
SISTEME DE REGLARE CU ESANTIONARE

În general, prin **eșantionare** se înțelege *discretizarea în timp a unui semnal continuu*. În majoritatea aplicațiilor practice, eșantionarea este uniformă (are loc la momente de timp echidistante), iar semnalele de timp discret obținute prin eșantionare sunt și *cuantificate* (discretizate în valoare), fiind deci semnale de tip *numeric*. În cazul sistemelor cu eșantionare *multiplă*, care conțin atât elemente continue cu dinamică lentă cât și elemente continue cu dinamică rapidă, semnalele continue asociate acestor sisteme sunt discretizate cu perioade de eșantionare diferite.

Sistemele cu eșantionare, numite și sisteme eșantionate, sunt sisteme hibride care conțin atât subsisteme cu timp continuu (analogice), cât și subsisteme cu timp discret (discrete). Prezența ambelor tipuri de subsisteme și de semnale (analogice și discrete) în cadrul aceluiași sistem creează o serie de dificultăți în analiza și sinteza sistemelor cu eșantionare, care pot fi însă depășite prin utilizarea formalismului matematic bazat pe transformarea \mathcal{Z} .

Sistemele cu eșantionare pot valorifica într-un mod armonios avantajele rezultate din îmbinarea *caracterului intuitiv* al conceptului analogic cu *flexibilitatea și potentialul de calcul* (caracterizat prin capacitatea de memorare, viteza și precizia de calcul) specifice sistemelor numerice.

4.1. EXEMPLE DE SISTEME CU ESANTIONARE

Un exemplu de sistem cu eșantionare îl constituie sistemul de reglare continuă (cu regulator continuu) a *concentratiei* unui component într-un amestec, având ca traductor de concentrație un *cromatograf de proces*. Probele de analizat sunt prelevate periodic, la momentele de timp $t_k = kT$, $k \in \mathbb{Z}$, iar operația de măsurare a concentrației componentului durează un anumit interval de timp τ (considerat timp mort), mai mic sau cel mult egal cu perioada de eșantionare T . Între momentele de timp $t_k + \tau$ și $t_{k+1} + \tau$, cromatograful generează un semnal constant, ce caracterizează concentrația la momentul t_k .

Sub aspect formal (matematic), sistemul de măsurare este echivalent unei conexiuni serie de trei elemente (fig. 4.1): un element de întârziere cu timpul mort τ , un convertor analogic-discret C_{A-D} cu perioada de eșantionare T și un convertor discret-analogic C_{D-A} .

De remarcat faptul că prin efectuarea succesivă a conversiilor analogic-discretă și discret-analogică, o funcție de timp continuu este transformată tot într-o funcție de timp continuu, dar de *tip scară*, iar cele două funcții tind să se identifice atunci când perioada de esantionare T tinde la zero.

Sistemele de reglare a *temperaturii de inflamabilitate*, a *temperaturii initiale* și a *temperaturii finale de fierbere* ale unor produse petroliere sunt, de asemenea, sisteme cu măsurare esantionată și întârziată.

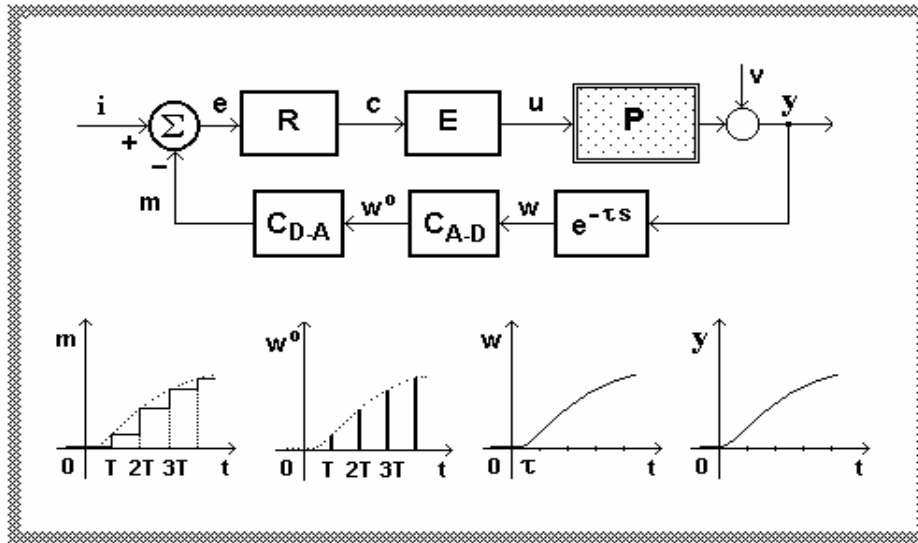


Fig. 4.1. Sistem de reglare automată cu măsurare esantionată și întârziată

Tipul de sistem cu esantionare cel mai reprezentativ este cel întâlnit la *reglarea proceselor continue cu ajutorul unui calculator sau al unui regulator numeric* (fig. 4.2). La fiecare moment de esantionare $t_k = kT$, convertorul analogic-discret C_{A-D} generează valoarea numerică $m^0(t_k)$ a semnalului discret numeric m^0 , practic egală cu valoarea semnalului de timp continuu $m(t)$ la momentul t_k , iar blocul numeric BN calculează, prin procesarea convenabilă a erorii $e^0(t_k) = i^0(t_k) - m^0(t_k)$, valoarea numerică $c^0(t_k)$ a semnalului de comandă. Pe durata intervalului de esantionare $[t_k, t_{k+1})$, convertorul discret-analogic C_{D-A} menține semnalul de comandă de timp continuu $c(t)$ la o valoare constantă, egală cu $c^0(t_k)$.

Deoarece toate semnalele discrete ale sistemului de reglare sunt de tip numeric (digital), fiind cuantificate într-un număr finit de valori, convertorul analogic-discret C_{A-D} se numește *analogic-digital* sau *analogic-numeric* (C_{A-N}) iar convertorul discret-analogic C_{D-A} se numește *digital-analogic* sau *numeric-analogic* (C_{N-A}).

Deoarece conține suplimentar, între cele două convertoare, blocul numeric de procesare a semnalului discret, structura sistemului de reglare cu algoritm de comandă numeric este mai generală decât cea a sistemului de reglare cu măsurare esantionată.

