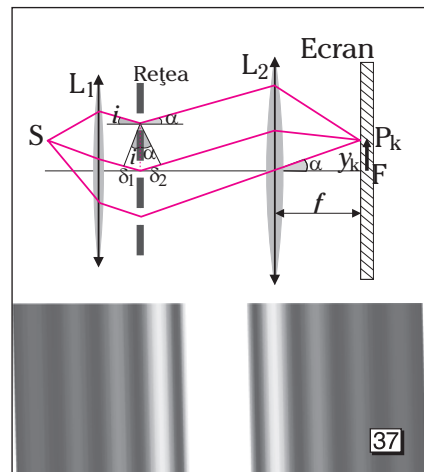
Considerăm un fascicul paralel de lumină monocromatică, provenit de la o sursă luminoasă S așezată în focarul lentilei L_1 , care ajunge sub un unghi de incidență i pe rețeaua de difracție prin transmisie (vezi [37]). Conform principiului Huygens-Fresnel, fiecare fantă a rețelei devine sediul unor noi unde secundare care se propagă în toate direcțiile.

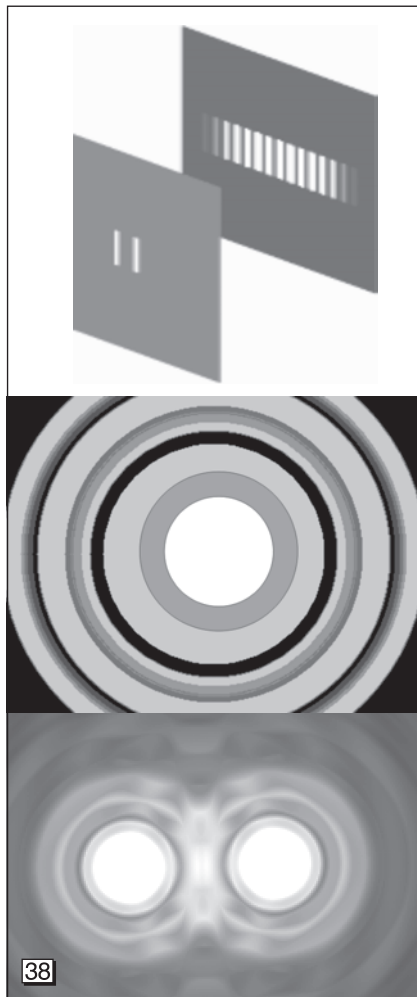
La rețeaua de difracție, întâlnim o suprapunere a interferenței fasciculelor difractate de toate fantele cu difracția printr-o fantă îngustă (cu lățimea a comparabilă cu λ).

Considerăm razele difractate sub un unghi α de toate fantele. Diferența de drum optic între razele difractate de două fante consecutive este: $\delta = \delta_1 \pm \delta_2$, unde $\delta_1 = l' \sin i$ reprezintă diferența de drum optic între undele incidente pe rețea și $\delta_2 = l' \sin \alpha$ reprezintă diferența de drum optic între undele difractate sub unghiul α (vezi [35]a).



Compară acest spectru cu spectrul unei prisme.





Franje de interferență și de difracție conturate clar pot fi obținute numai în lumină monocromatică (vezi [38]). În lumină albă, nu se mai disting franjele luminoase de ordin superior de cele întunecate.

Condiția pentru maxime de difracție, la incidență normală pe o rețea de difracție cu distanța l' între două fante succesive este: $l' \sin \alpha = k\lambda$.

Lărgimea unui spectru de difracție de ordin k reprezintă distanța măsurată pe ecran între franjele luminoase ale ordinului k de difracție, notate cu y_k .

Rezultă că, prin interferența undelor provenite de la două fante aflate la distanța l' se obțin maxime dacă $\delta = k\lambda$ și minime dacă $\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, unde

$$\delta = l' (\sin i \pm \sin \alpha).$$

Semnele (\pm) corespund razelor incidente și difractate de aceeași parte a normalei și, respectiv, de o parte și cealaltă a normalei.

Dacă razele difractate de două fante vecine, sub un anumit unghi α , au între ele o diferență de drum corespunzătoare unui maxim, atunci razele difractate de toate fantele rețelei sub același unghi vor conduce la formarea unui maxim în planul focal al lentilei L_2 . În fenomenul de interferență a fasciculelor difractate, vom obține maxime în toate direcțiile care satisfac relația: $l'(\sin i \pm \sin \alpha) = k\lambda$, pentru radiația monocromatică λ , unde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Figura de difracție va conține întotdeauna o franjă centrală, care este maximul de ordin $k = 0$ pentru toate lungimile de undă.

Pentru $k = \pm 1$, se vor obține două maxime de ordinul întâi, pentru $k = \pm 2$, se vor obține două maxime de ordinul doi etc.

Spectrele de difracție de ordine diferite sunt dispuse de ambele părți ale franjei centrale.

În fenomenul de difracție prin fantele rețelei, maximele nu vor avea aceeași intensitate, care va scădea odată cu creșterea ordinului k . Dacă iluminăm rețeaua cu lumină albă, fiecare radiație cu o anumită lungime de undă λ_i va produce maximul luminos de ordin k sub alt unghi α_i , astfel că pe ecran se formează mai multe spectre (radiațiile cu λ_i mai mici sunt situate mai aproape de franja centrală).

La incidență normală ($i = 0$), rezultă relația: $\pm l' \sin \alpha = k\lambda$. La unghiuri de difracție mici, considerăm $\tan \alpha \approx \sin \alpha$. Punctul P_k în care se formează maximul de ordin $k = 1$ se află la distanța y_1 față de axa optică: $y_1 = f_2 \tan \alpha \approx f_2 k \lambda n'$, deoarece $n' = 1/l'$. Rezultă **relația pentru calculul lungimii de undă a unei radiații**: $\lambda = y_1 / k f_2 n'$, dacă știm distanța focală f_2 și n' , iar experimental determinăm distanța y_k .

Numărul total de spectre este partea întreagă a expresiei: $N = [2k_{\max} + 1]$, unde k_{\max} corespunde unghiurilor de difracție $\alpha = \pm \pi/2$.

***Aplicații în știință și tehnică a difracției luminii**

Rețeaua de difracție se folosește în spectrometrie, în locul prisme, pentru a produce dispersia unui fascicul de lumină într-un spectru. Dacă se cunoaște constanta rețelei, prin măsurarea unghiului de deviație se poate calcula valoarea lungimii de undă. Atomii din nodurile unei rețele cristaline formează o rețea tridimensională pentru difracția radiațiilor X.

Utilizarea dispozitivelor de difracție are ca scop determinarea cu precizie a lungimilor de undă ale radiațiilor luminoase și a constantei rețelei folosite.

****Investigarea experimentală a fenomenului de difracție a luminii cu rețeaua de difracție***

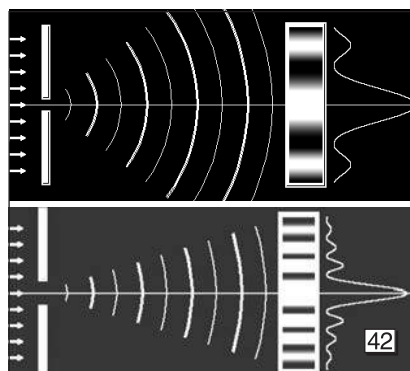
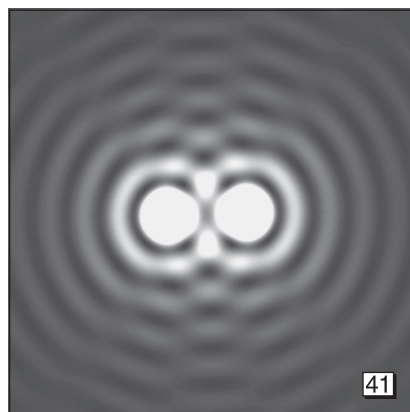
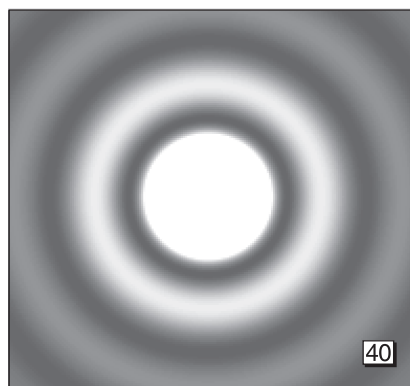
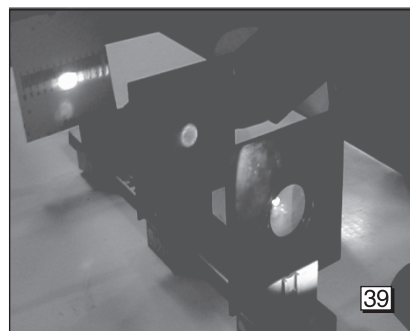
1. Pe un banc optic aranjează: o sursă luminoasă cu fantă, o lentilă convergentă, în al cărei plan focal se află fanta. Fasciculul paralel ajunge pe o rețea optică de constantă $l' = 1/n'$ având trăsăturile paralele cu fanta și cu filamentul becului. În planul focal al altei lentile, așezăm un ecran pe care se formează franje clare (vezi [39]). Marchează pe ecran pozițiile maximelor de același ordin k și de aceeași culoare, apoi măsoară distanța $M_k M'_k$ dintre acestea și vei obține $y_k = \frac{M_k M'_k}{2}$.

Măsoară distanța D până la ecran, care coincide cu distanța focală a celei de-a doua lentile. Calculează lungimea de undă a unor radiații, cu formula: $\lambda = \frac{y_k}{n'kD}$ sau $\lambda = \frac{y_k}{n'kf}$.

2. Privește printr-un orificiu îngust, cu diametrul $d < 1$ mm, făcut cu vârful unui ac într-o folie de staniol. Literele unui text se văd clar, cu ochiul adus foarte aproape de orificiu, chiar și de către cei cu defecte de vedere, fără să fie nevoie să folosească ochelari! Distanța de citire $d = 10-15$ cm este mai mică decât cea optimă $d = 25$ cm. Literele sunt văzute sub un unghi mic prin acest orificiu îngust, ca și obiectele plasate la distanță mare, deci cristalinul ochiului este relaxat (vezi [40]). Dacă privești prin orificiu o sursă luminoasă, „firele” pe care le vezi reprezintă figuri de difracție ale lanțurilor de celule din ochi. Dacă mărești orificiul cu vârful unui creion, nu mai vezi clar!

3. Dacă privești literele textului prin două orificii circulare, cu diametrul $d < 1$ mm și cu distanța $b \approx 1$ mm între ele, vei vedea imaginile suprapuse parțial (vezi [41]). Dacă privești filamentul unui bec sau Soarele cu ochiul mai îndepărtat de orificiul larg sau de cele două orificii, vei observa irizări.

4. Taie, cu o lamă, două fante subțiri de grosimi aproximativ egale într-o folie de staniol. Îndreaptă fasciculul luminos al unei diode laser spre fiecare fantă și proiectează franjele pe un ecran sau un perete (vezi [42]). Acestea se observă bine într-o cameră întunecată, pe un perete situat la o distanță $D \geq 1$ m.



***Probleme rezolvate**

1. O rețea de difracție cu constanta $l' = 10^{-6}$ m este iluminată cu o radiație de lungime de undă $\lambda = 500$ nm. Maximul luminos de ordinul al doilea se obține sub unghiul de difracție numeric egal cu unghiul de incidență. Se cer:

- a) unghiul de incidență;
- b) numărul total al maximelor luminoase de difracție care se pot forma.

Rezolvare:

a) $l'(\sin \alpha \pm \sin i) = k\lambda$ $i = \alpha$; $\sin i = k\lambda / 2l'$; $i = 30^\circ$;

b) Numărul total al maximelor luminoase de difracție este:
 $N_{\max} = [k_{1\max} + k_{2\max} + 1]$, unde $k_{1\max}$ și $k_{2\max}$ sunt ordinele de difracție, pentru maximele formate de o parte și de alta a maximului central, obținute pentru $\alpha_{\max} = 90^\circ$, iar $[\]$ reprezintă partea întreagă a numărului dat.

Se pot forma $N_{\max} = 3 + 1 + 1 = 5$ maxime luminoase.

2. O rețea de difracție plană cu $N = 5\,000$ de trăsături și lățimea $L = 4$ cm este iluminată normal cu lumină albă, iar imaginea de difracție se obține pe un ecran aflat în planul focal al unei lentile convergente cu distanța focală $f = 1$ m (vezi [43]). Determină lungimea de undă a radiației optice al cărei maxim luminos de ordinul al doilea se obține la distanța de 10 cm față de axa optică a lentilei.

Rezolvare:

$$l' = L/N \Rightarrow l' = 8 \cdot 10^{-6} \text{ m.}$$

Condiția de formare a maximelor: $l' \sin \alpha = k\lambda$;

$$\operatorname{tg} \alpha = x_k / f = \sin \alpha; \quad \lambda = l' x_k / k f = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 400 \text{ nm.}$$

3. Un fascicul paralel de raze luminoase, cu lungimea de undă λ , ajunge sub unghiul $i = 45^\circ$ pe o rețea de difracție plană cu constanta de rețea $l' = 0,6 \cdot 10^{-6}$ m. Unghiul de difracție corespunzător maximului de difracție de ordinul al doilea este $\alpha = 30^\circ$, fiind de aceeași parte a normalei cu unghiul de incidență. Calculează lungimea de undă a radiației incidente.

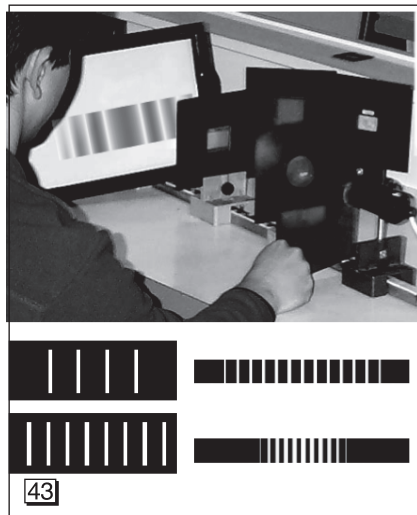
Rezolvare:

$$l'(\sin \alpha \pm \sin i) = k\lambda; \quad \lambda = 7,2 \cdot 10^{-6} \text{ m.}$$

4. Spectrul dat de o rețea de difracție se deosebește de spectrul unei prisme pentru aceeași sursă luminoasă, deoarece:

- a) prisma produce un spectru uniform;
- b) prisma produce un singur spectru, în care deviația maximă o au radiațiile violete, iar rețeaua produce perechi de spectre în care deviația minimă o au radiațiile violete;
- c) rețeaua de difracție produce perechi de spectre în care deviația minimă o au radiațiile roșii.

Răspuns: b.

**ISTORIC**

În secolul al XIX-lea, concepția ondulatorie a luminii s-a impus datorită descoperirii interferenței luminii, în 1801, de către *Thomas Young* (1773-1829). *Augustin Jean Fresnel* (1788-1827) imaginează dispozitive pentru studiul undelor luminoase și elaborează teoria difracției (în 1818). *Etienne-Louis Malus* (1775-1812) descoperă, în 1809, polarizarea luminii. *Dominique François Arago* (1786-1853) descrie, în 1811, efectele de culoare ce se pot observa la cristale în lumina albă polarizată.



3.4. *POLARIZAREA LUMINII. APLICAȚII

Undele transversale dintr-o coardă pot trece printr-o fantă dreptunghiulară dacă vectorul elongație al oscilațiilor este paralel cu fanta (vezi [44]). Undele electromagnetice sunt unde transversale. Oscilațiile vectorului \vec{E} (intensitatea câmpului electric), care produce senzația de lumină pe retină, sunt perpendiculare pe direcția de propagare. Radiația electromagnetică este emisă sub formă de trenuri de unde electromagnetice transversale în urma proceselor de excitare-dezexcitare, ale atomilor și ionilor, care se repetă la intervale de timp foarte mici. Oscilațiile intensității câmpului electric \vec{E} au loc în toate direcțiile perpendiculare pe direcția de propagare în cazul luminii naturale și vârfurile vectorilor \vec{E} sunt reprezentate pe un cerc cu raza egală cu amplitudinea.

Polarizarea totală a luminii este procesul de transformare a unei radiații electromagnetice din starea în care intensitatea câmpului electric oscilează haotic în toate direcțiile posibile dintr-un plan perpendicular pe direcția de propagare în starea polarizată, în care intensitatea câmpului electric prezintă o direcție preferențială de oscilație perpendiculară pe direcția de propagare.