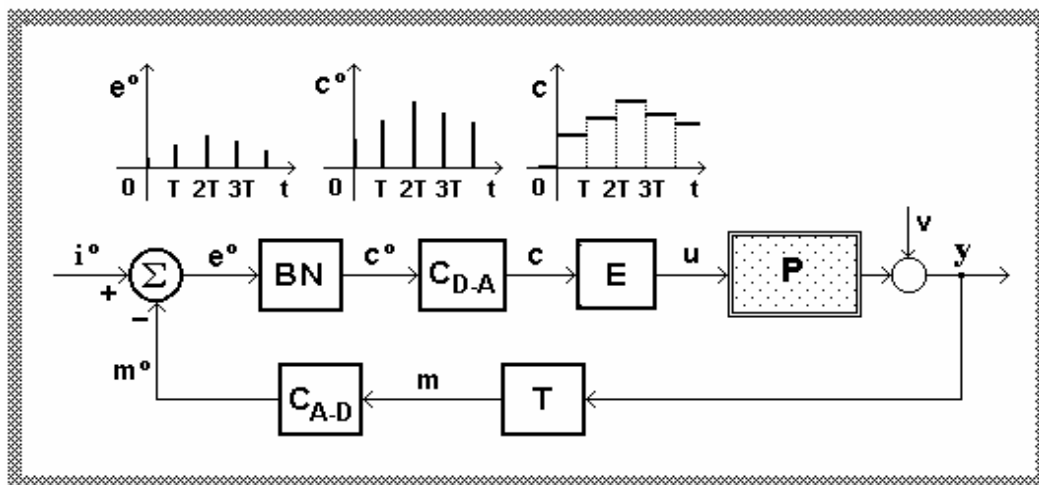


Fig. 4.2. Sistem de reglare automată cu regulator numeric

4.2. CONVERSIE, MODULARE, EXTRAPOLARE

Prin **conversie analogic-discretă** cu perioada T (numită și **esantionare** cu perioada T), o funcție analogică (de timp continuu și cu valori finite) $f(t)$ este transformată într-o funcție de timp discret T -echivalentă $f^o(t) = \{f(kT)\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Pentru ca operația de conversie să fie realizată fără pierdere de informație este necesar ca *pulsatia de esantionare* ($\omega_s = 2\pi/T$) să fie mai mare cu dublul *pulsatiei maxime* ω_0 a semnalului de esantionat (teorema de esantionare a lui Shannon).

În condițiile precizate de teorema lui Shannon, funcția de timp continuu $f(t)$ poate fi reconstituită pe baza valorilor funcției discrete asociate $f^o(t) = \{f(kT)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, cu relația

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\sin \frac{\omega(t-kT)}{2}}{\frac{\omega(t-kT)}{2}}. \quad (1)$$

Un exemplu edificator de nerespectare a regulii lui Shannon îl constituie esantionarea cu pulsția $2\omega_0$ a unui semnal analogic pur sinusoidal, caracterizat prin pulsția ω_0 și amplitudinea A . Prin esantionare se obține un semnal discret cu valoarea constantă (cuprinsă în intervalul $[-A, A]$), din care, evident, nu se poate reconstitui semnalul sinusoidal.

În aplicațiile practice, pulsția de esantionare se alege însă de circa 5...10 ori mai mare decât valoarea critică $2\omega_0$. În plus, pentru ca semnalul analogic să nu fie contaminat de perturbările cu frecvență mai mare decât frecvența maximă inițial prevăzută ω_0 , în fața convertorului analogic-discret trebuie amplasat un *filtru trece-jos* care să blocheze frecvențele superioare lui ω_0 .

Prin **conversie discret-analogică**, o funcție discretă $f^o(t)$ cu perioada de discretizare T ($t=kT$, $k \in \mathbb{Z}$) este transformată într-o funcție analogică $f_a(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Funcției de timp continuu $f(t)$ și funcției de timp discret $f^0(t) = \{f(kT)\}_{k \in \mathbb{N}}$ li se asociază funcția de timp continuu tip distribuție $f^*(t)$, definită astfel

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT), \quad t \in \mathbb{R}^+ . \quad (2)$$

Din examinarea relației (2) reiese că distribuția f^* (numită impropriu și *funcție esantionată*) este o succesiune de impulsuri Dirac echidistante și modulate în “amplitudine”.

Distribuția $f^*(t)$ va fi reprezentată grafic prin segmente orientate, având aceeași lungime ca la funcția de timp discret $f^0(t)$ - fig. 4.3. În cele ce urmează vom considera că la momentul $t_k = kT$, distribuția $f^*(t)$ are valoarea de modulare

$$f^*(t_k) = f(t_k). \quad (3)$$

Distribuția f^* conține aceeași informație ca funcția discretă f^0 , dar spre deosebire de aceasta, este compatibilă cu formalismul matematic de tipul transformării Laplace. Transformata Laplace a distribuției f^* are expresia

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTs} . \quad (4)$$

Sub aspectul formalismului matematic, operația de conversie discret-analogică poate fi descompusă în două suboperații: una de modulare în impulsuri Dirac, cealaltă de extrapolare (fig. 4.3). Prin *modulare*, semnalul discret de intrare f^0 este transformat într-un semnal tip distribuție f^* , iar prin *extrapolare*, semnalul tip distribuție f^* este transformat într-un semnal analogic f_a . În cazul convertorului discret-analogic de ordinul zero, funcția analogică de ieșire f_a conservă valoarea funcției discrete de intrare f^0 pe durata intervalului de esantionare.

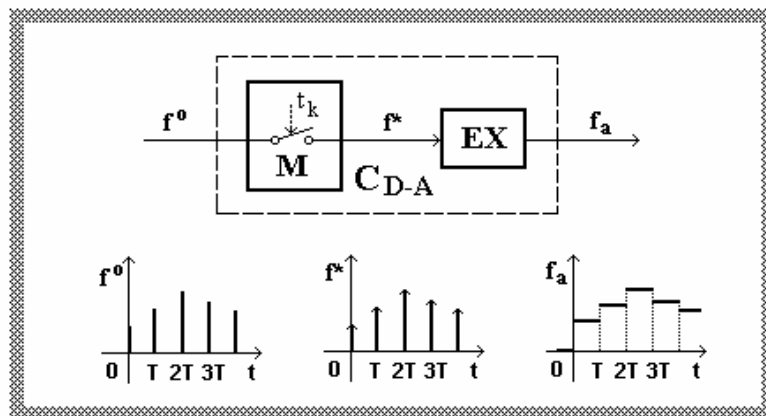


Fig. 4.3. Structura idealizată a convertorului discret-analogic C_{D-A} : M - modulator în impulsuri Dirac, EX – extrapolator (de ordinul zero).

Extrapolatorul de ordinul zero (numit “holder” în engleză și “bloquer” în franceză) generează o funcție analogică având valoarea constantă pe fiecare interval $[t_k, t_{k+1})$, egală cu valoarea de modulare a distribuției de intrare la momentul t_k (fig. 4.4), adică:

$$f_a(t) = f(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (5)$$

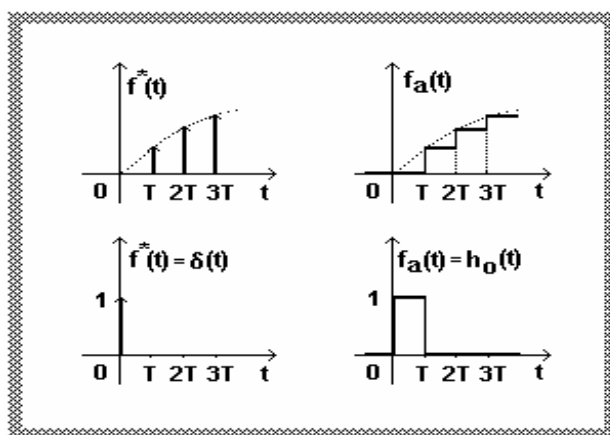


Fig. 4.4. Estimarea funcției analogice cu extrapolatorul de ordinul zero

Răspunsul extrapolatorului de ordinul zero la intrarea tip distribuție $f^*(t) = \delta(t)$ este funcția pondere

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T) \\ 0, & t \in [T, \infty) \end{cases}. \quad (6)$$

Scriind funcția pondere sub forma

$$h_0(t) = 1(t) - 1(t-T), \quad (7)$$

obținem pentru extrapolatorul de ordinul zero următoarea funcție de transfer

$$H_0(s) = \mathcal{L}[h_0(t)] = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}. \quad (8)$$