În cazul luminii parțial polarizate, reprezentăm vectorii \vec{E} cu vârfurile pe o elipsă, perpendiculară pe direcția de propagare, iar în cazul luminii nepolarizate, reprezentăm vectorii \vec{E} cu vârfurile pe un cerc perpendicular pe direcția de propagare (vezi [45]).

*Polarizarea luminii prin reflexie

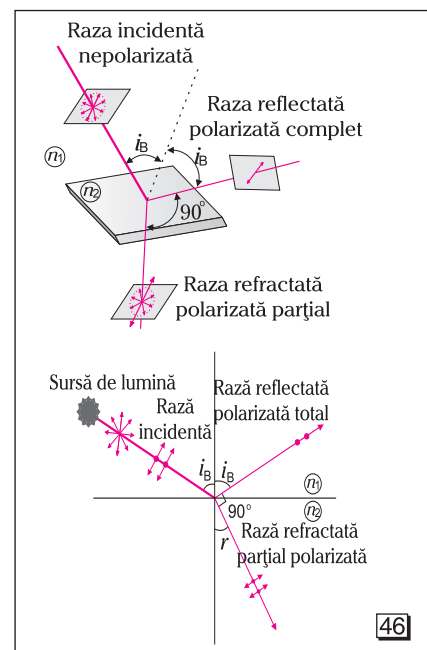
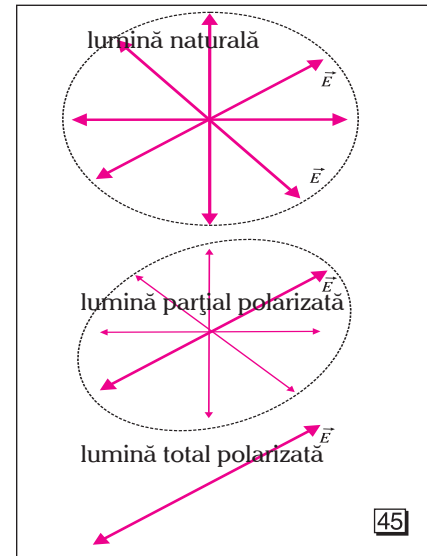
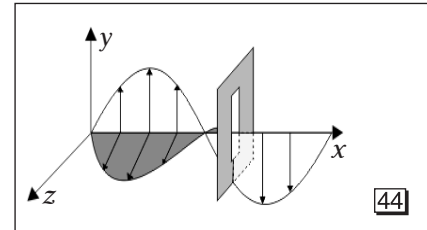
În anul 1809, Malus a descoperit că lumina poate fi parțial polarizată prin reflexie pe o oglindă dielectrică. Pentru un unghi de incidență i_B , Brewster constată experimental că lumina reflectată este total polarizată, cu vectorul \vec{E} perpendicular pe planul de incidență, lumina refractată este parțial polarizată (vezi [46]), iar direcțiile de propagare ale acestora sunt perpendiculare.

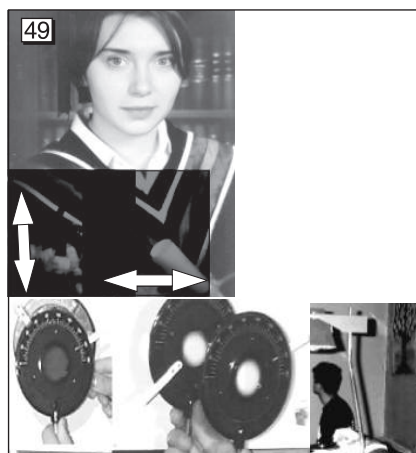
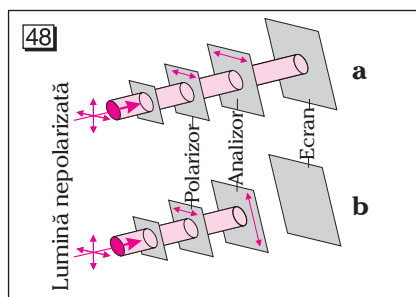
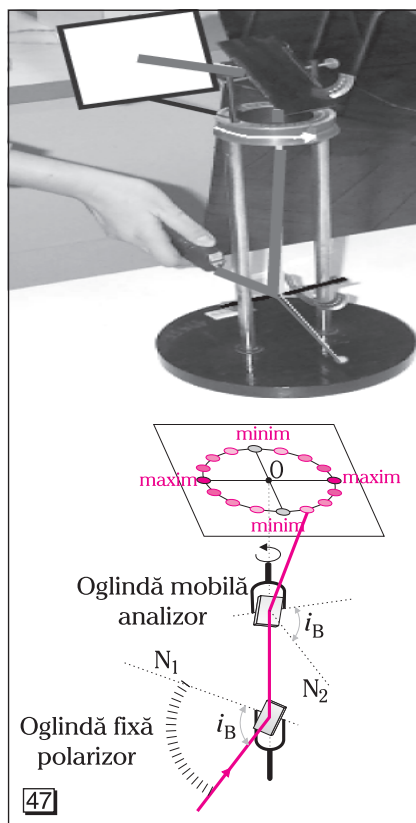
Ecuția atașată legii lui Brewster:

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1},$$

se obține din condiția $i_B + r = 90^\circ$, folosită în legea refracției: $n_1 \sin i_B = n_2 \sin r$, deci $n_1 \sin i_B = n_2 \cos i_B$.

Pentru sticlă, avem $i_B = 57^\circ$, iar pentru apă, $i_B = 53^\circ$.





Polarizarea radiațiilor luminoase se poate obține: prin reflexie pe suprafața dielectricilor, prin refracție într-un mediu transparent, prin birefringență în cristale anizotrope sau prin împrăștiere.

Un fascicul îngust de lumină se reflectă pe o oglindă dielectrică fixă (polarizor), ajunge pe o altă oglindă identică (analizor), care se poate roti cu 360° , și apoi pe un ecran. Pe ecran se observă, în timpul unei rotații complete a oglinzii superioare în jurul razei de lumină incidentă pe aceasta, două maxime luminoase care alternează cu două minime luminoase. Minimele devin nule dacă ambele oglinzi sunt aranjate astfel încât formează unghiul Brewster (vezi [47]).

Anumite substanțe au proprietatea de a permite trecerea radiațiilor luminoase care au vectorul \vec{E} orientat pe o anumită direcție. Lamele cu pelicule transparente din asemenea substanțe, care transmit lumină total polarizată, se numesc **polarizori**.

Pentru a pune în evidență polarizarea luminii transmise de un polarizor, trebuie folosit un al doilea polarizor, numit **analizor**, așezat coaxial cu primul (vezi [48]). Dacă privești prin lentile polaroid lumina naturală reflectată pe suprafața apei, constăți că intensitatea luminii trece prin două minime, dacă rotești lentilele cu 360° .

În lumina naturală reflectată, predomină lumina polarizată în direcție orizontală. Dacă direcția de transmisie prin polarizi este verticală, se elimină lumina polarizată orizontal.

Planul de oscilație este definit de vectorul \vec{E} și de direcția de propagare a luminii liniar polarizate. Dacă se rotește analizorul în jurul direcției de propagare a luminii, se constată variații ale intensității luminii transmise, de la o valoare maximă, când direcțiile de polarizare ale celor doi polarizori sunt paralele, până la o valoare minimă, când polarizorul și analizorul sunt încrucișați (vezi [49]).

Dacă unghiul dintre planele de oscilație ale celor două pelicule polarizatoare este θ , atunci analizorul va lăsa să treacă numai componenta paralelă cu planul său de oscilație, $E_A = E_M \cos \theta$, unde E_M este amplitudinea luminii liniar polarizate obținută din polarizor.

Deoarece intensitatea luminii este proporțională cu pătratul amplitudinii, rezultă că intensitatea fascicului luminos transmis de sistemul polarizor-analizor va depinde de unghiul θ după **legea lui Malus** (descoperită în 1809):

$$I = I_{\max} \cos^2 \theta.$$

*Aplicații în știință și tehnică ale fenomenului de polarizare

Polarizorii, convenabil orientați în fața obiectivului, sunt folosiți de către fotografi pentru a elimina radiațiile polarizate prin reflexie (vezi [50]).

Utilizarea sticlei polarizante la ochelarii de soare diminuează intensitatea luminii parțial polarizate prin reflexie pe anumite suprafețe orizontale: șosele ude, lacuri etc.

Se observă că dintr-o rază de lumină naturală incidentă pe una dintre fețele unui cristal anizotrop, ca spatul de Islanda, se obțin prin refracție două raze, fenomen numit **birefrință** (vezi [51]). Se constată că cele două raze sunt total polarizate în plane perpendiculare unul pe celălalt și au indici de refracție diferiți.

Vectorul \vec{E} oscilează perpendicular pe planul de incidență al razei ordinare, care respectă legile refracției. Raza care nu respectă legile refracției este **numită rază extraordinară**.

Birefrința provocată prin tensionare stă la baza *fotoelasticității*. Supunând un corp optic transparent și omogen la o tensiune mecanică și apoi introducându-l între un polarizor și un analizor încrucișați ($\theta = \pi/2$), se observă o mulțime de franje de interferență colorate, o franjă izocromă reprezentând o linie de aceeași tensiune (vezi [52]).

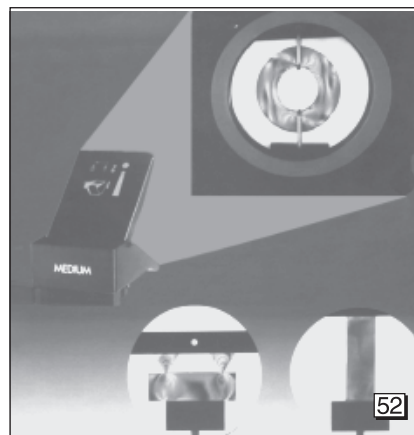
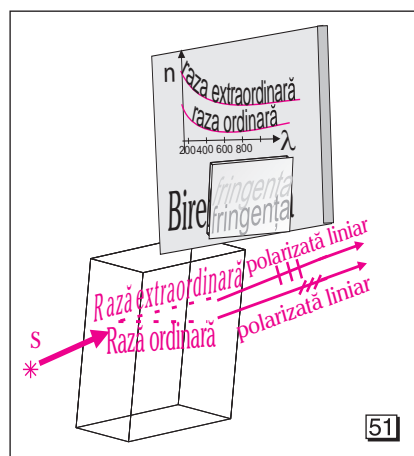
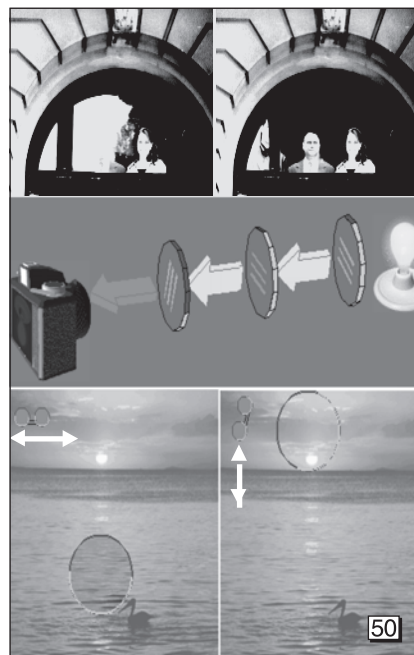
Cu acest fenomen se studiază tensiunile care apar într-un corp solicitat mecanic. Dacă acesta este opac, se face un model transparent, identic cu corpul studiat, din sticlă sau materiale plastice care devin birefringente atunci când sunt supuse comprimărilor. Distribuțiile tensiunilor din apropierea găurilor sau a vârfurilor sunt analizate optic.

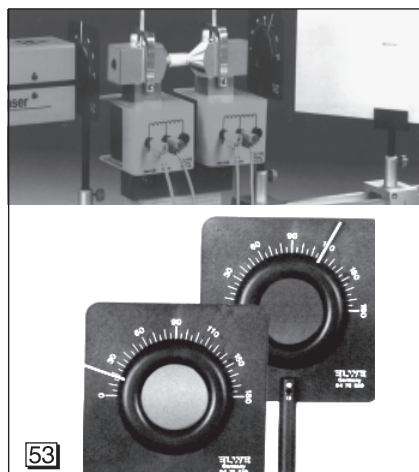
Acțiunea anumitor substanțe (numite optic active) asupra luminii polarizate se numește **polarizare rotatorie** și se manifestă prin rotirea direcției de oscilație a vectorului \vec{E} .

Polarizarea rotatorie care se produce într-un mediu inactiv optic introdus într-un câmp magnetic intens, datorită interacției dintre acesta și electronii atomilor și moleculelor mediului, se numește **polarizare rotatorie magnetică** sau **efect Faraday**.

Investigație experimentală

Cu o sursă de lumină monocromatică se luminează doi polarizori reglați la 90° , deci analizorul oprește complet lumina care iese din polarizor. Fasciculul de lumină străbate o soluție de zaharoză, plasată pe traiectoria luminii între polarizor și analizor.



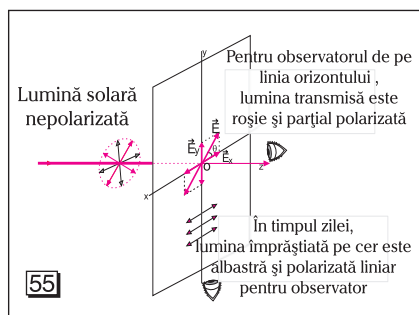
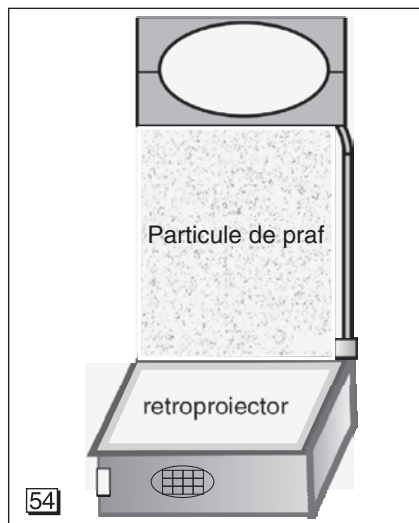


Observatorul percepe din nou lumina și rotește analizorul cu un anumit unghi pentru ca lumina să dispară iar (vezi [53]). Lumina este, în continuare, total polarizată după ce a străbătut soluția de zaharoză, deși planul de oscilație s-a schimbat. Substanțele care acționează în acest mod asupra luminii polarizate produc polarizare rotatorie. Unghiul cu care se rotește analizorul crește odată cu concentrația soluției și cu grosimea stratului traversat.

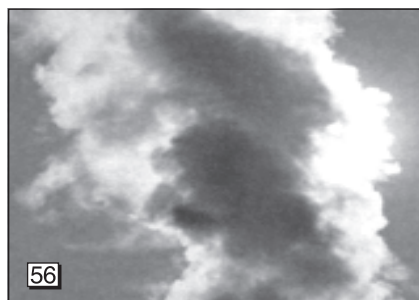
* Fenomene optice din natură — lectură pentru curioși

Împrăștierea (difuzia) luminii este fenomenul optic produs la interacția luminii cu particulele de praf (vezi [54]) sau de carbon și picăturile de apă în suspensie, întâlnite în mediul pe care îl străbat. Poate fi interpretată ca rezultatul difracției luminii pe particulele cu dimensiuni comparabile cu lungimea de undă a luminii. Mediul străbătut de lumina albă se vede colorat, deoarece fenomenul de împrăștiere este mai puternic la lungimi de undă mici, intensitatea radiațiilor depinde de unghiul de împrăștiere, iar coeficientul de absorbție este dependent de lungimea de undă.

Lumina Soarelui ajunge la un observator de pe Pământ din toate direcțiile, descompusă prin straturile de aer cu densități diferite, ca printr-o prismă, dar numai radiațiile albastre și violete nu sunt absorbite de straturile atmosferei, conferindu-i astfel culoarea. O componentă arbitrară a luminii solare nepolarizate poate fi descompusă la nivelul unui observator terestru în două componente pe axele Ox și Oy . Lumina împrăștiată, pe cerul senin este albastră și polarizată liniar pentru acest observator (vezi [55]). La altitudini mari, un cosmonaut constată că cerul este negru, deoarece efectul difuziei devine neglijabil în atmosfera puternic rarefiată.

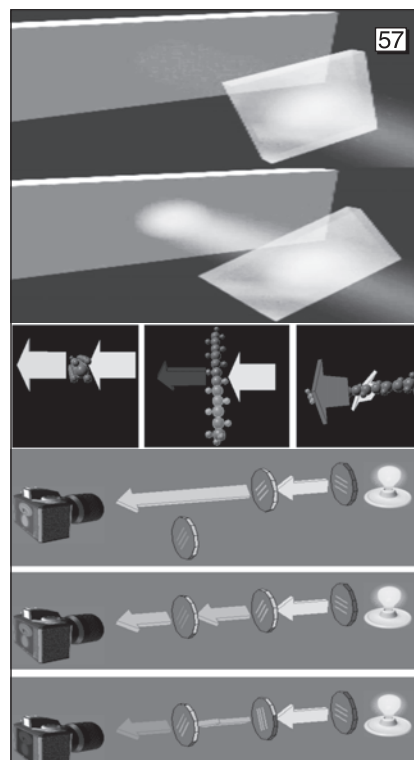


Pune câteva picături de lapte în apa dintr-un vas și amestecă. Privește, dintr-o parte a vasului, lumina împrăștiată a unui proiector îndreptat spre vas. Vei observa tenta albastruie a luminii împrăștiată, sub unghiuri apropiate de 90° , de moleculele de lapte în suspensie. Analog, din lumina solară este împrăștiată mai puternic spre ochii noștri radiația violet-albastră, a cerului senin, pe atomii din atmosferă (oxigen, azot, vapori de apă). Dacă privești prin apă drept spre proiector, vei observa tenta gălbuie sau roșiatică a luminii transmise, ca la apusul Soarelui. Când este ceață, razele violete, albastre și verzi sunt împrăștiate mai puternic decât cele roșii, oranj și galbene. Din acest motiv, folosim lumina galbenă a tuburilor cu vapori de sodiu la iluminatul străzilor, a filtrelor galbene la faruri pentru ceață, a lămpilor roșii pentru stopuri. Dacă torni în apă mai mult lapte, atunci lumina împrăștiată nu mai este albastruie, ci este albicioasă ca și ceața. Analog, dacă în aer sunt picături de apă sau cristale de gheață în suspensie, atunci sunt împrăștiate toate radiațiile luminoase și astfel fumul, ceața și norii apar albi (vezi [56]). Dacă Soarele este aproape de orizont, atunci razele de lumină străbat până la noi un strat de aer mai gros. Vaporii de apă și praful, care predomină în apropierea suprafeței terestre, absorb și difuzează puternic radiațiile albastre-verzi și lasă să treacă radiațiile roșii-galbene. Soarele își schimbă culoarea pe măsură ce se apropie de orizont: galben, oranj, roșu aprins.



Probleme propuse

- Într-un dispozitiv Young, una dintre fante este acoperită cu o lamă transparentă, cu fețe plan paralele ($n = 1,58$). În punctul central de pe ecran se găsește franja luminoasă de ordin $k = 7$, dacă $\lambda = 550$ nm. Calculează grosimea lamei.
- O rețea plană de difracție cu $n = 1\,000$ trăsături/mm este iluminată sub un unghi de incidență $i = 30^\circ$. Maximul de ordin $k = 2$ se obține sub unghiul de difracție α , numeric egal cu i . Câte maxime de difracție se formează pe un ecran?
- Într-un experiment de interferență cu un dispozitiv de tip Young, se utilizează lumina cu lărgimea intervalului spectral $\Delta\lambda = 100$ nm față de lungimea minimă $\lambda_{\min} = 600$ nm. Ordinul maxim de interferență de la care imaginea de interferență nu se mai distinge se obține când este îndeplinită condiția $k(\lambda + \Delta\lambda) = (k + 1)\lambda$. Ce valoare întreagă are k ?
- Dacă se rotește analizorul cu 360° în jurul direcției de propagare a luminii polarizate (vezi [57]), de câte ori se constată că intensitatea luminii trece prin maxime ale intensității luminii transmise?
- Un dispozitiv Young folosește radiație cu $\lambda = 600$ nm. Distanța dintre fante și ecran este $D = 1$ m. Se acoperă o fantă cu o lamă transparentă cu $n = 1,45$ și se observă că poziția centrală, care era ocupată de franja de ordin zero, devine ocupată de franja de ordin 5. Calculează grosimea lamei.
- Pentru reducerea pierderilor prin reflexie la lentilele de sticlă ($n_s = 1,5$) se folosește tehnica depunerii de pelicule subțiri dielectrice ($n = 1,6$) pe suprafața acestora. Calculează grosimea minimă a unei astfel de pelicule care produce un minim de interferență ($k = 0$) pentru $\lambda = 640$ nm și pentru $i \approx 0$.
- Un astronaut dintr-o navă aflată în exteriorul atmosferei terestre vede cerul în timpul zilei:
 - albastru; b) roșu; c) galben; d) negru.
- Atunci când în straturile superioare ale atmosferei se formează nori subțiri cu mici picături de apă și cristale de gheață, zona cu franje concentrice colorate din jurul Lunii sau Soarelui, numită halo (vezi [58]), apare datorită următoarelor fenomene:
 - numai difracție; b) numai refracție; c) numai dispersie a luminii; d) difracție, refracție și dispersie a luminii.



Răspunsuri: 1. $e = 6,6 \mu\text{m}$.
 2. $N = 5$. 3. $k = 6$. 4. de 4 ori.
 5. $6,6 \mu\text{m}$. 6. $d_{\min} = 0,1 \mu\text{m}$.
 7. d (vezi [59]). 8. d.



Test pentru autoevaluare

Relații și definiții utile

La dispozitivul Young (vezi [60]), pozițiile franjelor luminoase pe ecran sunt definite prin relația:

$$y_k = \frac{kD\lambda}{2l_{\text{Young}}}.$$

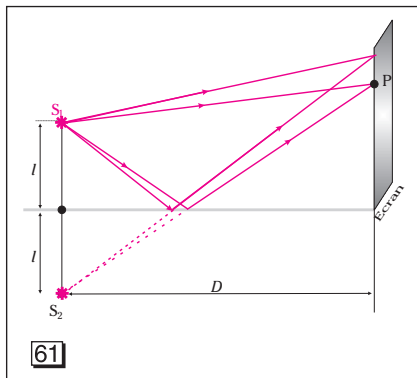
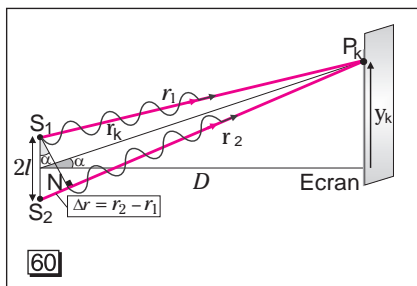
Pentru două unde cu defazajul inițial $\Delta\varphi_0 = 0$, care interferează într-un punct, apare un defazaj $\Delta\varphi$ datorită propagării pe două căi diferite:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} = 2\pi \frac{\Delta r}{VT}.$$

La dispozitivul Lloyd (vezi [61]), pozițiile franjelor pe ecran sunt definite prin relațiile:

$$x_{k,\max} = (2k+1) \frac{D\lambda}{4l};$$

$$x_{k,\min} = 2k \frac{D\lambda}{4l}.$$

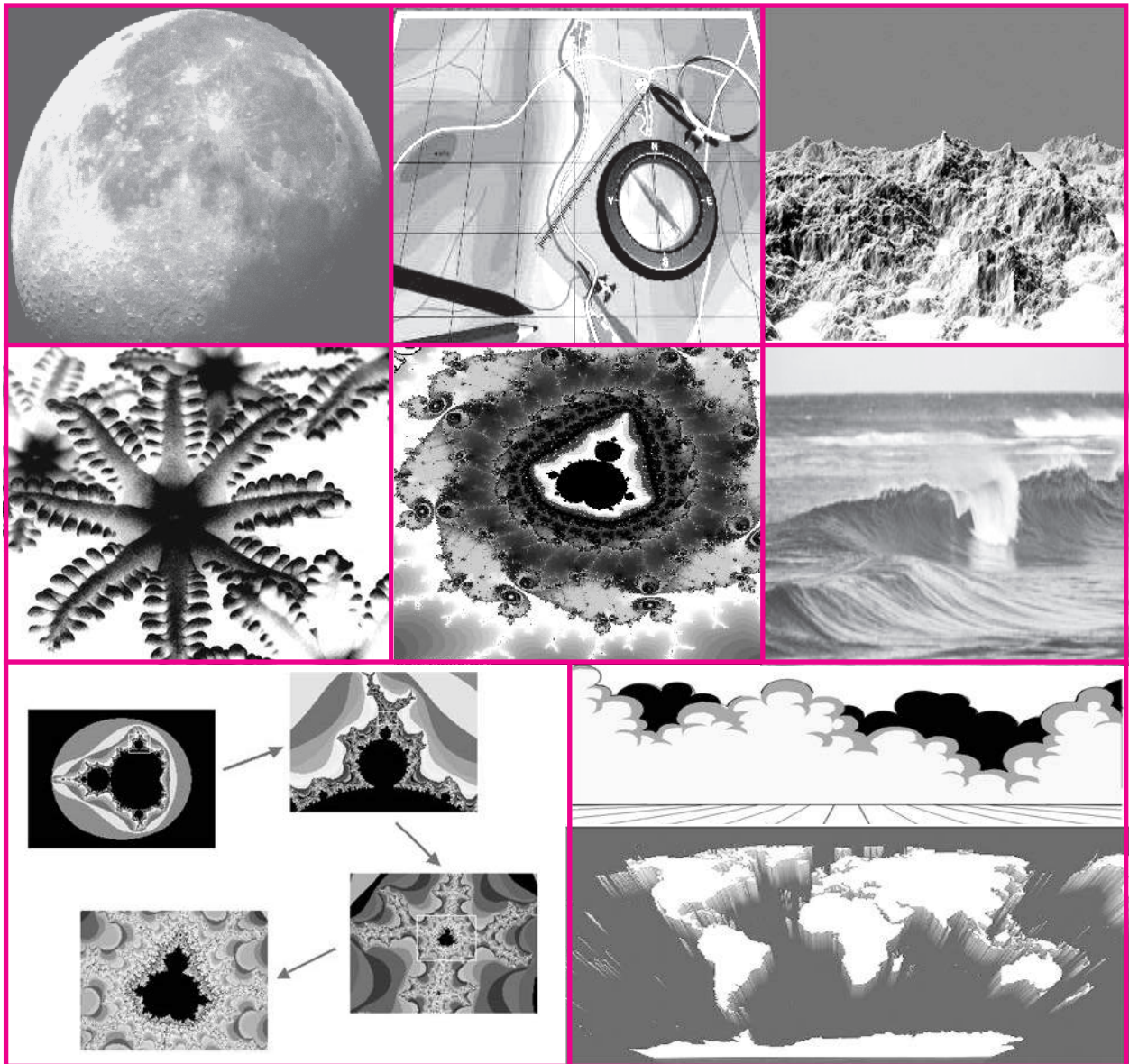


Răspunsuri:

1. a. 2. b. 3. b. 4. c. 5. a. 6. b.
7. d. 8. a. 9. c. 10. $i = i_0 / n_a$.

- Un dispozitiv Young cu $2l = 1$ mm (vezi [60]), iluminat cu radiația monocromatică cu $\lambda = 500$ nm, produce pe un ecran situat la distanța $D = 1$ m interfranja:
a) $i = 0,5$ mm; b) $i = 4$ mm; c) $i = 17$ mm; d) $i = 5$ cm.
- Dispozitivul interferențial Lloyd (vezi [61]) produce 10 franje de interferență pe o distanță $\Delta y = 6$ mm. Interfranja are valoarea:
a) $i = 0,2$ mm; b) $i = 0,6$ mm; c) $i = 1,5$ mm; d) $i = 10$ mm.
- O sursă de lumină monocromatică cu $\lambda = 600$ nm iluminează un dispozitiv Young cu distanța dintre fante $2l = 1$ mm. Pe un ecran situat la distanța $D = 3$ m, poziția celei de a treia franje este: a) $y_3 = 1$ mm; b) $y_3 = 5,4$ mm; c) $y_3 = 1$ cm; d) $y_3 = 15$ cm.
- Pentru a fi observate, franjele de interferență pot fi prinse în obiectivul unei lunete situate la distanța $D = 2,5$ m. Dacă distanța este $2l = 1$ mm și interfranja $i = 1,5$ mm, atunci lungimea de undă a radiației folosite are valoarea:
a) $\lambda = 400$ nm; b) $\lambda = 500$ nm; c) $\lambda = 600$ nm; d) $\lambda = 4700$ nm.
- Radiația cu $\lambda = 500$ nm ajunge la incidență normală pe o rețea de difracție. Maximul de difracție de ordinul $k = 2$ se obține la unghiul de difracție $\alpha = 30^\circ$. Constanta rețelei are valoarea:
a) $l' = 2$ μm; b) $l' = 0,2$ mm; c) $l' = 2$ mm; d) $l' = 20$ mm.
- O rețea de difracție cu $n = 500$ linii/mm este iluminată normal de radiația monocromatică cu $\lambda = 500$ nm. Ordinul maxim al franjei luminoase formate pe un ecran are valoarea:
a) $k_{\max} = 2$; b) $k_{\max} = 4$; c) $k_{\max} = 6$; d) $k_{\max} = 9,5$.
- O rețea de difracție cu $n = 500$ linii/mm este iluminată normal de radiația monocromatică cu $\lambda = 450$ nm. Numărul total al maximelor de difracție obținute pe un ecran este:
a) 4,5; b) 7,7; c) 8,8; d) 9.
- Maximul de difracție de ordinul $k_1 = 2$, obținut la incidență normală pe o rețea de difracție cu radiația de lungime de undă $\lambda_1 = 600$ nm coincide pe ecran cu maximul de ordinul $k_2 = 3$ obținut cu radiația de lungime de undă:
a) $\lambda_2 = 400$ nm; b) $\lambda_2 = 500$ nm; c) $\lambda_2 = 600$ nm; d) $\lambda_2 = 700$ nm.
- Dacă unghiul dintre raza reflectată și raza refractată de un dielectric lucios cu indicele de refracție n este 90° și dacă vibrațiile vectorului câmp electric \vec{E} sunt perpendiculare pe planul de incidență, atunci unghiul de incidență este egal cu:
a) 45° ; b) 57° ; c) $\arctg n$; d) $\arctg(n-1)$.
- Un dispozitiv pentru studiul interferenței în aer cade în apă. Notăm cu i_0 interfranja în aer și cu n_a indicele de refracție al apei. Cât este interfranja i în apă față de cea în aer?

* *ELEMENTE DE TEORIA HAOSULUI*



„Cred că noul secol va fi secolul Complexității”
Stephen Hawking — fizician Cambridge

Notă: Întregul capitol **Elemente de teoria haosului** se studiază numai la profilul F1.



4.1. **DETERMINISM ȘI PREDICTIBILITATE. CONDIȚII. MODELE*

Exemplu:

Să analizăm rezolvarea unei probleme de mecanică:

De la baza unui plan înclinat ideal cu unghiul α se aruncă un corp, de-a lungul planului, cu viteza inițială v_0 . Se cere accelerația de urcare a corpului pe planul înclinat (vezi [1]).

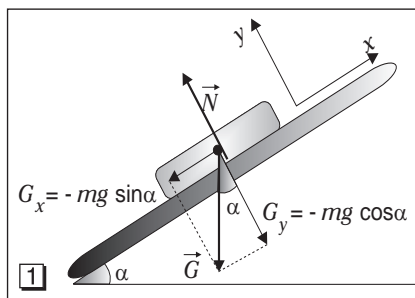
Rezolvare:

Deoarece evoluția sistemului este determinată, din proiecția ecuației

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ pe axa Ox, paralelă cu direcția de mișcare, se obține accelerația de urcare a corpului pe planul înclinat, la un moment considerat inițial:

$$-mg \sin \alpha = ma \Rightarrow a = -g \sin \alpha.$$

Mișcarea este uniform încetinită.



**Identificarea, formularea și rezolvarea unor probleme generale sau specifice în fizică*

Studiul fizicii dezvoltă capacitatea de a înțelege și interpreta lumea înconjurătoare cu legile și principiile ei. Fenomenul fizic, observat în natură sau provocat în laborator, reprezintă succesiunea de stări ale unui sistem fizic în momente succesive dintr-un interval de timp. Evoluția fenomenelor fizice este dependentă de modificările stărilor de mișcare sau de poziție ale corpurilor din sistemul considerat. După observarea fenomenelor dintr-un sistem, se caută descrierea acestora cu ipoteze simplificatoare pe baza unui model (matematic), capabil să ofere observatorului o predicție în limite rezonabile ale erorii, pentru a fi util în aplicații practice. În studiul fenomenelor, folosim concepte, noțiuni și teorii deduse din experimente și observații.