Extrapolatorul de ordinul unu (fig. 4.5) estimează funcția analogică $f_a(t)$ pe intervalul $[t_k, t_{k+1})$ prin extrapolarea liniară a valorilor de modulare anterioare $f(t_{k-1})$ și $f(t_k)$ ale distribuției $f^*(t)$, după relația

$$f_a(t) = f(t_k) + \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{T}(t - t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (9)$$

Scriind funcția pondere a extrapolatorului sub forma

$$h_1(t) = \left(1 + \frac{t}{T}\right)[1(t) - 1(t-T)] + \left(1 - \frac{t}{T}\right)[1(t-T) - 1(t-2T)] =$$

$$= (1 + \frac{t}{T})1(t) - 2(1 + \frac{t-T}{T})1(t-T) + (1 + \frac{t-2T}{T})1(t-2T), \quad (10)$$

rezultă următoarea funcție de transfer a extrapolatorului de ordinul unu

$$H_1(s) = \mathcal{L}[h_1(t)] = \frac{Ts+1}{T} \left(\frac{1-e^{-Ts}}{s} \right)^2. \quad (11)$$

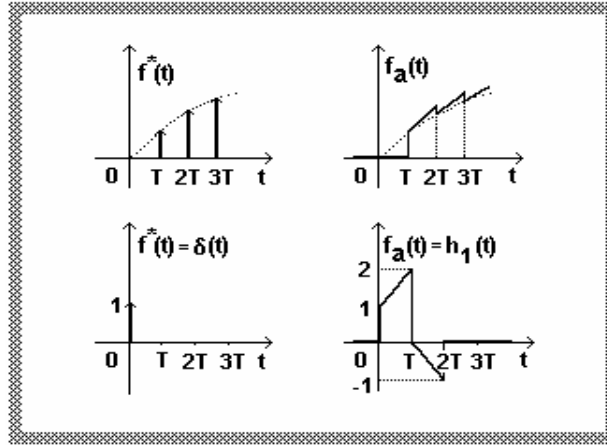


Fig. 4.5. Estimarea funcției analogice cu extrapolatorul de ordinul unu

Extrapolatorul cu întârziere T (fig. 4.6) generează o funcție analogică continuă pe \mathbf{R} și liniară pe fiecare interval $[t_k, t_{k+1}]$, astfel încât $f_a(t_k) = f(t_{k-1})$ și $f_a(t_{k+1}) = f(t_k)$, adică

$$f_a(t) = f(t_{k-1}) + \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{T}(t - t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}]. \quad (12)$$

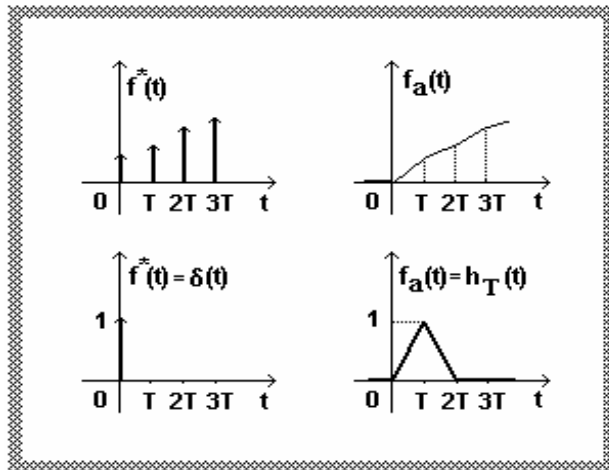


Fig. 4.6. Estimarea funcției analogice cu extrapolatorul cu întârziere T

Extrapolatorul are funcția pondere

$$h_T(t) = \frac{t}{T} [1(t) - 1(t-T)] + (2 - \frac{t}{T}) [1(t-T) - 1(t-2T)] = \frac{t}{T} 1(t) - 2 \frac{t-T}{T} 1(t-T) + \frac{t-2T}{T} 1(t-2T) \quad (13)$$

si functia de transfer

$$H_T(s) = \mathcal{L}[h_T(t)] = \frac{1}{T} \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right)^2. \quad (14)$$

Datorită simplității si robusteții functionale, extrapolatorul de ordinul zero este preferat în majoritatea aplicatiilor practice.

4.3. METODA OPERATIONALA \mathcal{Z}

Metoda operatională de analiză si sinteză a sistemelor cu esantionare apelează la transformarea liniară \mathcal{Z} .

4.3.1. Transformarea \mathcal{Z}

Funcția analogică $f(t)$, funcția discretă $f^0(t)$ si funcția distribuție asociată $f^*(t)$, toate cu valoarea nulă pentru $t < 0$, admit aceeași transformată \mathcal{Z} , definită astfel

$$\mathcal{Z}[f(t)] = \mathcal{Z}[f^0(t)] = \mathcal{Z}[f^*(t)] \stackrel{\Delta}{=} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}, \quad (15)$$

unde T este perioada de esantionare, iar z - o variabilă complexă cu modulul suficient de mare pentru a asigura convergența seriei.

Deoarece distribuția δ^* asociată funcției discrete de tip impuls unitar $\delta^0 \stackrel{\Delta}{=} \{1, 0, 0, \dots\}$ este chiar distribuția impuls Dirac $\delta(t)$, adică $\delta^*(t) = \delta(t)$, din (15) rezultă

$$\mathcal{Z}[\delta(t)] = \mathcal{Z}[\delta^0(t)] = 1. \quad (16)$$

Transformata $F(z)$ a funcțiilor $f(t)$, $f^0(t)$ si $f^*(t)$ se obține din transformata Laplace $F^*(s)$ a distribuției $f^*(t)$ substituind pe e^{Ts} cu z , adică

$$F(z) = \mathcal{L}[f^*(t)] \Big|_{e^{Ts}=z}. \quad (17)$$

Intr-adevăr, în conformitate cu (4) avem:

$$F^*(s) \Big|_{e^{Ts}=z} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = \mathcal{Z}[f(t)].$$

Asa cum vom arăta mai departe, transformata $F(z)$ a unei funcții de timp continuu $f(t)$ poate fi determinată pe baza transformatei Laplace $F(s)$ a funcției $f(t)$. Ținând seama de acest fapt, pentru simplificarea formalismului matematic vom accepta utilizarea notatiei (abuzive)

$$\mathcal{Z}[f(t)] \stackrel{\text{abz}}{=} \mathcal{Z}[F(s)] . \quad (18)$$

Dintre *proprietățile* transformării \mathcal{Z} valabile atât pentru funcțiile de timp discret cât și pentru cele de timp continuu, menționăm:

- *proprietatea de liniaritate*

$$\mathcal{Z}[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 \mathcal{Z}[f_1(t)] + k_2 \mathcal{Z}[f_2(t)] , \quad k_1, k_2 \in \mathbf{R} ; \quad (19)$$

- *proprietatea deplasării în real*

$$\mathcal{Z}[f(t-nT)] = z^{-n} \mathcal{Z}[f(t)] , \quad \mathcal{Z}[e^{-nTs} F(s)] = z^{-n} \mathcal{Z}[f(t)] ; \quad (20)$$

- *proprietatea înmulțirii în complex*

$$\mathcal{Z}[e^{-at} f(t)] = F(e^{aT} z) , \quad \mathcal{Z}[\alpha^{\frac{t}{T}} f(t)] = F(\alpha z) ; \quad (21)$$

- *proprietatea derivării în complex*

$$\mathcal{Z}[t f(t)] = -T F'(z) ; \quad (22)$$

- *proprietatea valorii finale*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z) , \quad ^1 \quad (23)$$

valabilă atunci când $(1 - z^{-1})F(z)$ are totuși polii cu modulul subunitar;

- *proprietatea valorii initiale*

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) , \quad (24)$$

valabilă atunci când limita din dreapta egalului există și este finită;

- *proprietatea produsului de convoluție*

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{i=0}^k h(kT-iT)u(iT)\right] = H(z) \cdot U(z) . \quad ^2 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} ^1 \quad (1 - z^{-1})F(z) &= \mathcal{Z}[f(t)] - \mathcal{Z}[f(t-T)] = \mathcal{Z}[f(t) - f(t-T)] = \sum_{k=0}^{\infty} [f(kT) - f((k-1)T)] z^{-k} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n [f(kT) - f((k-1)T)] z^{-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} [f(kT)(z^{-k} - z^{-k-1}) + f(nT)z^{-n}] , \end{aligned}$$

deci

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow 1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} f(kT)(z^{-k} - z^{-k-1}) + f(nT)z^{-n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} f(nT) .$$

Reamintim că funcția pondere $h^0(t)$ a unui *sistem discret*, este răspunsul forțat la intrarea impuls unitar $\delta^0 = \{1, 0, 0, \dots\}$, iar *funcția indicială* $g(t)$ este răspunsul forțat la intrarea treaptă unitară $1^0 = \{1, 0, 0, \dots\}$. Deoarece $\delta^0(t) = 1^0(t) - 1^0(t-T)$, din principiul superpoziției rezultă

$$h(t) = g(t) - g(t-T), \quad (26)$$

iar în urma aplicării transformării \mathcal{Z} obținem

$$\mathcal{Z}[h(t)] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[g(t)]. \quad (27)$$

În conformitate cu principiul superpoziției, răspunsul forțat al unui sistem discret cu funcția pondere $h(t)$ la o intrare arbitrară $u(t)$ poate fi exprimat prin relațiile de convoluție

$$y(kT) = \sum_{i=0}^k h(kT-iT)u(iT) = \sum_{i=0}^k h(iT)u(kT-iT) = \sum_{i=0}^k g(iT)[u(kT-iT) - u(kT-iT-T)], \quad (28)$$

Mai departe, introducând notația $\overline{HU}(z)$ pentru transformata \mathcal{Z} a produsului de convoluție a *funcțiilor de timp continuu* $h(t)$ și $u(t)$, adică $\overline{HU}(z) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{Z}[h(t) \cdot u(t)]$, din proprietatea (2.8) a produsului de convoluție rezultă

$$\overline{HU}(z) = \mathcal{Z}[H(s)U(s)]. \quad (29)$$

Cazuri particulare. a) Dacă $U^*(s)$ este transformata Laplace a *semnalului tip distribuție* $u^*(t)$, atunci

$$\overline{HU^*}(z) = H(z) \cdot U(z). \quad (30)$$

Intr-adevăr, avem

$$\begin{aligned} \overline{HU^*}(z) &= \mathcal{Z}[H(s) \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)e^{-kTs}] = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\mathcal{Z}[H(s)e^{-kTs}] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)z^{-k}H(z) = H(z) \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)z^{-k} = H(z) \cdot U(z). \end{aligned}$$

b) Dacă $H_0(s)$ este *funcția de transfer a extrapolatorului de ordinul zero*, atunci

$$\overline{HH_0}(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right]. \quad (31)$$

Avem

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[\sum_{i=0}^k h(kT-iT)u(iT)\right] &= \mathcal{Z}\left[\sum_{i=0}^{\infty} h(kT-iT)u(iT)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} h(kT-iT)u(iT)\right]z^{-k} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} u(iT) \sum_{k=0}^{\infty} h(kT-iT)z^{-k} = \sum_{i=0}^{\infty} u(iT)z^{-i} \sum_{k=0}^{\infty} h(kT-iT)z^{-(k-i)} = \left[\sum_{i=0}^{\infty} u(iT)z^{-i}\right] \cdot \left[\sum_{j=0}^{\infty} h(jT)z^{-j}\right] = \\ &= U(z) \cdot H(z). \end{aligned}$$

$$\overline{HH_0}(z) = \mathcal{Z}\left[H(s) \frac{1-e^{-Ts}}{s}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right] - \mathcal{Z}\left[e^{-Ts} \frac{H(s)}{s}\right] = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right].$$

c) Dacă $U_{sc}(s)$ este transformata Laplace a semnalului analogic tip scară $u_{sc}(t)$, adică

$$u_{sc}(t) = u_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}),$$

atunci

$$\overline{HU_{sc}}(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right] \cdot U_{sc}(z). \quad (32)$$

Intr-adevăr, din

$$u_{sc}(t) = [1(t)-1(t-T)]u_0 + [1(t-T)-1(t-2T)]u_1 + [1(t-2T)-1(t-3T)]u_2 + \dots,$$

rezultă

$$U_{sc}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} [u_0 + u_1 e^{-Ts} + u_2 e^{-2Ts} + \dots],$$

deci

$$U_{sc}(s) = H_0(s)U_{sc}^*(s). \quad (32')$$

Tinând seama, pe rând, de relațiile (32'), (30) și (31), obținem

$$\begin{aligned} \overline{HU_{sc}}(z) &= \mathcal{Z}[H(s)U_{sc}(s)] = \mathcal{Z}[H(s)H_0(s)U_{sc}^*(s)] = \mathcal{Z}[H(s)H_0(s)] \cdot U_{sc}(z) = \\ &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right] \cdot U_{sc}(z). \end{aligned}$$

4.3.2. Calculul transformatei \mathcal{Z} a unei funcții analogice

Transformata \mathcal{Z} a unei funcții analogice $f(t)$ poate fi calculată *direct*, cu relația de definiție (15), sau *indirect*, pe baza transformatei Laplace $F(s)$ a funcției $f(t)$.

Metoda directă. Pentru $|z| > 1$, avem

$$\mathcal{Z}[1(t)] = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

și

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[t] &= 0 + Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \dots = Tz^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) + Tz^{-2}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) + \\ &+ Tz^{-3}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) + \dots = Tz^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots)^2 = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}, \end{aligned}$$

iar pentru $|z| > e^{-aT}$ rezultă

$$\mathcal{Z}[e^{-at}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kaT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{aT} z)^{-k} = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}.$$

Prin urmare, avem

$$\mathcal{Z}[1(t)] = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad \mathcal{Z}\left[\frac{t}{T}\right] = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}, \quad \mathcal{Z}[e^{-at}] = \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}. \quad (33)$$

Ultimele două relatii (33) pot fi aduse usor la forma

$$\mathcal{Z}\left[\frac{t}{T} + 1\right] = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}, \quad \mathcal{Z}\left[\alpha^{\frac{t}{T}}\right] = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}. \quad (34)$$

De remarcat faptul că transformata \mathcal{Z} a funcției rampă poate fi obținută din transformata \mathcal{Z} a funcției treaptă pe baza proprietății derivării în complex (22).