Permanentă observare și măsurare cantitativă a fenomenelor fizice determină o rafinare a modelelor și teoriilor utilizate, generând astfel noi informații. Din când în când, de-a lungul evoluției omenirii, au loc descoperiri esențiale care determină o restructurare și o generalizare a cunoștințelor. Consecințele acestor „străpungeri” teoretice sau experimentale sunt resimțite de întreaga societate prin modificări multiple socio-economice și educaționale (un salt în civilizație).

O lege fizică este o afirmație cu caracter general, care descrie o relație de tip cauză-efect, observată, măsurată și verificată prin experimente în laborator.

Un **principiu** este un adevăr fundamental care se impune deoarece nu este infirmat de nici un experiment.

Orice sistem liniar este modelat de o funcție de gradul întâi, descrisă de o linie dreaptă, cu alte cuvinte, efectele sunt proporționale cu cauzele. *De exemplu:* accelerațiile sunt proporționale cu forțele, intensitățile curenților din circuite sunt proporționale cu tensiunile etc.

Determinismul este conceptul, introdus de I. Newton și susținut de Laplace, care susține că putem determina starea unui sistem la un moment dat dacă se cunoaște starea acestuia la un moment anterior, considerat inițial, și legea de evoluție. *Dacă sunt cunoscute condițiile inițiale* (valorile tuturor variabilelor asociate sistemului studiat la un moment considerat inițial) *și legea de evoluție*, atunci evoluția sistemului este determinată prin rezolvarea problemelor de mecanică (vezi exemplul de pe coloana îngustă).

*Modele utilizate în rezolvarea exactă a unor probleme generale sau specifice din fizică

Problemele de fizică implică rezolvarea unui sistem de ecuații. Pentru a descrie matematic un sistem, trebuie să facem unele aproximări legate de sistemul considerat. Modelele utilizate în rezolvarea exactă a unor probleme generale sau specifice din fizică sunt construite pe observația că în multe fenomene anumite mărimi fizice rămân constante, deci fenomenele pot fi descrise cu un număr mic de variabile independente. Această constatare reduce numărul de variabile ale sistemului studiat. Putem spune că, pentru a construi un model este necesar să observăm evoluția fenomenului, să identificăm numărul minim de variabile și să alegem setul de ecuații care permite descrierea cât mai apropiată de realitate a evoluției stărilor sistemului (predicția). Alegerea unor modele liniare pornește de la ideea de simplificare. Un model liniar este o aproximare a realității.

Un sistem fizic este definit cu ajutorul unor mărimi fizice ale căror valori se modifică în timp, după anumite legi. Starea momentană a fiecărui punct material din sistem este descrisă prin viteza, accelerația sau vectorul de poziție al acestuia. *Starea de mișcare* a corpurilor poate fi modificată ca urmare a unor interacțiuni: dacă asupra unui corp acționează simultan mai multe forțe, atunci efectul este o mișcare a corpului cu accelerația rezultantă egală cu cea produsă de forța rezultantă (principiul superpoziției sau principiul independenței acțiunii forțelor). În mecanică, Galilei a avut ideea de a neglija forțele de frecare. Alți fizicieni s-au limitat la studiul mișcărilor sub acțiunea forțelor conservative, în sistemele numite nedisipative.

Evoluția unui sistem depinde de condițiile inițiale în care se află acesta.

Să analizăm rezolvarea unei alte probleme de mecanică clasică:

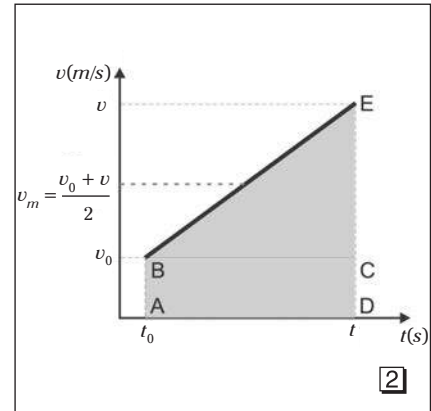
Mișcarea rectilinie uniform variată a punctului material este caracterizată de vectorul accelerație \vec{a} , care este constant. Dacă punctului material pleacă la momentul $t_0 = 0$ (momentul în care începem cronometrarea mișcării) dintr-o poziție M_0 , care este expresia legii de mișcare?

Rezolvare:

Din definiția accelerației: $a = \frac{v - v_0}{t - t_0}$, obținem expresia

matematică pentru *legea vitezei*: $v = v_0 + at$,

unde $t_0 = 0$, v_0 — viteza inițială, a — accelerația mișcării, t — timpul de mișcare, v — viteza după timpul t de mișcare. Această funcție are graficul liniar, în coordonate $v - t$ (vezi [2]).

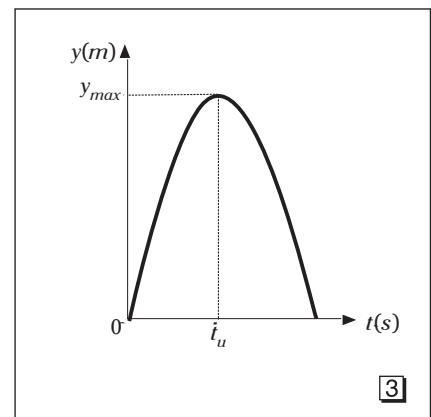


Considerăm expresia deplasării

$$\Delta x = d = v_{\text{medie}} \cdot \Delta t = \frac{v_0 + v}{2} t$$

în intervalul de timp de mișcare $\Delta t = t - t_0 = t$, dacă $t_0 = 0$. Înlocuim expresia vitezei $v = v_0 + a \cdot t$ și obținem expresia *legii de mișcare*:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2 \quad (\text{vezi [3]}).$$



Curba descrisă de legea de mișcare (variația poziției în funcție de timp):

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2,$$

pentru mișcarea uniform variată este o parabolă. Verificarea legii de mișcare se obține folosind relația de definiție a vitezei:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + at.$$

❗ Concluzii

— În problemele mecanicii clasice, starea momentană a fiecărui punct material dintr-un sistem este descrisă prin viteza și accelerația sa (derivatele de ordinul întâi și doi în raport cu timpul ale vectorului care definește poziția lui).

— *Condițiile inițiale* sunt valorile măsurate la stabilirea unui un moment de timp considerat inițial.

— Descrierea comportamentului unui sistem constituit dintr-un număr foarte mare de puncte materiale este dificilă.

— Un fenomen este *determinist* dacă putem face predicții, prin intermediul unor *ecuații liniare*.

Să reanalizăm rezolvarea unei probleme de mișcare oscilatorie cu ajutorul derivatelor:

Un pendul elastic are un corp de masă m atârnat de un resort elastic de constantă k . La momentul $t_0 = 0$, în care începem cronometrarea mișcării, corpul are poziția y_0 , caracterizată de unghiul fazei φ_0 (vezi [4]a). Oscilațiile pendulului elastic sunt descrise de o *ecuație diferențială liniară*. Soluția acestei ecuații ne permite să găsim relația dintre accelerația și elongația oscilațiilor armonice?

Rezolvare:

Asupra corpului de masă m atârnat de resortul elastic de constantă k acționează o forță elastică: $F_e = -ky$ (vezi [4]b). Proiectând ecuația vectorială $\vec{F} = m\vec{a}$ pe direcția de oscilație, obținem o ecuație liniară: $-ky = ma$, deci $ky + ma = 0$.

Această ecuație, numită **diferențială liniară**, are soluția:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \text{ unde } \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \text{ care reprezintă}$$

pulsția, iar $\varphi = \omega t + \varphi_0$ reprezintă faza mișcării oscilatorii.

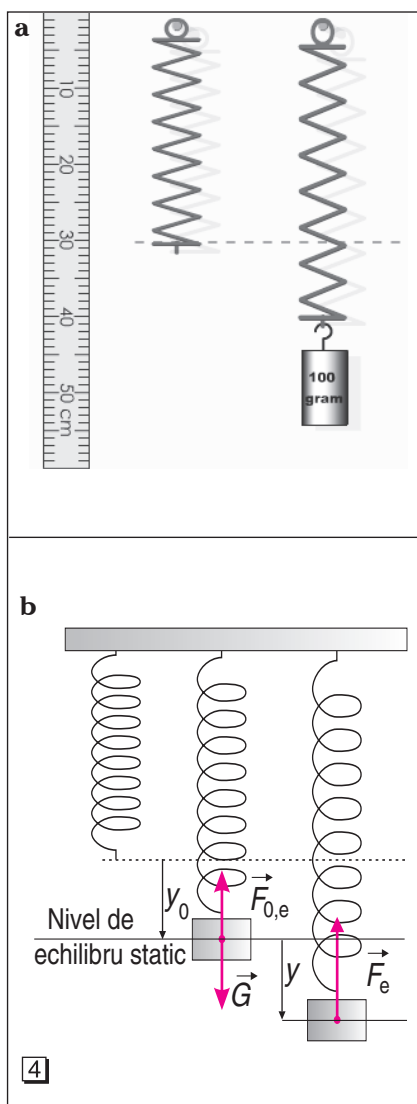
Viteza de oscilație se obține prin derivarea elongației în raport cu timpul:

$$v = \frac{dy}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Viteza atinge valorile maxime $v_{\max} = \omega A$, în avans față de elongație cu un defazaj temporal $\Delta t = T/4$, unde T este perioada oscilației, căruia îi corespunde un defazaj unghiular $\Delta\varphi = \pi/2$. Accelerația de oscilație se obține prin derivarea vitezei în raport cu timpul:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y, \text{ unde } a_{\max} = \omega^2 A.$$

Am regăsit prin această metodă faptul că oscilațiile produse de acțiunea forțelor de tip elastic sunt armonice, adică accelerația momentană este proporțională și de semn opus cu elongația.



Știi că elongația y măsoară distanța momentană față de poziția de echilibru static a centrului de masă al oscilatorului. Valoarea maximă y_{\max} a elongației într-o oscilație reprezintă amplitudinea A a oscilațiilor. Amplitudinea rămâne constantă în cursul oscilațiilor libere neamortizate.



4.2. ***DETERMINISM ȘI IMPREDICTIBILITATE. COMPORTAMENTUL HAOTIC. CONDIȚII**

***Sisteme a căror evoluție în timp este deterministă, dar impredictibilă**

În natură și în tehnică există sisteme a căror evoluție în timp este deterministă, dar impredictibilă (evoluția se produce în mod neprevăzut, întâmplător): geometria norilor, forma și frecvența de apariție a fulgerelor, declanșarea cutremurelor, traiectoria căderii unei frunze, forma valurilor care se sparg pe țărm (vezi [5]). Asemenea fenomene depind de cauze, dar au evoluția sensibilă la condițiile inițiale: o mică modificare nerepetitivă a cauzei (denivelare, frecare, interacțiune locală etc.) produce o mare modificare a efectului, deci repetarea identică a acestora este imposibilă. Mici fluctuații ale interacțiunilor locale schimbă comportarea sistemului considerat și fac dificilă sau chiar imposibilă predicția.

Un sistem sau proces cu **evoluție neliniară**, adică în care efectul nu este proportional cu cauza, este descris printr-un set de ecuații neliniare (puterile variabilelor sunt diferite de unu).

Teoria haosului se ocupă cu studiul sistemelor dinamice neliniare. Conceptul **haos** se asociază impredictibilității și nu dezordinii (aleatorului).

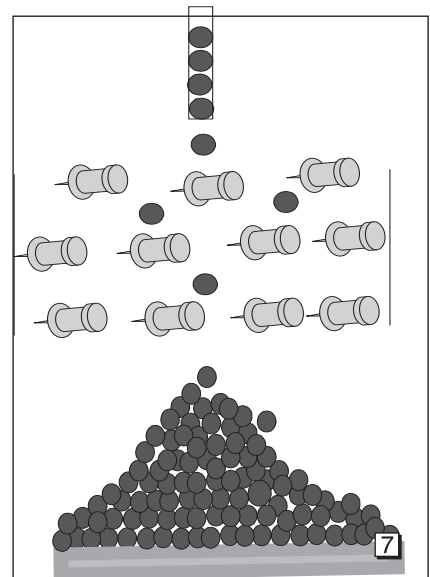
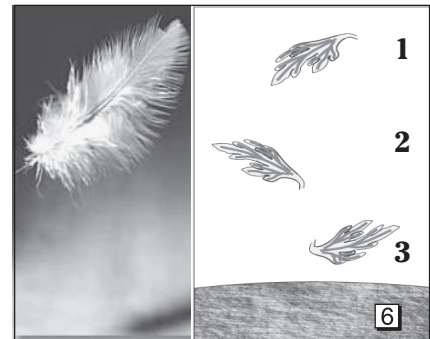
***Investigarea experimentală a comportamentului haotic în sisteme fizice**

Studiul unor sisteme simple cu comportament haotic:

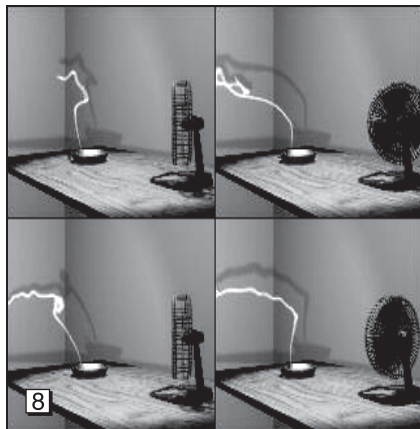
1. Căderea frunzelor și a fulgilor sunt fenomene deterministe, dar impredictibile datorită fluctuației interacțiunilor locale care schimbă necontrolat traiectoriile acestora (vezi [6]). Forțele de frecare aleatorii fac imposibilă repetarea identică a unei evoluții.

2. Să analizăm mișcarea prin aer a unui fulg plasat deasupra suprafeței calde a unei plite. Mișcarea ascendentă de convecție a aerului încălzit deasupra suprafeței calde poate să imprime fulgului o mișcare ascendentă până la o înălțime la care forța ascensională echilibrează forța de greutate, apoi traiectoria fulgului devine un „dans”, cu urcări și coborări, cu schimbări ale direcției de deplasare, impredictibile, diferite de fiecare dată la repetarea experimentului.

3. *Experimentul din figura [7] permite vizualizarea unei proprietăți importante asociate fenomenelor aleatorii numită *distribuție normală (gaussiană)*.



Pentru un număr mare bile care cad printre obstacolele dispuse în nodurile unei rețele ordonate, pe care le ciocnesc oblic atunci când le nimeresc, forma aglomerării este asemănătoare unui clopot.



Studiul sistemelor fizice aflate departe de echilibru va fi continuat în temele următoare.

****Evoluția unor sisteme fizice concrete, întâlnite în practică, aflate departe de echilibru***

Determinismul din mecanica clasică este rezultatul simplificărilor operate. În realitate, majoritatea sistemelor sunt neliniare și nedeterminate, cu câteva cazuri particulare care pot fi considerate liniare. Metoda utilizată pentru descrierea fenomenelor fizice prin sisteme de ecuații liniare, pe care putem să le rezolvăm, ne permite să descriem doar aproximativ realitatea. În modelele fizice introduse de Newton, Leibnitz și Laplace, caracterul determinist al evoluției unui sistem fizic constă în faptul că starea viitoare a sistemului este univoc determinată de valorile variabilelor la un moment de timp (considerat inițial) și de legea lor liniară de evoluție.

◆ Evoluția unor sisteme fizice întâlnite în natură, cum ar fi forma norilor, curgerea unui torent sau risipirea în aer a fumului (vezi [8]), este dificilă de modelat datorită interacțiunilor numeroase între componentele sistemelor. Pentru descrierea evoluției unor asemenea sisteme fizice, *aflate departe de echilibru*, se folosesc sisteme de ecuații neliniare în raport cu viteza și accelerația punctelor materiale considerate (derivatele de ordinul întâi și doi în raport cu timpul ale vectorului care definește poziția acestora), a căror rezolvare exactă este dificilă. În rezolvarea ecuațiilor și a sistemelor de ecuații neliniare, utilizarea calculatorului a fost decisivă.

◆ Pentru un pendul elastic care oscilează sub acțiunea unei forțe de tip elastic F_e , întâmpinând din partea mediului o forță de frecare F_f , proporțională cu viteza de oscilație ($F_f = rv$, unde r este o constantă numită *coeficient de amortizare*), legea de mișcare a oscilațiilor predictibile este descrisă de ecuația: $-ky - rv = ma$.

Oscilațiile devin forțate sub acțiunea unei forțe exterioare $F_{\max} \sin \omega t$, iar ecuația de mișcare devine: $ky + rv + ma = F_{\max} \sin \omega t$.

◆ Putem calcula distanța dintre două puncte de pe o fotografie a suprafeței Lunii dacă se cunoaște mărirea fotografică (vezi [9]). Valoarea distanței este utilizată pentru a calcula timpul și combustibilul necesar parcurgerii acestei distanțe cu un vehicul. Ca și pe Pământ, dacă pantele denivelărilor de teren sunt mari, atunci călătoria durează mai mult decât s-a calculat sau nu se poate realiza deoarece traseul este impredictibil.