Metoda indirectă. În general, dacă transformata Laplace $F(s)$ a funcției $f(t)$ este o rațională strict proprie și are polii s_1, s_2, \dots, s_n , atunci transformata \mathcal{Z} a funcției $f(t)$ poate fi calculată cu formula³

$$F(z) = \sum_{k=1}^n \operatorname{rez} \frac{F(s)}{1-e^{Ts}z^{-1}} \Big|_{s=s_k}. \quad (35)$$

Într-adevăr, din $F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$ și $f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\sigma)e^{kT\sigma} d\sigma$ rezultă

$$F^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\sigma)e^{kT\sigma} e^{-kTs} d\sigma = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\sigma) \left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{kT(\sigma-s)} \right] d\sigma = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{F(\sigma)}{1-e^{T(\sigma-s)}} ds,$$

deci

$$F^*(s) = \sum_{k=1}^n \operatorname{rez} \frac{F(\sigma)}{1-e^{T\sigma}e^{-Ts}} \Big|_{\sigma=s_k}, \quad F(z) = F^*(s) \Big|_{e^{Ts}=z} = \sum_{k=1}^n \operatorname{rez} \frac{F(\sigma)}{1-e^{T\sigma}z^{-1}} \Big|_{\sigma=s_k}.$$

În cazul funcției $f(t) = e^{-at} \sin bt$, cu transformata Laplace $F(s) = \frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$, avem

$$\begin{aligned} F(z) &= \mathcal{Z}[F(s)] = \operatorname{rez} \left[\frac{1}{1-e^{Ts}z^{-1}} \right] \Big|_{s=-a+bj} + \operatorname{rez} \left[\frac{F(s)}{1-e^{Ts}z^{-1}} \right] \Big|_{s=-a-bj} = \\ &= \frac{b}{s+a+bj} \cdot \frac{1}{1-e^{Ts}z^{-1}} + \frac{b}{s+a-bj} \cdot \frac{1}{1-e^{Ts}z^{-1}} \Big|_{s=-a-bj} = \end{aligned}$$

³ Reziduul funcției $F(s)$ relativ la polul p cu ordinul de multiplicitate m , este dat de relația

$$\operatorname{rez} F(s) \Big|_{s=p} = \frac{1}{(m-1)!} [(s-p)^m F(s)]^{(m-1)} \Big|_{s=p}.$$

$$= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{1 - e^{(-a+bj)T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-(a+bj)T} z^{-1}} \right],$$

de unde, cu substitutia $e^{-aT} = \alpha$, rezultă

$$Z[e^{-at} \sin bt] = Z\left[\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}\right] = \frac{(\alpha \sin bT)z^{-1}}{1 - 2(\alpha \cos bT)z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}}. \quad (36)$$

Procedând similar, obținem

$$Z[e^{-at} \cos bt] = Z\left[\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}\right] = \frac{1 - (\alpha \cos bT)z^{-1}}{1 - 2(\alpha \cos bT)z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}}. \quad (37)$$

De asemenea, pe baza relației (35) pot fi obținute imediat relațiile (33).

Observatie. Relațiile (36) și (37) pot fi obținute, mai simplu, plecând de la relația

$$Z[e^{(-a+jb)t}] = \frac{1}{1 - e^{(-a+bj)T} z^{-1}},$$

scrisă pe baza ultimei relații (33), și ținând seama că

$$e^{(-a+jb)t} = e^{-at}(\cos bt + j \sin bt).$$

4.3.2. Transformarea inversă Z^{-1}

Fiind dată transformata Z directă $F(z)$, prin transformarea inversă Z^{-1} se obține funcția discretă $f^0(t) = \{kT\}_{k \in \mathbb{N}}$. Transformarea inversă se poate realiza prin metoda dezvoltării în fracții simple, prin metoda formulei de inversiune sau prin metoda seriilor de puteri.

Metoda dezvoltării în fracții simple este similară celei de la transformarea Laplace. De exemplu, funcția

$$F(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})}, \quad a \neq b$$

se descompune în fracții simple sub forma

$$F(z) = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} - \frac{1}{1 - bz^{-1}} \right),$$

iar din (34) rezultă

$$f^0(t) = \frac{1}{a-b} (a^{\frac{t}{T}} - b^{\frac{t}{T}}), \quad f(kT) = \frac{1}{a-b} (a^k - b^k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Să considerăm acum funcția

$$G(z) = \frac{z^{-p}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}, \quad p \in \mathbf{N}, \quad a \neq b.$$

Deoarece $G(z)=z^{-(p-1)}F(z)$, din proprietatea deplasării în real rezultă $g^0(t)=f^0(t-(p-1)T)$, deci

$$g(kT) = \frac{1}{a-b} (a^{k-p+1} - b^{k-p+1}), \quad k \in \mathbf{N}.$$

Metoda formulei de inversiune

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} z^{k-1} F(z) dz, \quad (38)$$

unde γ este un cerc ce conține totii polii funcției $z^{k-1}F(z)$, permite determinarea valorii $f(kT)$ cu *relatia practică*

$$f(kT) = \sum_{i=1}^n \operatorname{rez} [z^{k-1}F(z)] \Big|_{z=z_i}, \quad (39)$$

unde z_1, z_2, \dots, z_n sunt polii funcției $z^{k-1}F(z)$. De exemplu, în cazul funcției anterioare $F(z)$, rezultă

$$f(kT) = \operatorname{rez} \frac{z^k}{(z-a)(z-b)} \Big|_{z=a} + \operatorname{rez} \frac{z^k}{(z-a)(z-b)} \Big|_{z=b} = \frac{a^k}{a-b} + \frac{b^k}{b-a} = \frac{a^k - b^k}{a-b}.$$

Metoda seriilor de puteri presupune aducerea funcției $F(z)$ la forma

$$F(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_r z^{-r}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (40)$$

și efectuarea împărțirii, în vederea dezvoltării lui $F(z)$ în serie de puteri negative, adică

$$F(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots \quad (41)$$

În conformitate cu (15), rezultă $f(kT)=c_k, \quad k \in \mathbf{N}$.

4.3.4. Funcția de transfer în z

Prin definiție, *funcția de transfer* $H(z)$ a unui sistem liniar monovariabil este transformata Z a funcției pondere $h(t)$ a sistemului.

Reamintim că la sistemele cu intrarea de timp continuu, funcția pondere este răspunsul forțat la intrarea impuls Dirac $\delta(t)$, iar la sistemele cu intrarea de timp discret, funcția pondere este răspunsul forțat la intrarea impuls unitar $\delta^0(t) = \{1, 0, 0, \dots\}$.

Dacă la intrarea convertorului discret-analogic C_{D-A} din figura 4.3, alcătuit din modulatorul M și extrapolatorul EX , se aplică un semnal de tip impuls unitar, adică $f^0(t) = \delta^0(t)$, atunci la ieșirea modulatorului se obține un semnal de tip impuls Dirac, adică $f^*(t) = \delta(t)$.

Deoarece $Z[f^*(t)] = 1$, rezultă că *modulatorul are funcția de transfer în z egală cu 1*. Mai departe, din faptul că funcția pondere a extrapolatorului coincide cu funcția pondere a convertorului discret-analogic, rezultă că *extrapolatorul și convertorul au aceeași funcție de transfer în z* . Vom arăta că *extrapolatorul și convertorul discret-analogic de ordinul zero sau unu au funcția de transfer în z egală cu 1*, iar convertorul discret-analogic și extrapolatorul cu întârziere T au funcția de transfer egală cu z^{-1} . Astfel, în cazul extrapolatorului de ordinul zero, avem

$$H_0(z) = Z[h_0(t)] = Z[1(t) - 1(t-T)] = (1-z^{-1})Z[1(t)] = 1,$$

iar în cazul extrapolatorului cu întârziere T , avem

$$\begin{aligned} H_T(z) &= Z[h_T(t)] = Z\left[\frac{t}{T} 1(t) - 2\frac{t-T}{T} 1(t-T) + \frac{t-2T}{T} 1(t-2T)\right] = \\ &= (1-2z^{-1}+z^{-2}) Z\left[\frac{t}{T} 1(t)\right] = (1-z^{-1})^2 \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = z^{-1}. \end{aligned}$$

Convertorului analogic-discret nu i se poate asocia o funcție de transfer în z deoarece nu admite aplicarea la intrare a semnalului de tip Dirac.

Tinând seama că transformata Laplace a funcției pondere $h(t)$ a unui sistem cu timp continuu este chiar funcția de transfer $H(s)$ a sistemului, avem

$$H(z) \stackrel{\Delta}{=} Z[h(t)] \stackrel{abz}{=} Z[H(s)], \quad (42)$$

iar din relația (35) rezultă că funcția de transfer în z a unui sistem cu funcția de transfer $H(s)$ *strict proprie* poate fi calculată cu formula

$$H(z) = \sum_{k=1}^n \operatorname{rez} \frac{H(s)}{1 - e^{Ts} z^{-1}} \Big|_{s=s_k}, \quad (43)$$

unde s_1, s_2, \dots, s_n sunt polii lui $H(s)$.

Relația (43) evidențiază faptul că polului s_k al funcției de transfer $H(s)$ îi corespunde polul $z_k = e^{Ts_k}$ al funcției de transfer $H(z)$. Cu excepția polului $z=1$ asociat polului $s=0$, ceilalți poli ai funcției $H(z)$ sunt dependenți de perioada de esantionare T .

Aplicând relația (43) sau tinând seama de (33), (36) și (37), rezultă corespondența

$$H(s) = \frac{1}{s} \quad \leftrightarrow \quad H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad (44)$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2} \quad \leftrightarrow \quad H(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}, \quad (45)$$

$$H(s) = \frac{1}{s+a} \leftrightarrow H(z) = \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}, \quad (46)$$

$$H(s) = \frac{b}{(s+a)^2+b^2} \leftrightarrow H(z) = \frac{(\alpha \sin bT)z^{-1}}{1-2(\alpha \cos bT)z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}}, \quad (47)$$

$$H(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2} \leftrightarrow H(z) = \frac{1-(\alpha \cos bT)z^{-1}}{1-2(\alpha \cos bT)z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}}. \quad (48)$$

unde $\alpha = e^{-aT}$.

Un sistem de *tip integral* are functia de transfer în z caracterizată prin polul $z=1$, iar un sistem cu timp mort multiplu de T ($\tau=qT$) are functia de transfer în z

$$H_m(z) = z^{-q} H(z), \quad (49)$$

unde $H(z)$ este functia de transfer a sistemului considerat însă fără timp mort.

Considerând că la intrarea unui *sistem liniar cu intrarea de timp continuu* se aplică semnalul distributie

$$u^*(t) = u(0)\delta(t) + u(1)\delta(t-1) + u(2)\delta(t-2) + \dots, \quad (50)$$

(cu perioada de esantionare $T=1$), în conformitate cu principiul superpoziției rezultă că valoarea ieșirii forțate y la momentul k este egală de suma efectelor impulsurilor Dirac aplicate la momentele anterioare, adică

$$y(k) = u(0)h(k) + u(1)h(k-1) + \dots + u(k)h(0) = \sum_{i=0}^k h(k-i)u(i), \quad (51)$$

unde h reprezintă functia pondere a sistemului. Relatia (51) este similară *relatiei de convolutie a sistemelor liniare cu intrarea de timp discret*. Ținând seama de acest lucru, din proprietatea (25) a produsului de convolutie obținem *teorema funcției de transfer în z* :

In cazul unui sistem liniar cu intrarea $u(t)$ de tip discret sau de tip distributie, functia de transfer în z a sistemului este egală cu raportul dintre transformata Z a ieșirii forțate $y(t)$ și transformata Z a intrării $u(t)$, adică

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}. \quad (52)$$

Deși relatia $Y(z)=H(z)U(z)$ nu este valabilă pentru sistemele cu intrarea de tip analogic, determinarea funcției de transfer este utilă și la aceste sisteme, în calculul răspunsului pondere (la impuls Dirac), în studiul stabilității etc.

Relatia (52) confirmă faptul că functia de transfer în z a convertorului discret-analogic (de ordinul zero sau unu) este egală cu 1. Într-adevăr, deoarece la orice moment de timp $t_k=kT$, $k \in \mathbb{N}$, ieșirea y este egală cu intrarea u , rezultă $Y(z)=U(z)$ și deci $H(z)=1$.

În cazul unui *sistem discret* cu modelul I-E sub forma ecuației cu diferențe

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_r u(k-r), \quad (53)$$

aplicând transformarea \mathcal{Z} ambilor membri si utilizând proprietatea de liniaritate si proprietatea deplasării în real, obținem funcția de transfer

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_r z^{-r}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}. \quad (54)$$

În mod similar, pentru sistemul discret cu *modelul I-S-E*

$$X(t+1) = AX(t) + BU(t), \quad Y(t) = CX(t) + DU(t) \quad (55)$$

rezultă funcția de transfer

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D. \quad (56)$$

4.3.5. Funcția de transfer a sistemului discretizat

Discretizatul de ordinul zero Σ^0 al sistemului continuu Σ are funcția de transfer⁴ în z

$$H^0(z) = \overline{HH_0}(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right], \quad (57)$$

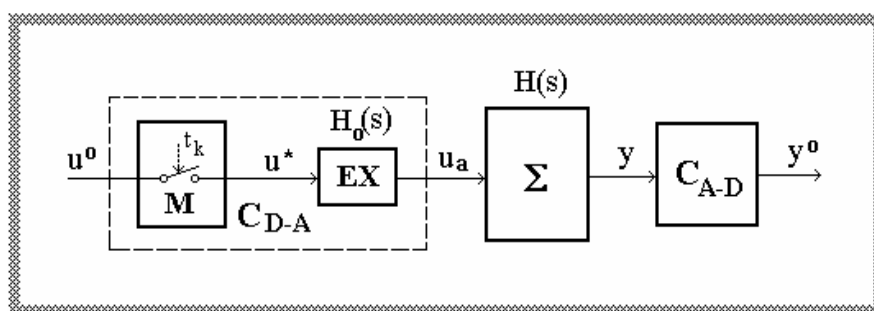
unde $H(s)$ este funcția de transfer a sistemului Σ , iar $H_0(s)$ funcția de transfer a extrapolatorului de ordinul zero. Într-adevăr, având în vedere că Σ^0 se obține prin încadrarea lui Σ între un convertor discret-analogic de ordinul zero si un convertor analogic-discret (fig. 4.7), prin aplicarea la intrarea lui Σ^0 a semnalului impuls unitar $u^0(t) = \delta^0(t)$ obținem $u^*(t) = \delta(t)$ si $u_a(t) = h_0(t)$, deci $Y(s) = H(s)U_a(s) = H(s)H_0(s)$ si, prin urmare, $Y^0(z) = Y(z) = \mathcal{Z}[Y(s)] = \mathcal{Z}[H(s)H_0(s)]$.