◆ Cursul unui râu de munte este predictibil deoarece apa curge alegând drumul de minimă rezistență, dar traiectoriile moleculelor de apă sunt impredictibile. Turbulența fluidelor este o stare care corespunde mișcării unui număr foarte mare de molecule (vezi [10]).

În curgerea unui fluid apar vârtejuri datorită modificării gradului de frecare al fluidului cu pereții și cu obstacolele întâlnite. Evoluția unui asemenea sistem neliniar nu poate fi prezisă.

*Iterația și haosul — extindere pentru curioși

În mod obișnuit, utilizăm o funcție pentru a determina valoarea ei într-un punct. De exemplu, funcția:

$y = f(x) = 2x + 1$ are în punctul $x_0 = 0$ valoarea $y = 1$. Să vedem ce se întâmplă dacă rezultatul, adică $y = 1$, se utilizează ca valoare inițială cu care calculăm din nou valoarea y prin aceeași funcție. Obținem $y = f(1) = 3$. Putem repeta operația obținând un șir de numere: 1, 3, 7, 15, 31...

În acest caz, se spune că am iterat funcția $f(x)$ pornind de la o condiție inițială $x_0 = 0$ obținând un șir de iterate: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Șirul iteratelor poate fi divergent (are limită infinită) sau convergent (are limită finită). Putem descrie matematic acest proces iterativ, astfel:

$$x_{n+1} = 2x_n + 1, \text{ cu } x_0 = 0.$$

Studiul convergenței unor asemenea forme de scriere este utilizat în rezolvarea numerică (aproximativă) a ecuațiilor diferențiale, atunci când nu pot fi identificate soluții analitice. Matematicianul Feigenbaum a încercat să rezolve cu ajutorul unui calculator o ecuație neliniară de forma:

$$x_{n+1} = c x_n (1 - x_n) \quad (1)$$

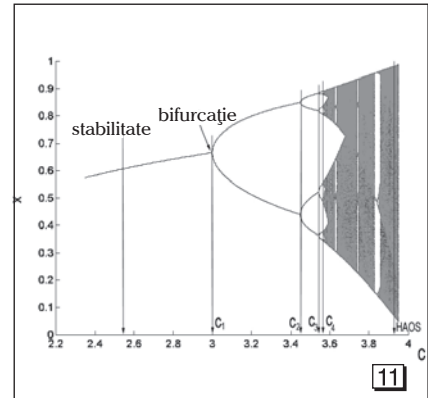
unde c este o constantă. Dând diferite valori pentru $x_0 \in [0, 1]$, se obțin șiruri $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ care converg către o limită finită x^* situată în același interval, $x^* \in [0, 1]$, numai dacă c are o valoare mai mică decât o valoare critică, adică $0 < c < c_{\text{crit}}$.

Valoarea limitei este aceeași x^* indiferent de valoarea inițială $x_0 \in [0, 1]$, bineînțeles pentru aceeași valoare a lui c . Limita se numește **atractor**, iar locul geometric al valorilor inițiale x_0 de la care pornind iterația se ajunge la acel atractor se numește **bazin de atracție**.

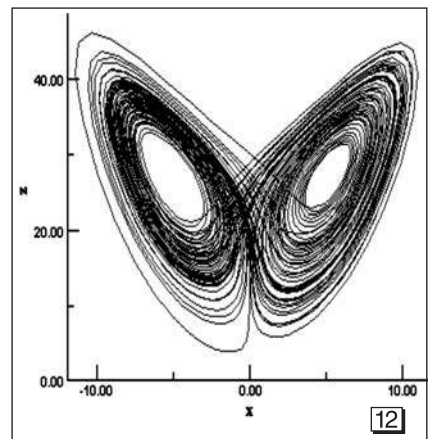
Feigenbaum a studiat comportarea șirului de iterate în funcție de parametrul c , considerat a fi un parametru de control. Rezultatul obținut a fost spectaculos și a permis deschiderea unui domeniu important în fizică: **teoria haosului**, care studiază dinamica sistemelor descrise de sisteme de ecuații diferențiale neliniare.

Pentru valori $c > 2,9$, șirul iteratelor se divide în două subșiruri convergente către doi atractori diferiți (x_1^* și x_2^*). La o altă valoare, fiecare subșir se divide în alte două subșiruri convergente către alți doi atractori diferiți (vezi [11]). Numărul atractorilor crește și devine foarte mare, deci creșterea valorii c ne conduce spre dezordine.

O mică diferență ne conduce la stări finale diferite, deci predicția este dificilă. Se constată că pentru $3,9 < c < 4$, șirul iteratelor pare a fi o succesiune întâmplătoare de valori, deși este generat printr-un procedeu determinist (ecuația 1). Acest comportament a fost denumit „haos determinist”.



Parametrul de control c permite tranziția de la „stabilitate” (o singură limită) la „haos” (o succesiune de iterate aparent întâmplătoare). Regimul intermediar, de „tranziție către haos”, se face printr-un proces de bifurcație.

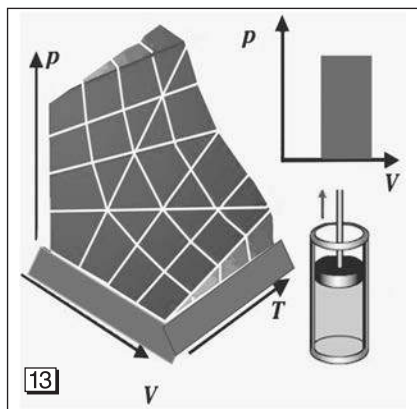


Funcțiile cu trei variabile pot avea atractori 3D (tridimensionali). Într-o simulare 3D a vremii, Edward Lorenz a descoperit un atractor straniu, care îi poartă numele (vezi [12]).

Atmosfera este un exemplu de sistem haotic. Dificultatea de predicție se află în sensibilitatea sistemului la condițiile inițiale (mici fluctuații întâmplătoare se amplifică și fac imposibilă predicția comportării sistemului după un interval de timp).



4.3. *DESCRIEREA COMPORTAMENTULUI HAOTIC. SPAȚIUL FAZELOR. ATRACTORI CLASICI ȘI STRANII



*Sisteme fizice în spațiul fazelor

Activitatea fizicienilor este legată de căutarea unui spațiu de reprezentare convenabil a datelor experimentale. De exemplu, un sistem termodinamic poate fi observat în diferite stări reprezentate grafic într-un spațiu bidimensional sau tridimensional cu parametri de stare: p — presiunea, V — volumul, T — temperatura (vezi [13]).

Evoluția în timp a unui sistem poate fi reprezentată și printr-o traiectorie trasată într-un spațiu multidimensional, numit **spațiul fazelor**, în care dimensiunile reprezintă coordonatele și derivatele acestora în funcție de timp.

Oricărui punct al traiectoriei unui corp, în mișcarea sa în spațiul fazelor, i se poate atașa *vectorul viteză instantanee* (vezi [14]). Totalitatea vectorilor viteză din spațiul fazelor reprezintă **câmpul vectorial al vitezelor** atașat sistemului dinamic. Noțiunea de sistem dinamic se referă la acest câmp vectorial deoarece evoluția sistemului este complet determinată de acest câmp.

Orice sistem fizic poate fi descris matematic prin ecuații sau sisteme de ecuații cu derivate, numite diferențiale. Dacă ecuațiile sunt liniare, sistemul se numește **liniar**, iar dacă ecuațiile sunt neliniare, sistemul se numește **neliniar**. Sistemele liniare admit o rezolvare exactă, iar cele neliniare au soluții aproximative deoarece nu au reguli de rezolvare exactă. Noțiunile de bază ale teoriei sistemelor dinamice inițiate de Poincaré sunt: *spațiul fazelor*, *portret de fază*, *atractori*, *bazine de atracție*, *repulsori*.

Atenție!

Cuvântul fază are și alte sensuri:

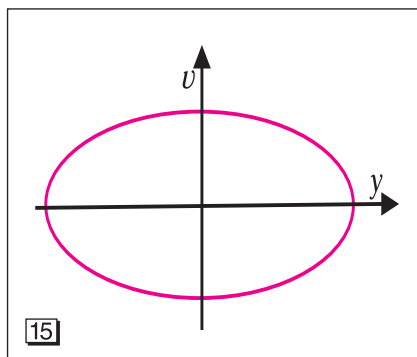
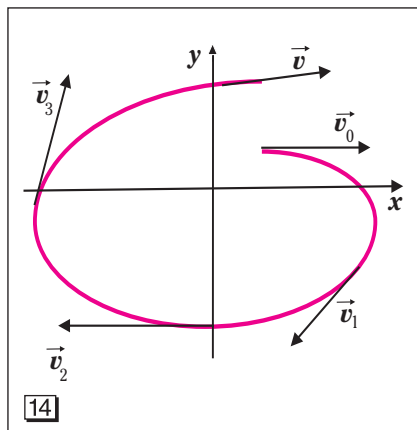
- etapă distinctă în evoluția unui fenomen sau proces;
- argumentul funcției trigonometrice în teoria undelor;
- fiecare dintre circuitele componente ale unui sistem trifazat de c.a.;
- fiecare dintre stările alotropice sau de agregare.

Descrierea evoluției oscilatorului armonic care oscilează cu amplitudinea A și pulsația ω se poate face utilizând elongația $y(t)$ și viteza de oscilație $v(t)$ (vezi [15]a).

Dacă eliminăm timpul din ecuațiile elongației y și vitezei de oscilație v , găsim traiectoria punctului figurativ în spațiul fazelor, cu dimensiunile y și v , care este o elipsă (vezi [15]b):

$$\begin{cases} y = A \sin(\omega t + \varphi_0) \\ v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0) \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1.$$

Această elipsă din spațiul fazelor este numită *atractor* deoarece este traiectoria spre care tinde mișcarea oscilatorie armonică după o perturbație produsă oscilatorului.



Setul de puncte (stări) din spațiul fazelor spre care tinde să evolueze în timp un sistem (spre care se îndreaptă toate traiectoriile) se numește **atractor**.

Dacă sistemul evoluează către o anumită stare corespunzătoare unui punct limită, acesta se numește **atractor static** (vezi [16]).

Dacă sistemul parcurge periodic un număr de stări, atunci sistemul evoluează către un ciclu limită, care se numește **atractor periodic**.

Pentru mișcarea armonică, originea este *punct de echilibru* în spațiul fazelor, iar elipsa este *ciclu limită (atractor)*.

Fiecărei stări inițiale, din spațiul fazelor, îi corespunde o singură traiectorie, iar totalitatea traiectoriilor figurate în spațiul fazelor formează **portretul de fază** al sistemului dinamic.

Un sistem dinamic complex are proprietăți care nu pot fi explicate prin studiul elementelor componente. Complexitatea apare datorită numărului mare de elemente care interacționează simultan. Sistemul întreg are legi proprii care se manifestă atâta timp cât sistemul nu este fragmentat.

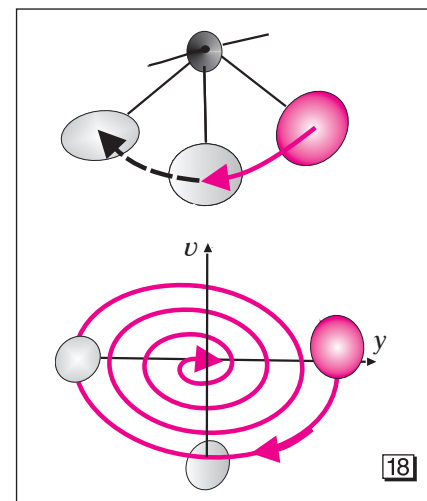
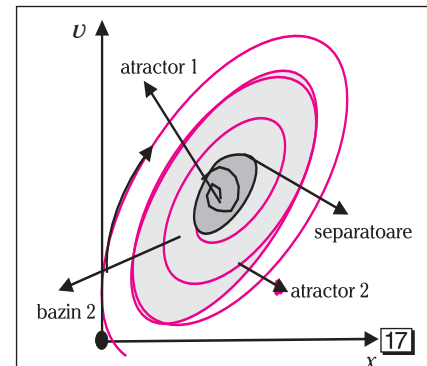
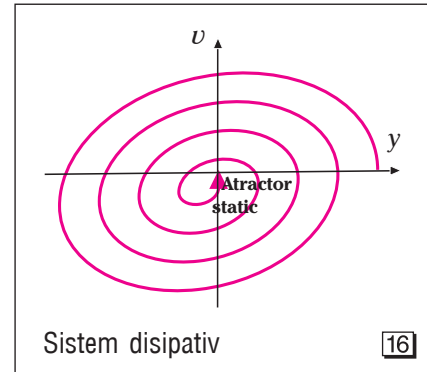
Mulțimea stărilor inițiale din care sistemul evoluează către zona atrătoare se numește **bazinul atractorului** respectiv. Zonele de separare dintre bazinele mai multor atractori formează regiuni **separatoare** (vezi [17]).

Un sistem poate avea mai mulți atractori, când condiții inițiale diferite pot determina evoluția acestuia către atractori diferiți. Identificarea configurației bazinelor și atractorilor determină evoluția sistemului, asigurând o predicție completă.

Există situații în care sistemul evadează din spațiul fazelor, evoluând din anumite puncte, numite **repulsoare**.

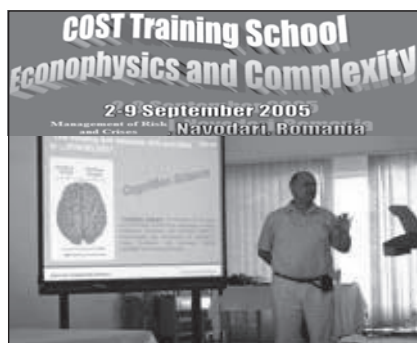
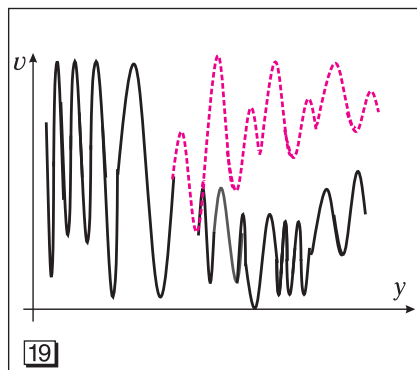
*Caracterizarea unui sistem fizic cu atractorii descriși în spațiul fazelor

Sistemele periodice sunt predictibile deoarece revin cu regularitate la aceleași condiții. De exemplu, pentru o pendulă care oscilează periodic amortizat, se obține reprezentarea stării finale atrătoare (un punct) în spațiul fazelor pornind de la reprezentările stărilor anterioare pe o elipsă care se deformează datorită disipării energiei prin frecare (vezi [18]). Punctele din spațiul de fază arată legătura între viteza v și poziția y a pendulei. Când discul pendulei este la elongația maximă pozitivă de punctul de echilibru, atunci viteza discului este zero, iar când pendula trece prin punctul de echilibru, viteza discului are valoarea maximă.

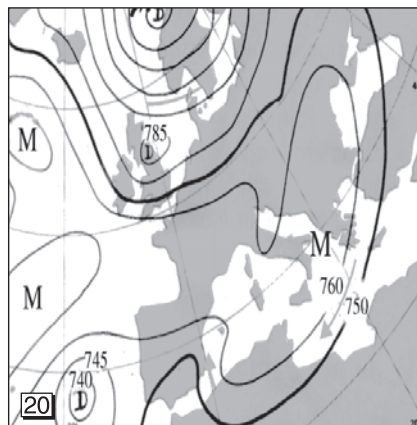


❶ Concluzii

Traectoria modelează evoluția sistemului, iar limita acesteia va modela starea ulterioară de echilibru a sistemului. *Sistemele disipative*, caracterizate de o interacțiune cu mediul înconjurător, au proprietatea că diferitele traiectorii din spațiul fazelor converg către un *atractor: punct fix, curbă sau suprafață închisă*, atunci când sistemele evoluează ciclic către stări de echilibru.



Prof. dr. Florin Munteanu, președintele Centrului pentru Studii Complexe, remarcă la cursul *Econofizică și Complexitate* al Școlii de vară 2005: „Sistemele complexe nu ajung niciodată la echilibru, ci evoluează de la o stare critică la alte.



Sistemele liniare sunt atrase în evoluția lor de **atractori clasici**: un punct, un cerc sau o elipsă.

Sistemele dinamice liniare sunt deterministe, adică se poate calcula cu precizie starea sistemului în orice moment de timp, cunoscându-se starea inițială și ecuațiile care îl descriu. Acestea prezintă o evoluție predictibilă.