Expresia funcției de transfer a discretizatului Σ^0 al sistemului continuu Σ se poate obține, indirect, ținând seama de faptul că *funcțiile indiciale ale celor două sisteme sunt echivalente*. Astfel, notând cele două funcții indiciale cu $g^0(t)$ si $g(t)$, avem:

$$H^0(z) = \mathcal{Z}[h^0(t)] = \mathcal{Z}[g^0(t) - g^0(t-T)] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[g^0(t)] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[g(t)] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right].$$

De asemenea, considerând $u^0(t) = 1^0(t)$, avem $U^0(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$ si $Y^0(z) = \mathcal{Z}[g^0(t)] = \mathcal{Z}[g(t)] = \mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right]$, iar din relația $Y^0(z) = H^0(z)U^0(z)$ rezultă imediat (57).

⁴ În cazul unui sistem continuu cu intrarea $U(s)$, ieșirea $Y(s)$ si funcția de transfer $H(s)$, din relațiile $Y(z) = \overline{HU}(z)$ si $H^0(z) = \overline{HH_0}(z)$ rezultă că funcția de transfer a discretizatului de ordinul zero se obține prin înlocuirea lui U cu H_0 în expresia care exprimă dependența în z dintre ieșirea Y si intrarea U . Această observație rămâne valabilă si în cazul sistemelor esantionate cu intrare de timp continuu.

Fig. 4.7. Schema echivalentă a discretizatului sistemului continuu Σ

În continuare sunt prezentate funcțiile de transfer în z ale discretizatorilor unor sisteme uzuale:

$$H(s) = \frac{1}{Ts} \quad \Leftrightarrow \quad H^0(z) = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}, \quad H^0(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}^5, \quad (58)$$

$$H(s) = \frac{1}{T^2 s^2} \quad \Leftrightarrow \quad H^0(z) = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{2(1-z^{-1})^2}, \quad H^0(z) = \frac{1+z^{-1}}{2(1-z^{-1})^2}, \quad (59)$$

$$H(s) = \frac{1}{T_1 s + 1} \quad \Leftrightarrow \quad H^0(z) = \frac{(1-p)z^{-1}}{1-pz^{-1}}, \quad (60)$$

$$H(s) = \frac{\tau_1 s + 1}{T_1 s + 1} \quad \Leftrightarrow \quad H^0(z) = \frac{\frac{\tau_1}{T_1} + (1 - \frac{\tau_1}{T_1} - p)z^{-1}}{1-pz^{-1}}, \quad (61)$$

$$H(s) = \frac{T_d s}{T_1 s + 1} \quad \Leftrightarrow \quad H^0(z) = \frac{T_d}{T_1} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1-pz^{-1}}, \quad (62)$$

$$H(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad H^0(z) = \frac{(1-p)z^{-1}}{1-pz^{-1}} - \frac{T}{T_1} \cdot \frac{pz^{-1}(1-z^{-1})}{(1-pz^{-1})^2}, \quad (63)$$

unde $p = e^{-\frac{T}{T_1}}$. Funcției de transfer

$$H(s) = \frac{1}{T_1 s(T_1 s + 1)} = \frac{1}{T_1 s} - \frac{1}{T_1 s + 1} \quad (64)$$

îi corespunde

$$H^0(z) = \frac{T}{T_1} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{(1-p)z^{-1}}{1-pz^{-1}}, \quad (65)$$

funcției de transfer

$$H(s) = \frac{T_i s + 1}{T_i s} \cdot \frac{T_d s + 1}{T_1 s + 1} = (1 + \frac{T_d - T_1}{T_i}) + \frac{1}{T_i s} + (\frac{T_d}{T_1} - 1)(1 - \frac{T_1}{T_i}) \cdot \frac{T_1 s}{T_1 s + 1} \quad (66)$$

îi corespunde

⁵ În majoritatea aplicațiilor practice, în locul ecuației cu timp discret de tip integral $y_k = y_{k-1} + T u_{k-1}$ este preferată ecuația $y_k = y_{k-1} + T u_k$.

$$H^0(z) = \left(1 + \frac{T_d - T_1}{T_i}\right) + \frac{T}{T_i} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} + \left(\frac{T_d}{T_1} - 1\right) \left(1 - \frac{T_1}{T_i}\right) \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 - pz^{-1}}, \quad (67)$$

iar funcției de transfer

$$H(s) = \frac{\tau s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} \cdot \frac{1}{T_1 s + 1} + \frac{T_2 - \tau}{T_2 - T_1} \cdot \frac{1}{T_2 s + 1} \quad (68)$$

îi corespunde

$$H^0(z) = \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} \cdot \frac{(1 - p)z^{-1}}{1 - pz^{-1}} + \frac{T_2 - \tau}{T_2 - T_1} \cdot \frac{(1 - q)z^{-1}}{1 - qz^{-1}}, \quad (69)$$

unde $q = e^{-\frac{T}{T_2}}$. De asemenea, are loc corespondenta

$$H(s) = \frac{\tau_1 s + 1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \leftrightarrow H^0(z) = \frac{(1 - a\delta - a\cos\alpha)z^{-1} + a(a + \delta - \cos\alpha)z^{-2}}{1 - 2(a\cos\alpha)z^{-1} + a^2z^{-2}}. \quad (70)$$

unde $a = e^{-\frac{\xi T}{\tau}}$, $\alpha = \frac{T}{\tau} \sqrt{1 - \xi^2}$, $\delta = \frac{T}{\tau} \left(\xi - \frac{\tau_1}{\tau}\right) \frac{\sin\alpha}{\alpha}$, $0 \leq \xi \leq 1$.

Discretizatul de ordinul unu, realizat prin conectarea la intrarea sistemului Σ a unui convertor discret-analogic de ordinul unu, are funcția de transfer

$$H^1(z) = \overline{HH_1}(z) = (1 - z^{-1})^2 \mathcal{Z} \left[\frac{Ts + 1}{Ts^2} H(s) \right]. \quad (71)$$

Discretizatul cu întârziere T , realizat prin conectarea la intrarea sistemului Σ a unui convertor discret-analogic cu întârziere T , are funcția de transfer

$$H^T(z) = \overline{HH_T}(z) = (1 - z^{-1})^2 \mathcal{Z} \left[\frac{H(s)}{Ts^2} \right]. \quad (72)$$

Din (57), (71) și (72) reiese faptul că între polul s_k al funcției de transfer $H(s)$ și polul asociat z_k al funcției de transfer $H(z)$ există relația $z_k = e^{Ts_k}$. Cu excepția polului $z=1$ (asociat polului $s=0$), ceilalți poli ai funcției $H(z)$ sunt dependenți de perioada de esantionare T .

■ În **MATLAB**, pentru calculul și reprezentarea grafică a răspunsului unui sistem discret respectiv la intrările $U=[1 \ 1 \ \dots \ 1]$, $U=[1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$ și $U=[U_0 \ U_1 \ \dots \ U_{N-1}]$, există funcțiile:

- function $[Y,X] = \mathbf{dstep}(\text{num}, \text{den}, N)$;
- function $[Y,X] = \mathbf{dimpulse}(\text{num}, \text{den}, N)$;
- function $[Y,X] = \mathbf{dlsim}(\text{num}, \text{den}, U)$.

Argumentul de intrare N (optional) reprezintă numărul de puncte luate în considerare, iar argumentul de intrare U al funcției \mathbf{dlsim} este vectorul linie al unei secvențe de valori de intrare alese. Argumentele de intrare num și den sunt vectori linie având ca elemente coeficienții de la numărătorul și numitorul funcției de transfer în z . În cazul funcției de transfer (54), cu $r \leq n$, avem $\text{num}=[b_0 \ b_1 \ \dots \ b_r]$ și $\text{den}=[a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n]$. În cazul $r > n$, vectorul den se scrie sub forma $\text{den}=[a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n \ 0 \ \dots \ 0]$, astfel încât să aibă aceeași dimensiune (r) ca num .