Sistemele dinamice neliniare au o comportare haotică în spațiul fazelor, legile sunt deterministe, dar nu prezintă o evoluție predictibilă.

Haosul este determinist datorită determinismului legilor care guvernează sistemul, dar evoluția *este impredictibilă* datorită comportamentului haotic al sistemului în spațiul fazelor.

Evoluția unui sistem dinamic neliniar poate să prezinte proprietatea de *sensibilitate la condițiile inițiale*. În acest caz, traiectoriile rămân într-un domeniu finit (vezi [19]), dar nu se închid niciodată (nu există periodicitate). Două traiectorii care pleacă din două puncte extrem de apropiate se pot depărta în timp. Chiar dacă acestea sunt bine determinate, evoluția lor diferită face imposibilă prezicerea comportamentului sistemului în ansamblu. O astfel de comportare se numește **haotică**.

Sistemele neliniare sunt atrase în evoluția lor de **atractori stranii** (reprezenți de o traiectorie nepredictibilă, deoarece o diferență mică în pozițiile de plecare a două puncte adiacente conduce la poziții necorelate în timp). Evoluția în timp a unui sistem dinamic este influențată de condițiile exterioare sistemului, prin *parametrii de control* (constantele din ecuațiile sistemului).

Atractorii stranii sunt forme care apar în spațiul matematic sau în cel natural, dar sunt mai rar observați față de atractorii predictibili.

Paradoxul aparent că *haosul este determinist, dar nu predictibil* a fost observat pentru prima dată de către meteorologul *Edward Lorenz* în 1963 în încercarea de prezicere a evoluției climei. Acumulările informaționale legate de parametrii atmosferici (presiunea aerului, temperatura, viteza vântului, umiditatea) nu măresc precizia unei prognoze meteo pe termen lung.

Pentru modelul atractorului straniu Lorenz, nu se pot determina cu precizie condițiile inițiale.

Ceea ce determină meteorologii este doar o traiectorie aproximativă a traiectoriei reale, deoarece se pornește de la măsurători aproximative, iar erorile cresc exponențial în timp.

Dacă se cunosc valorile parametrilor meteorologici (temperatura, presiunea atmosferică, umiditatea, viteza vântului, nebulozitatea etc.) la momentul t_0 , calculatoarele rezolvă numeric un sistem de ecuații diferențiale neliniare și se obțin valorile la momentul următor $t_0 + \Delta t$ (unde $\Delta t > 15$ min) în orice punct al rețelei meteorologice de pe suprafața Pământului.

Datele prognozate sunt reprezentate grafic sub formă de diagrame alcătuite din izobare (vezi [20]).

Un sistem meteorologic este instabil și imprevizibil deoarece este alcătuit dintr-un număr enorm de elemente interacționale, hipersensibile la acțiunea celui mai mic factor. O perturbație minoră din interiorul sistemului dinamic produce o perturbare haotică majoră, alterând previziunea.

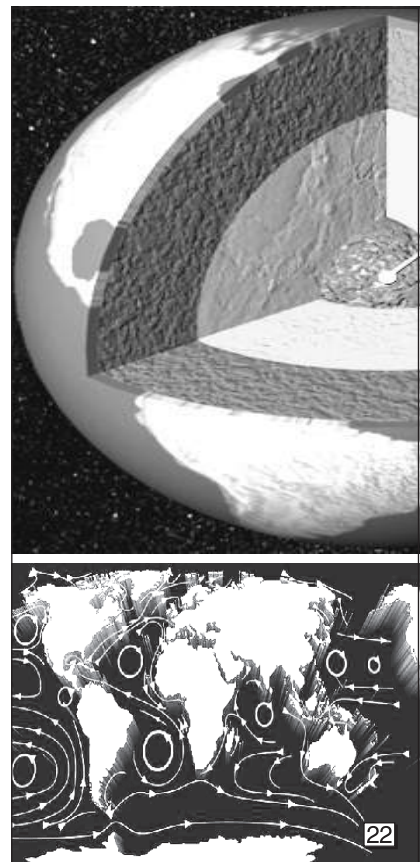
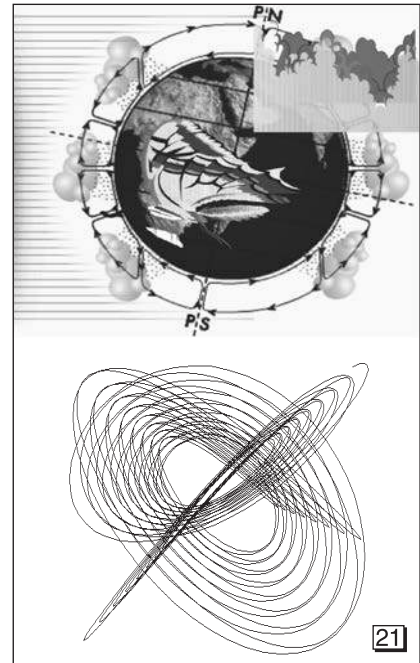
Conform teoriei haosului, o mică perturbație atmosferică a poziției și vitezei unei mase de aer la un moment dat determină un comportament complet diferit în momentele succesive, conducând la paradoxul fluturului, a cărui bătaie din aripi într-o parte a Pământului, poate perturba puternic vremea de mâine într-o altă parte a sa — efect enunțat de meteorologul american Lorenz (vezi [21]). În cazul efectului fluturului, micile erori în aprecierea condițiilor inițiale se extind și se intensifică până la haos total în previziunea pe termen lung. Secvența evenimentelor nu se repetă, adică, la următoarea bătaie din aripi, rezultatul va fi cu totul altul. Atractorul straniu al vremii descrie un sistem haotic cu comportament irepetabil și nepredictibil.

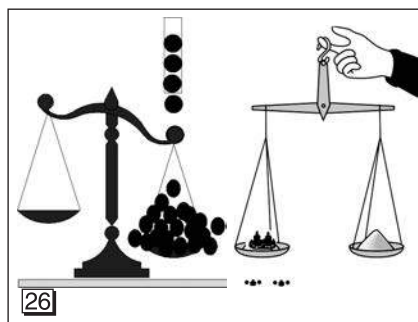
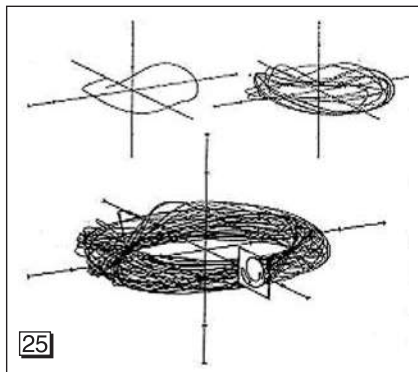
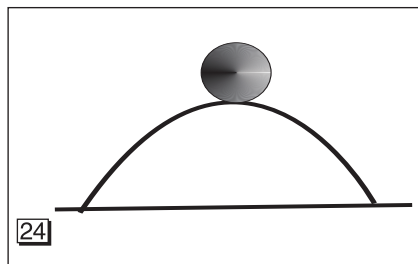
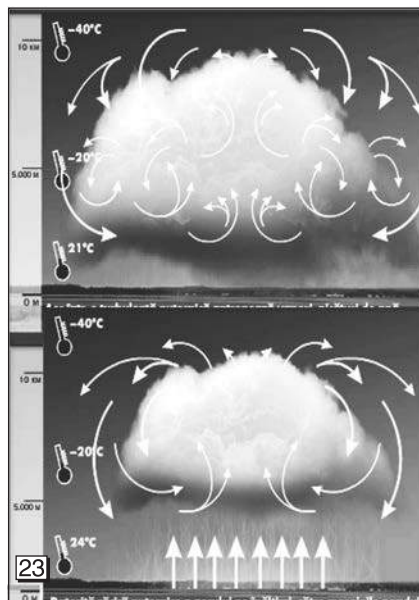
***Comportarea sistemelor departe de echilibru**

Comportarea sistemelor aflate departe de echilibru depinde de procesele care se desfășoară în interiorul sistemelor și de mărimea forțelor care acționează asupra lor.

◆ Conform teoriei tectonicii plăcilor, deformarea plăcilor litosferice provoacă tensiuni care se acumulează până la limita de fracturare a rocilor (vezi [22]). Semnalele seismice măsurate reflectă interacțiunile dintre crusta Pământului, oceane, activitatea solară, ionosferă și activitatea umană. Analiza permanentă a semnalelor seismice, într-un spațiu al fazelor, permite identificarea regiunilor din acest spațiu abstract care corespund stărilor de activitate seismică „normale” și „anormale”. O posibilă aplicație este identificarea „amprentei” fiecărei zone seismice din lume, cu alte cuvinte, a zonei din spațiul fazelor ocupate de fiecare falie sau zonă activă. Așadar, este posibilă constituirea unui spațiu abstract al fazelor și pentru zona Vrancea (prof. dr. Florin Munteanu, directorul Centrului pentru Studii Complexe, www.complexity.ro).

◆ Vaporii de apă din atmosferă iau naștere prin evaporarea apei sub acțiunea radiației termice solare. În nopțile reci, se formează ceață (picături mici de apă în suspensie) care se risipește dimineața, când aerul și pământul se încălzesc de la Soare. Ceața și norii sunt sisteme departe de echilibru între stările de agregare lichidă și gazoasă. Când vaporii nesaturați din atmosferă ajung în contact cu straturile reci de aer din apropierea Pământului, care se răcește noaptea, o parte din vaporii de apă, a căror presiune atinge valoarea de saturație corespunzătoare temperaturii mai scăzute, condensează pe impurități sau ioni în mici picături care plutesc în aer sau se depun pe frunze și pe acoperișuri sub formă de rouă. Dacă temperatura la care se atinge saturația este sub $t_0 = 0^\circ\text{C}$, toamna apare brumă, iar iarna se formează chiciură.





Picăturile de apă din nori și ceață se formează în urma condensării vaporilor, care au devenit saturați la anumite temperaturi, pe centri de condensare: ioni produși în atmosferă de radiațiile cosmice și de radioactivitatea naturală, particule de carbon sau particule de praf provenite de la sol. Vaporii de apă, antrenați în curenți de convecție sau purtați de vânt, ajung în straturile de aer rece de la altitudini mai mari și condensează în picături mici, care se măresc prin condensarea altor vapori și prin unirea mai multor picături (vezi [23]). Când greutatea lor depășește valoarea forței arhimedice, începe să plouă. Dacă întâlnesc straturi de aer cald, picăturile se micșorează prin evaporare parțială sau dispar, când se evaporă complet.

◆ Dacă sistemul tinde să evolueze pe un ciclu limită specific structurii sale, acest ciclu limită este **atractor** al sistemului. Un sistem aflat aproape de echilibru termodinamic poate funcționa pe un ciclu limită și este relativ stabil: după încetarea acțiunii forțelor perturbatoare, acesta revine la funcționarea periodică. Un sistem aflat departe de echilibru este instabil deoarece este sensibil la mici influențe exterioare.

Tranzițiile de fază ale sistemelor complexe sunt trecerile de la un regim de evoluție la alt regim datorită modificării unor variabile ale sistemului.

◆ O bilă este în echilibru instabil pe o suprafață curbă (vezi [24]). Condiții inițiale apropiate produc comportamente calitative diferite: repaus sau mișcare pe o direcție.

◆ Sistemele disipative au **comportament haotic**. Atratorul pentru un sistem haotic prezintă multe traiectorii (vezi [25]) deoarece are sensibilitate exagerată la condițiile inițiale: modificări foarte mici ale condițiilor inițiale produc schimbări mari în evoluția sistemului, datorită interacțiunilor multiple dintre subsistemele componente.

Experiment:

Un dispozitiv lasă să cadă pe talerul unei balanțe, una câte una, biluțe sau granule de nisip (vezi [26]). După un interval de timp, pe taler s-a format o movilă conică, astfel încât când o nouă biluță sau granulă poate apare una dintre situațiile:

- să se oprească după o rostogolire mai scurtă sau mai lungă;
- să declanșeze o avalanșă locală;
- să provoace alunecarea unor biluțe sau granule de nisip de pe taler;
- o biluță sau granulă care se rostogolește se poate opri într-o poziție stabilă sau poate antrena și alte biluțe sau granule;
- movila în stare critică păstrează înălțimea constantă cu o pantă critică;
- movila subcritică evoluează până la atingerea stadiului critic;
- movila în stare supracritică (cu panta mai mare decât cea critică) va suferi prăbușiri până la revenirea în starea critică.

Temă: Analizează comportarea sistemului departe de echilibru din experimentul descris. Care situații sunt mai probabile?

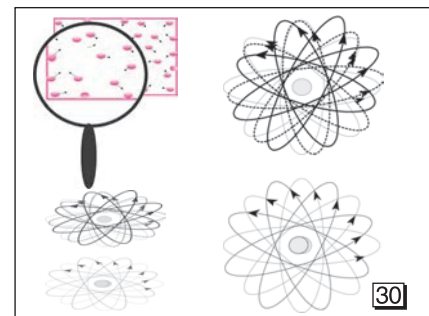
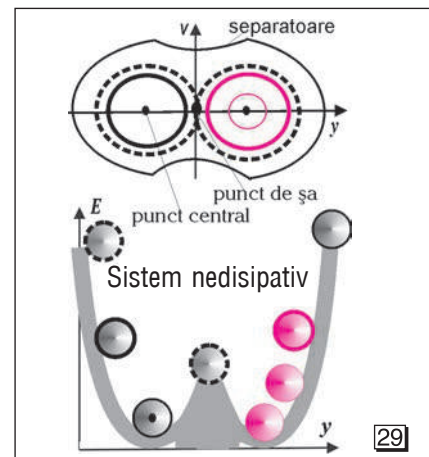
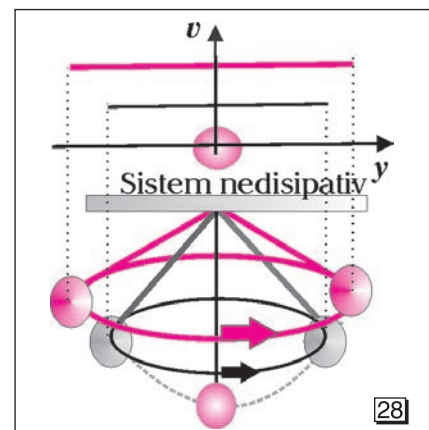
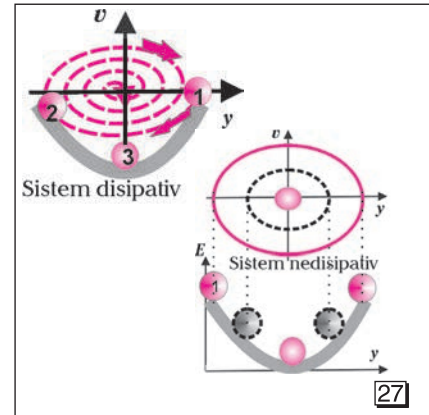


Test pentru autoevaluare

1. Analizează afirmațiile următoare și răspunde cu: A (adevărat) sau F (fals).
 - a) Un sistem cu comportament haotic manifestă dependență sensibilă de condițiile inițiale, adică este instabil și impredictibil.
 - b) Sistemele disipative nu sunt sisteme haotice.
 - c) Catastrofa apare atunci când se produce o variație discontinuă a efectelor la o variație continuă a unor cauze, spre deosebire de catastrofa din limbajul obișnuit ce presupune un eveniment neprevăzut și tragic.
 - d) Variații mici ale unor variabile ale sistemului pot conduce la scăderea stabilității sistemului.
 - e) Sistemele neliniare sunt atrase în evoluția lor de atractori strani.
2. O bilă lăsată liber din starea inițială 1, situată pe o extremitate a unei calote sferice, ajunge în starea 3 de echilibru stabil, situată în partea inferioară a calotei sferice (vezi [27]):
 - a) după un număr de oscilații amortizate; b) după un număr de oscilații neamortizate, în cele două variante din figură; c) direct, fără oscilații prin cealaltă jumătate a calotei sferice, unde este figurată starea 2.
3. Un pendul conic ideal (vezi [28]), care evoluează neamortizat cu o anumită viteză: a) ajunge în starea de echilibru static după un număr de oscilații; b) nu ajunge într-o stare de echilibru static; c) ajunge direct într-o stare de echilibru stabil, în partea de jos a figurii.
4. O bilă care este lăsată liber, de la o anumită înălțime pe o extremitate a unei duble calote sferice lucioase, oscilează neamortizat (vezi [29]), deci: a) ajunge într-un punct central al unei calote sferice, în echilibru stabil, după un număr de oscilații; b) nu ajunge într-un punct central al unei calote sferice, în echilibru stabil; c) ajunge direct într-o stare de echilibru stabil, în partea de jos a calotei sferice, fără oscilații prin cealaltă jumătate a calotei sferice.
5. Un tip de comportament într-un sistem este periodic (vezi [30]). Atraktorul predictibil pentru mișcarea electronilor din atomi este cercul.
6. Evoluția unui sistem disipativ este haotic deterministă deoarece legile care îl guvernează sunt deterministe și:
 - a) are evoluție predictibilă; b) poate suferi transformări mici, fără cauze exterioare evidente; c) condiții inițiale ușor diferite conduc la evoluții extrem de diferite.

Răspunsuri:

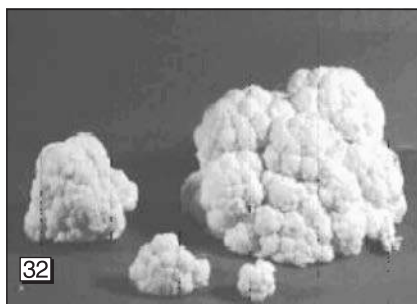
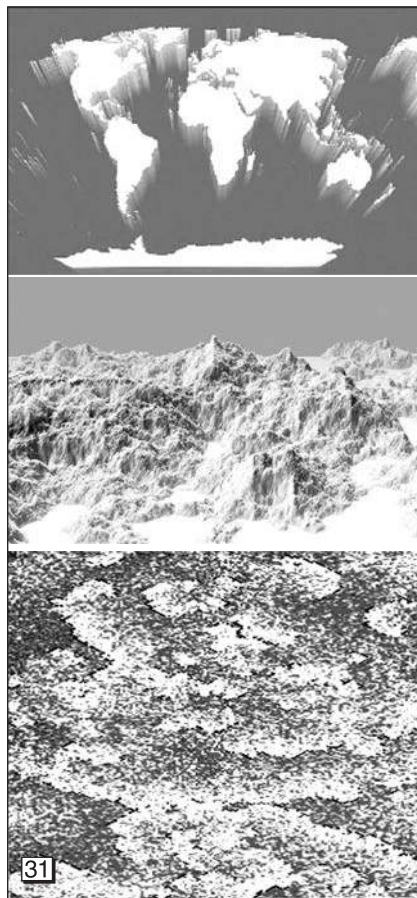
1. Afirmația **b** este falsă. 2. a. 3. b, deoarece energia pendulului conic ideal se conservă. 4. b, deoarece energia oscilațiilor neamortizate se conservă. 5. Atraktorul nu este cerc în spațiul fazelor. 6. c.





4.4. *ELEMENTE DE GEOMETRIE FRACTALĂ

Modele asemănătoare imaginilor de mai jos nu se pot obține cu rigla și compasul, ci cu ajutorul computerului (vezi [31]). Aceste imagini sugerează dificultatea utilizării geometriei euclidiene în descrierea unor obiecte întâlnite în teorie și în practică.



**Obiecte cu dimensiune geometrică fracționară. Aplicabilitatea geometriei euclidiene în descrierea unor obiecte întâlnite în teorie și în practică*

Buchetelele dintr-o conopidă sunt alcătuite din forme asemănătoare, din ce în ce mai mici, copii ale întregului (vezi [32]).

Din geometria euclidiană, cunoaștem relațiile de calcul ale unor proprietăți fizice asociate unor obiecte din natură approximate prin cercuri, cilindri, sfere. Dacă acceptăm aproximația unui trunchi de copac cu un cilindru cu baza un cerc de rază r și generatoarea cilindrului un segment de dreaptă, atunci putem calcula perimetrul cercului L , aria bazei A și volumul V al cilindrului:

$$L = 2\pi r \text{ (m}^1\text{)}; A = \pi r^2 \text{ (m}^2\text{)}; V = \pi r^2 h \text{ (m}^3\text{)}.$$

Putem spune că dimensiunea geometrică D are valorile: $D = 1$ pentru linii, $D = 2$ pentru suprafețe, $D = 3$ pentru volume, valori care coincid cu indicele superior al unității de măsură (m^1 , m^2 , m^3). Putem spune că relațiile nu sunt corecte atunci când sunt asociate trunchiului copacului a cărui coajă are o anumită textură și neregularități. Din calcul, obținem o anumită valoare, dar „pierdem” structura care caracterizează obiectul de studiu (copacul).

Pentru caracterizarea obiectelor din natură cu forme neregulate, matematicianul Benoit Mandelbrot a inventat o nouă geometrie, numită **geometria fractală**, care se ocupă cu studiul figurilor geometrice fractale. Denumirea de „fractal”, a fost dată de Mandelbrot de la adjectivul latin „fractus”. Verbul corespunzător „frangere” înseamnă a sparge. O proprietate a fractalilor este autosimilaritatea, ceea ce înseamnă că o parte din structură, după mărire, seamănă cu întregul (vezi [33]).

Fractalii sunt obiecte cu aspect neregulat, care prezintă detalii la diferite scări și au dimensiune geometrică fracționară, mai mică decât cea a spațiului în care se plasează obiectele.

Exemple:

1. O foaie de hârtie plană este un obiect bidimensional ($D = 2$) „scufundat” într-un spațiu euclidian bidimensional ($D = 2$). Dacă mototolim hârtia, atunci suprafața cocoloșului de hârtie nu mai este plană, iar hârtia este un alt obiect plasat într-un spațiu tridimensional ($D = 3$). Cocoloșul de hârtie are volum, dar nu este „dens” ca o bilă, deci este un fractal cu dimensiunea între $D = 2$ a unei suprafețe și $D = 3$ a unui volum.

2. Un fir metalic întins de lungime l are dimensiunea geometrică $D=1$. Dacă este curbat astfel încât rămâne într-un plan, atunci obiectul rezultat are tot dimensiunea $D = 1$ dar este plasat într-un spațiu euclidian cu $D = 2$. Dacă firul este făcut ghem, atunci obiectul rezultat este un fractal.

Geometria fractală studiază forme cu aspect neregulat atât în spațiu, cât și în timp, cu proprietăți de autosimilaritate.

Un **fractal geometric** este o construcție matematică realizată după un algoritm. Obiectul obținut după un număr infinit de aplicații ale algoritmului este un fractal.

Folosind noțiunile geometriei euclidiene, nu putem reprezenta formele naturale (norii nu sunt sfere, munții nu sunt conuri etc.), de aceea geometria fractală nu folosește linia, suprafața, volumul. În anul 1985, Michel Barsley și John Elton au demonstrat că **orice imagine poate fi reprezentată cu ajutorul unei categorii de fractali**.

Cu ajutorul fractalilor, putem reprezenta structuri și fenomene: plăcile tectonice, dispersia căldurii degajate la incendiul unei păduri, țărmurile, turbulențele, valurile, descărcările electrice etc.

Generarea fractalilor matematici

Fractalii matematici sunt construcții mentale, putând fi generați **iterativ** prin repetarea unui algoritm aplicat unei funcții matematice. *De exemplu:* $x_{n+1} = 2x_n + 1$, cu $x_0 = 1$.

Fractalii geometrici pot fi generați **recursiv** prin repetarea unui algoritm aplicat unor forme geometrice.

1. **Fractalul van Koch** se obține cu următorul algoritm:

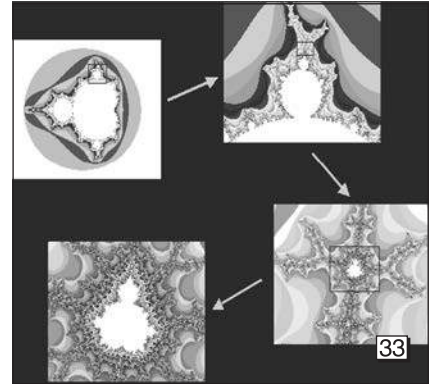
- desenăm un segment de dreaptă;
- împărțim segmentul în trei părți egale, înlăturăm partea centrală (segmentul din mijloc) și în locul lui desenăm un triunghi echilateral;

— repetăm acest procedeu pe fiecare segment; în acest proces recursiv, fiecare dintre cele 4 segmente devine suportul a 4 imagini micșorate și așezate după aceeași regulă (vezi [34]).

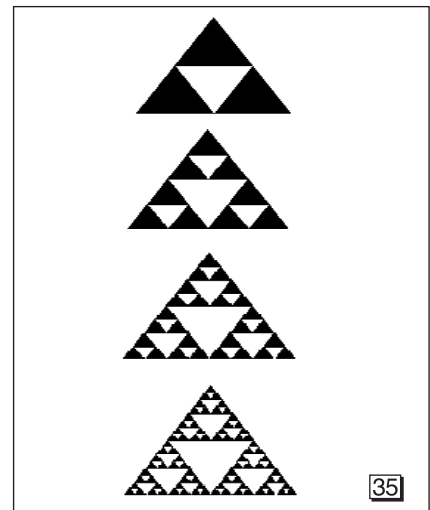
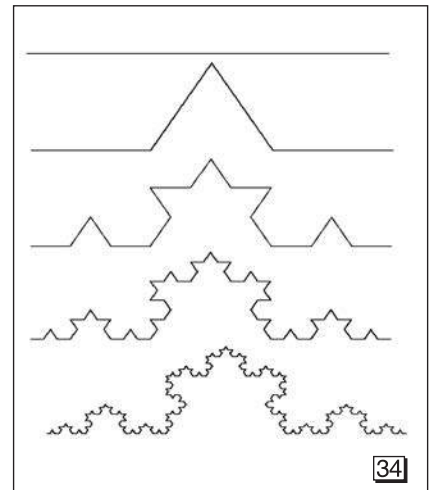
Fractalul van Koch este un curbă continuă, de lungime infinită, nederivabilă în nici un punct (nu putem duce o tangentă).

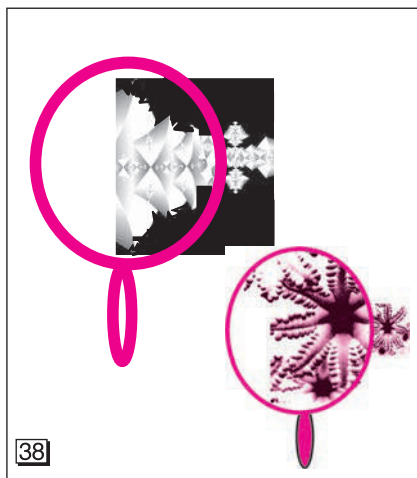
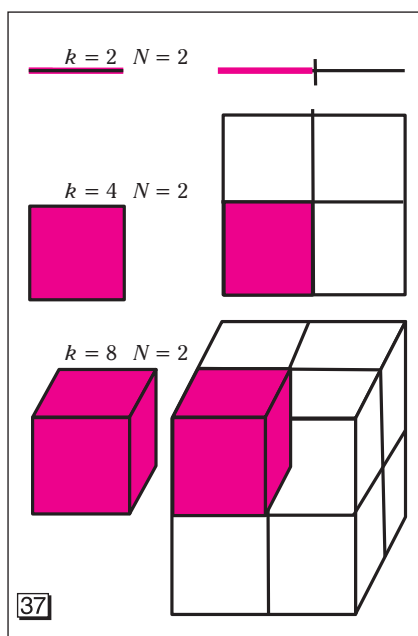
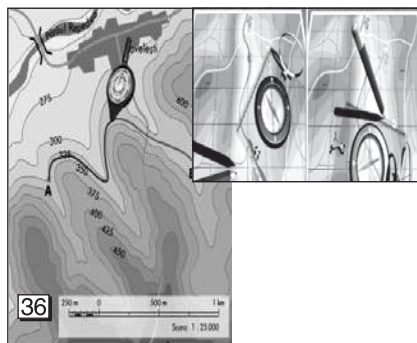
2. **Fractalul Sierpinski**, numit și triunghiul Sierpinski, a fost conceput de matematicianul polonez Waclaw Sierpinski în 1916 și se obține cu următorul algoritm:

- desenăm un triunghi echilateral;
- unim mijloacele laturilor și din triunghiurile astfel create ștergem triunghiul din mijloc;
- repetăm acest procedeu și în triunghiurile mici create (vezi [35]).



① Un fractal este autosimilar, adică o parte din structura acestuia, după mărire, seamănă cu întregul.





Structuri fractale modelate prin geometria fractală

Studiile de geometrie fractală au evidențiat proprietăți noi ale obiectelor naturale. Structurile fractale din realitate, numite și **pseudofractali**, sunt generate iterativ, prin repetarea unui proces de mai multe ori. Structura plămânului, a sistemului vascular, structura arborilor și a rădăcinilor, structura unui fulger, rugozitatea (neregularitatea) unor materiale, conturul țărmurilor sunt exemple de structuri fractale studiate și modelate prin geometria fractală. Aceste structuri se obțin după un număr de alipiri succesive în jurul unui germene central ale unor structuri similare germenului.

Conturul unui munte sau țărm se detaliază cu cât distanța de la care este privit este mai mică. Hărțile ne oferă mai multe detalii la scări de măsură mai mici, deci aproximațiile sunt mai bune pentru măsurarea perimetrului unei zone (vezi [36]). Unei linii curbe care unește două puncte nu i se poate determina lungimea, deoarece dacă se fac detalieri succesive asupra conturului, lungimea liniei crește. Fractalii au aplicații în proiectarea antenelor pentru telecomunicații, cu dimensiuni reduse după modelul fractalilor, deoarece forma antenei radio are influență asupra calității emisie și recepției.

Dimensiunea fractală **D** este un număr care cuantifică gradul de neregularitate și de fragmentare al unui fractal (structură geometrică sau structură fractală din natură). **Fractalii au dimensiunea fractală fracționară.**

Deoarece o linie dreaptă mărită de 2 ori este de 2 ori mai mare decât linia inițială, dimensiunea sa este $D = \log 2 / \log 2 = 1$ (vezi [37]). Un pătrat mărit de 2 ori este de 4 ori mai mare decât pătratul inițial (aria sa cuprinde 4 arii ale pătratului inițial), iar dimensiunea lui fractală este $D = \log 4 / \log 2 = 2$. Într-un cub mărit de 2 ori, încap 8 cuburi inițiale, iar dimensiunea lui fractală este $D = \log 8 / \log 2 = 3$.

Dimensiunea fractală se poate calcula prin raportul dintre logaritmul numărului de elemente obținute și logaritmul

factorului de micșorare, adică: $D = \frac{\log N}{\log k}$.

În cazul curbei Koch, factorul de micșorare este $k=3$ deoarece fiecare nou segment (din cele 4) este de 3 ori mai mic decât segmentul inițial, iar numărul de elemente care înlocuiesc elementul inițial este $N=4$ (segmente). Obținem dimensiunea fractală: $D_{\text{Koch}} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,261$.

Pentru triunghiul Sierpinski, $k=2$ și $N=3$, iar dimensiunea fractală este: $D_{\text{Sierpinski}} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,58$. Atunci când mărim o parte dintr-o curbă netedă (de exemplu, privim un cerc printr-o lupă), nu apar detalii suplimentare. Când mărim o parte dintr-un fractal, apar aspecte dependente de scara de rezoluție (vezi [38]).

*Atratorii stranii din punctul de vedere al geometriei fractale

Geometria fractală are aplicații diverse: studiul calității suprafețelor, antena fractală, structura semnalelor neperiodice (zgomote) etc.

Majoritatea fenomenelor naturii sunt haotice și pornesc de la o structură fractală. Formațiunile noroase, fulgii de zăpadă, sistemele vasculare, curgerile turbulente ale lichidelor au dimensiuni fractale. Curgerea turbulentă este manifestarea comportamentului haotic. Unii fractali suferă schimbări continue, iar alții rețin structura pe care au căpătat-o în evoluția lor.

Modelul folosit pentru a descrie forma predictibilă a unui sistem este atractorul. Pentru modelarea comportamentului sistemului haotic sunt utilizați **atratorii stranii** și **fractali aleatori**.

Sistemele neliniare evoluează structurându-se în forme fractale și sunt atrase în evoluția lor de **atratorii stranii**. Fumul de țigară este un sistem haotic atras de o formă stranie, cu înfățișare neregulată (atractor straniu). Mulți atratorii stranii au fost identificați în dinamica sistemelor disipative. Reprezentați în spațiul fazelor, atratorii stranii pentru sistemele neliniare disipative au structură geometrică de fractal (aceeași formă poate fi recunoscută la scări diferite, repetând în timp evoluții aproape identice).

Grafica pe calculator a progresat încât fractalii generați prin procese iterative similare pot fi reprezentați cu detalii (vezi [39]).

Deoarece există asemănări ale fractalilor cu figuri sau obiecte naturale cunoscute, geometria fractală poate fi considerată o geometrie a naturii, o metodologie adecvată cercetărilor din geofizică, astrofizică, biofizică etc. Când proprietatea de autosimilaritate se manifestă la fiecare iterație, fractalii respectivi sunt considerați determiniști.

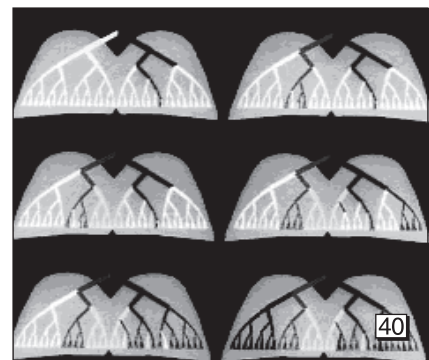
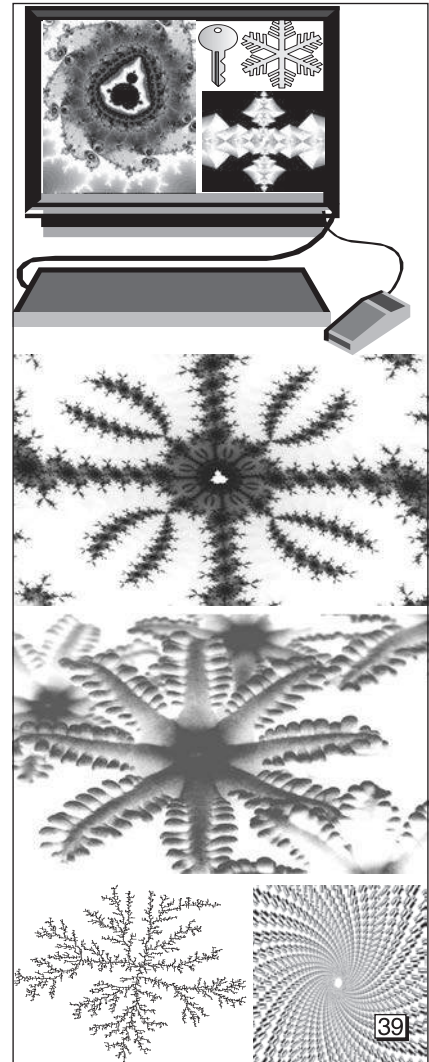
Analiza fractală poate distinge, prin dimensiunea fractală D , diferențele de structură.

Geometria fractală nu furnizează predicții, ci oferă modele pentru a urmări evoluția unui sistem și a percepe regularități în dezordinea aparentă.

Comprimarea imaginilor foarte mari în coduri foarte mici, prin transformarea lor în fractali, permite transmiterea în timp real a imaginilor video în mișcare prin liniile telefonice normale. Filmele cinematografice îi folosesc pentru efecte speciale, sistemele de redare grafică pe calculator îi folosesc pentru a crea structuri naturale.

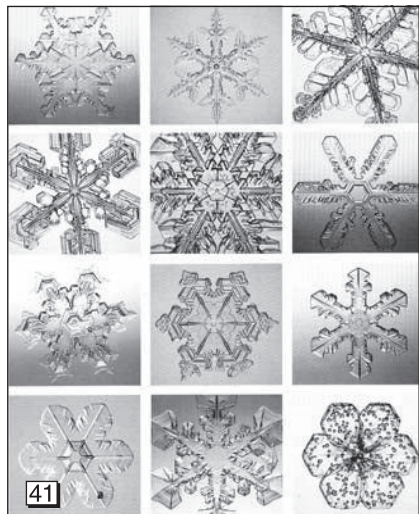
Temă:

Ochiul înregistrează imagini, creierul le compară. Dacă privim căile respiratorii, copacii cu crengi sau rădăcinile răsfirate ale plantelor reprezentate prin fractalii din figura [40] descoperim existența autosimilarității?

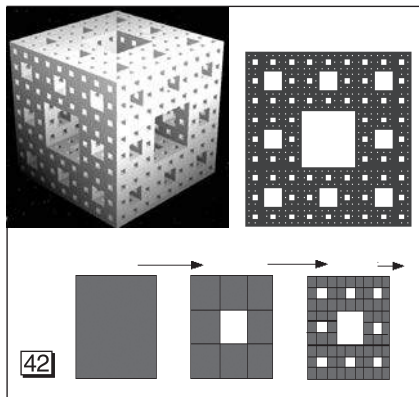


Portofoliu

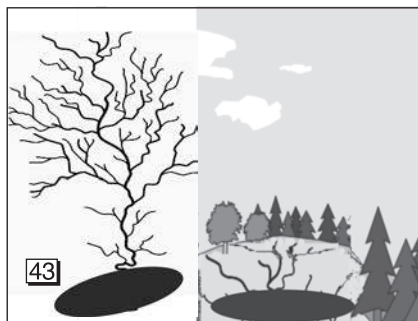
Dacă ai acces la un computer conectat la Internet, caută un program care generează fractali și vei obține și tu fractali.



41



42



43



44



Teste pentru autoevaluare

Testul 1 (cu trimiteri interdisciplinare)

1. Analizează textul de mai jos și găsește afirmațiile false:

Picăturile de ploaie se distribuie aleator în cădere. Picăturile care, din întâmplare, au crescut mai mult, au probabilitatea mai mare să alipească o altă picătură. Dacă întâlnesc un strat de aer cald, picăturile mici dispar prin evaporare sau încep să urce sub acțiunea forței rezultante de tip ascensional, iar picăturile mari vor continua să cadă.

2. Caută afirmații valabile pentru sistemele complexe:

a) Cauze identice, mici ca intensitate, pot declanșa efecte minore, dar și „catastrofe” (nu sunt relații de proporționalitate între cauză și efect, deci este posibil ca buturuga mică să răstoarne carul mare).

b) Efecte majore, de tip catastrofă, pot fi consecința unor cauze majore externe sistemului sau a unor cauze minore care declanșează reorganizări interne ale sistemului prin mecanisme de tip avalanșă.

c) Un eveniment elementar poate afecta multe elemente ale sistemului prin reacții în lanț și are efecte de toate mărimile.

d) Supersensibilitatea la condițiile inițiale produce haosul mișcării browniene.

3. Fulgii de zăpadă se formează pe germeni de cristalizare. De ce fulgii de zăpadă ajunși pe sol nu au aceeași formă (vezi [41])?

4. Sensibilitatea la condițiile inițiale presupune faptul că:

a) fluctuații mici ale cauzelor pot produce fluctuații mari ale efectelor; b) cauze mici nu produc efecte; c) cauze mici produc numai efecte mici.

5. Cubul lui Sierpinski este o modelare a unui filtru: inițiatorul, constituit dintr-un cub plin, este divizat în părți egale din care se îndepărtează partea centrală de pe fiecare față (vezi [42]). În câte părți este divizată fiecare față?

6. Analizează textul de mai jos și găsește afirmațiile corecte:

Atraktorul care adună apele dintr-un bazin hidrografic este un lac (vezi [43]). Considerăm că suportul dinamicii este relieful, iar traiectoriile dinamicii sunt liniile de curgere a apelor. Forma pe care o va avea terenul în urma unei alunecări de teren este imposibil de prevăzut (vezi [44]).

Răspunsuri:

1. Nu sunt afirmații false. 2. Toate afirmațiile sunt valabile pentru sistemele complexe. 3. Sensibilitatea la condițiile inițiale. 4. a. 5. Fiecare față (sita lui Sierpinski) este divizată în 9 părți egale. 6. Afirmațiile sunt corecte pentru aceste sisteme complexe.

Testul 2 (cu grad mic de dificultate)

I. Analizează afirmațiile următoare și răspunde cu A (adevărat) sau F (fals):

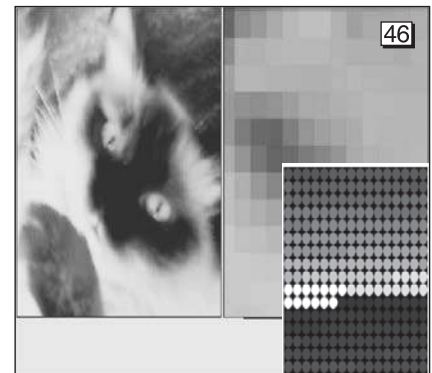
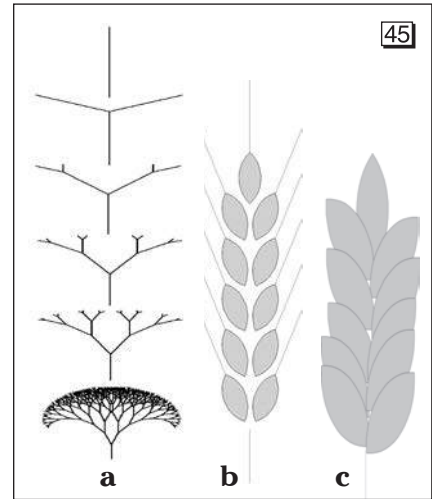
1. Orice porțiune a fractalului arată ca fractalul întreg, astfel încât acea structură similară există la orice scară de mărire a obiectului.
2. Supersensibilitatea la condițiile inițiale menține în repaus o bilă aflată în echilibru instabil pe un cilindru.
3. În natură, ordinea coexistă cu haosul.
4. În ultimii ani, s-a descoperit că unele sisteme au proprietăți ale unui fractal.
5. Dacă aceeași formă poate fi recunoscută la scări diferite, atunci forma este autosimilară.
6. Reprezentați în spațiul fazelor, atractorii stranii pentru sistemele neliniare disipative au structură geometrică de fractal (aceeași formă poate fi recunoscută la scări diferite, repetând în timp evoluții aproape identice).
7. Fractalii au aplicații în proiectarea antenelor de dimensiuni reduse pentru telecomunicații, deoarece forma acestora are influență asupra calității emisie și recepției.

II. Analizează și găsește răspunsul la întrebările următoare:

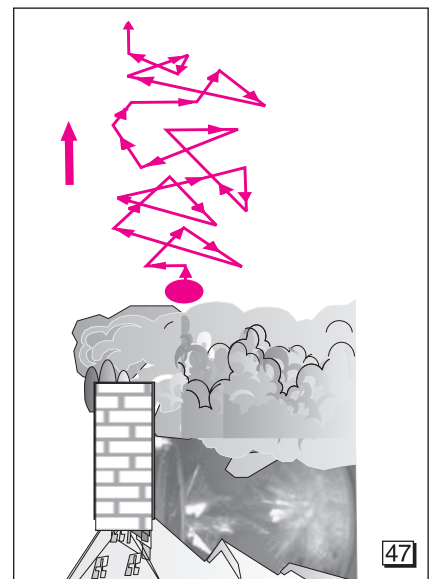
1. Un fractal solicită un efort imaginativ din partea observatorului. Descoperi un fractal în figura [45]?
2. Imaginile fractale au detalii similare cu imaginea inițială la toate nivelurile de rezoluție. La imaginile digitale, pixelii apar măriți sub forma unor dreptunghiuri la rezoluții mari (vezi [46]). Fractalii sunt folosiți la compresia imaginilor de sute de ori. Fractalii sunt folosiți la crearea animațiilor sau la crearea desenelor animate pe calculator?
3. Una dintre structurile fractale studiate a fost traiectoria mișcării browniene a particulelor de carbon în suspensie (vezi [47]). Dimensiunea fractală a graficului deplasării unei particule browniene în timp este 1,5. Cum este poziția acesteia?

Răspunsuri:

- I. Numai afirmația 2 este falsă.
- II. 1. Numai prima figură [45] a respectă un algoritm. 2. Da, sistemele de redare grafică pe calculator folosesc fractalii. 3. Poziția particulei este aleatoare.



Pe ecranul monitorului unui calculator, un fascicul filiform de electroni se deplasează foarte repede, de la stânga spre dreapta și de sus în jos, dar ochiul nu reține fiecare poziție.



BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

- Alfavega, material didactic și accesorii pentru fizică, www.alfavega.ro
- Chirleşan G., Rusu O., *Ghid de evaluare la fizică*, Serviciul Național de Evaluare și Examinare M.E.N., Trithemius Media, București, 1999
- ELWE — *Echipamente didactice* — TEILKATALOG 2-11 Germany, elwerom@fx.ro
- Epstein L.C., *Gândiți fizica!*, Editura ALL Educational, București, 1995
- Jones E., Childers R., *Physics*, McGraw — Hill Higher Education, Boston, 2000
- Lecții interactive de fizică*, Intuitext™-SOFTWIN, 2003, www.intuitext.ro
- Materiale educaționale*, AEL, v. 4.0, Siveco, 2004
- Munteanu F, Centrul pentru Studii Complexe, www.complexity.ro
- Ohanian, H.C., *Physics*, W-W-Norton & Company, New York-London, Copyright 1985 Norton & Company
- Physics CD, McGill University, M.C.H. Multimedia Inc., Montreal, Canada, 2002
- Popescu, A. și colectiv, *Probleme de fizică pentru clasele IX-XII*, Editura Petrion, București, 2000
- Preda, M., Cristea, P., *Probleme de electricitate pentru examenele de bacalaureat și admitere în învățământul superior*, Editura Tehnică, București, 1973
- Rusu, O., *Propagarea undelor elastice*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985
- Rusu O., Galbură A., Georgescu C., *Fizică (Mecanică. Fizică moleculară. Electricitate. Optică) pentru liceu, bacalaureat și concursuri de admitere, sistem grilă*, Editura Niculescu, București, 1997
- Rusu O. și colectiv, *FIZICĂ, Manual pentru clasa a X-a*, Editura Corint, București, 2005
- Rusu O. și colectiv, *FIZICĂ, FIZICĂ Terodinamică Electricitate Magnetism*, Editura Corint, București, 2005
- Rusu O. și colectiv, *FIZICĂ, FIZICĂ Mecanică Optică*, Editura Corint, București, 2005
- Rusu O. și colectiv, *FIZICĂ, Manual pentru clasa a IX-a*, Editura Niculescu, București, 2004
- Rusu O. și colectiv, *FIZICĂ, Manual pentru clasa a X-a*, Editura Teora Educational, București, 2000
- Rusu O. și colectiv, *FIZICĂ, Manual pentru clasa a XI-a*, Editura Teora Educational, București, 2001
- Rusu O. și colectiv, *FIZICĂ, Manual pentru clasa a XII-a*, Editura Teora Educational, București, 2002
- Truția, C., Rusu, O., *Fizică (Electricitate, Optică, Termodinamică) – teste pentru admitere în învățământul superior*, Editura universitară „Carol Davila”, București, 2000XXX, *Colecția revistei de fizică Evrika*, 1996-2005
- XXX, *Colecția revistei de fizică Evrika*, 1996-2005

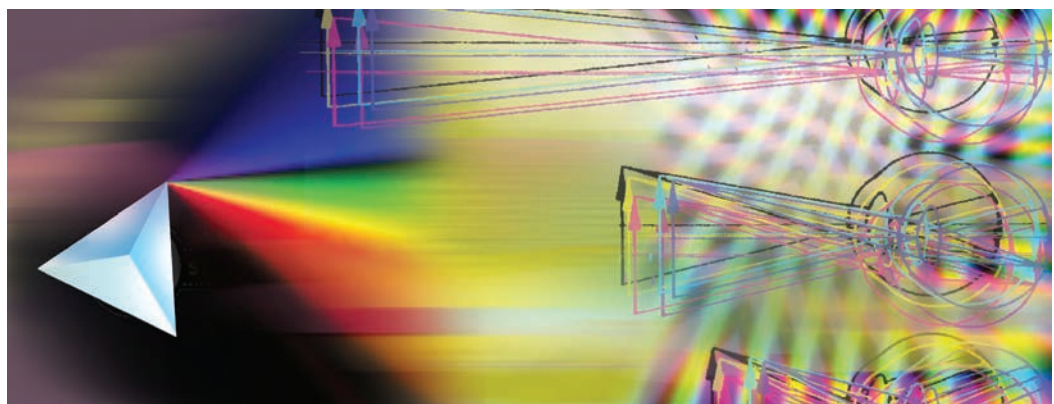
Octavian Rusu
Livia Dinică

Constantin Trăistaru
Constantin Gavrilă

Fizică

F1 + F2

Manual pentru clasa a XI-a



F1 Filiera teoretică, profil real, specializările matematică-informatică și științe ale naturii; filiera vocațională, profil militar MAPN, specializarea matematică-informatică.

F2 Filiera tehnologică, pentru toate calificările cu 1-2 ore/săptămână.

Se aplică și la clasa a XII-a — filiera tehnologică, ruta progresivă de calificare prin școala de arte și meserii + anul de completare.