Argumentele Y și X exprimă secvențele de valori ale ieșirii și, respectiv, stării sistemului. Vectorul Y are N elemente, iar matricea X are N linii și n coloane, unde n este numărul variabilelor de stare.

Funcția *dimpulse* calculează funcția pondere a sistemului, adică transformata inversă a funcției de transfer $H(z)$.

Remarcă. Funcțiile *dstep*, *dimpulse* și *dlsim* permit, de asemenea, calculul răspunsului unui sistem esantionat Σ cu *mărimea de intrare de tip analogic*, respectiv la intrare tip treaptă unitară, tip impuls unitar și tip scară. În acest caz, argumentele de intrare *num* și *den* trebuie să conțină coeficienții de la numărătorul și numitorul funcției de transfer $H^0(z)$ a discretizatului sistemului Σ . Modelul discretizatului de ordinul zero ('zoh') al unui sistem cu timp continuu Σ se obține cu funcția

$$\bullet [\text{numd}, \text{dend}] = \text{c2dm}(\text{num}, \text{den}, T, 'zoh'),$$

unde *num* și *den* sunt vectorii linie ai coeficienților polinoamelor de la numărătorul și numitorul funcției de transfer în s a sistemului Σ , T este perioada de esantionare, iar *numd* și *dend* sunt vectorii linie ai coeficienților polinoamelor de la numărătorul și numitorul funcției de transfer în z a sistemului discretizat.

Răspunsul indicial al sistemului Σ poate fi calculat și cu funcția *dimpulse*, dacă argumentele de intrare *num* și *den* sunt asociate ieșirii $Y(z) = \overline{HU}(z)$ corespunzătoare intrării $U(s) = 1/s$.

4.3.6. Funcția de transfer a regulatorului numeric PID

Mai întâi vom determina ecuația regulatorului numeric PID printr-o metodă directă de discretizare a algoritmului de reglare continuă PID, cu forma idealizată cunoscută

$$c = K_p \left[e + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de}{dt} \right] + c_0,$$

Pentru $t=kT$ și $t=(k-1)T$, $k \in \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned} c_k &= K_p \left[e_k + \frac{1}{T_i} \int_0^{kT} e(\tau) d\tau + T_d \dot{e}_k \right] + c_0, \\ c_{k-1} &= K_p \left[e_{k-1} + \frac{1}{T_i} \int_0^{(k-1)T} e(\tau) d\tau + T_d \dot{e}_{k-1} \right] + c_0, \end{aligned}$$

unde $c_i = c(iT)$, $e_i = e(iT)$, $\dot{e}_i = \dot{e}(iT)$, $i \in \mathbb{N}$. Din cele două relații rezultă

$$c_k = c_{k-1} + K_p \left[e_k - e_{k-1} + \frac{1}{T_i} \int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt + T_d (\dot{e}_k - \dot{e}_{k-1}) \right]. \quad (73)$$

Presupunând $\int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt \cong T e_k$, $\dot{e}_k = (e_k - e_{k-1})/T$ și $\dot{e}_{k-1} = (e_{k-1} - e_{k-2})/T$, obținem următoarea formă recursivă a algoritmului numeric PID:

$$c_k = c_{k-1} + K_p (b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + b_2 e_{k-2}), \quad (74)$$

unde

$$b_0 = 1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T}, \quad b_1 = -(1 + \frac{2T_d}{T}), \quad b_2 = \frac{T_d}{T}. \quad (75)$$

Din (74) rezultă că regulatorul numeric cu algoritmul de reglare obținut prin discretizarea algoritmului continuu de reglare PID are funcția de transfer

$$H_{PID}(z) = \frac{K_p(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})}{1 - z^{-1}}. \quad (76)$$

În continuare vom determina funcția de transfer $H_{PID}(z)$ a regulatorului numeric, considerând că acesta este discretizatul regulatorului continuu cu funcția de transfer în s

$$H_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T_1 s + 1} \right), \quad (77)$$

unde T_d reprezintă constanta de timp derivativă, iar T_1 constanta de timp de întârziere a componentei derivate (de circa 3 ... 8 ori mai mică decât T_d). Avem

$$H_{PID}(z) = K_p \left(1 + k_i \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} + k_d \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 - p_d z^{-1}} \right), \quad (78)$$

unde $k_i = \frac{T}{T_i}$, $k_d = \frac{T_d}{T_1}$, $p_d = e^{-\frac{T}{T_1}}$. Funcția de transfer a regulatorului numeric poate fi adusă sub formă

$$H_{PID}(z) = \frac{K_p(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \quad (79)$$

unde

$$a_1 = -1 - p_d, \quad a_2 = p_d, \quad b_0 = 1 + k_i + k_d, \quad b_1 = -1 - (k_i + 1)p_d - 2k_d, \quad b_2 = k_d + p_d. \quad (80)$$

În conformitate cu (78), modelul temporal al regulatorului poate fi scris astfel:

$$\begin{cases} P_k = P_{k-1} + K_p[(e_k - e_{k-1}) + k_i e_k] \\ D_k = p_d D_{k-1} + K_p k_d (e_k - e_{k-1}) \\ C_k = P_k + D_k \end{cases}, \quad (81)$$

În continuare, vom determina funcția de transfer în z a regulatorului numeric în ipoteza că acesta este discretizatul regulatorului continuu cu funcția de transfer

$$H_{PID}(s) = K_p \cdot \frac{T_i s + 1}{T_i s} \cdot \frac{T_d s + 1}{T_1 s + 1}. \quad (82)$$

Scriind funcția de transfer sub formă

$$H_{PID}(s) = K_p \left(\alpha + \frac{\beta}{T s} + \gamma \cdot \frac{T_d s}{T_1 s + 1} \right),$$

unde

$$\alpha = 1 + \frac{T_d - T_i}{T_i}, \quad \beta = \frac{T}{T_i}, \quad \gamma = \left(\frac{T_d}{T_i} - 1\right)\left(1 - \frac{T_i}{T_i}\right), \quad (83)$$

rezultă

$$H^o_{PID}(z) = K_p \left(\alpha + \beta \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} + \gamma \cdot \frac{1-z^{-1}}{1-p_d z^{-1}} \right) = \frac{K_p (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \quad (84)$$

unde: $p_d = e^{-\frac{T}{T_i}}$, $a_1 = -1 - p_d$, $a_2 = p_d$, $b_0 = \alpha + \beta + \gamma$, $b_1 = -\alpha(1 + p_d) - \beta p_d - 2\gamma$, $b_2 = \alpha p_d + \gamma$.

Din (84) rezultă pentru regulator următorul model temporal:

$$\begin{cases} P_k = P_{k-1} + K_p [\alpha (e_k - e_{k-1}) + \beta e_k] \\ D_k = p_d D_{k-1} + K_p \gamma (e_k - e_{k-1}) \\ C_k = P_k + D_k \end{cases} \quad (85)$$

4.4. SISTEME ESANTIONATE DESCHISE

Să considerăm sistemul deschis din figura 4.8 cu intrarea u analogică și intrarea v^0 numerică. Din relațiile

$$Y(s) = H_3(s)H_0(s)W^*(s), \quad Y(z) = \overline{H_3 H_0}(z) \cdot W(z), \quad (86)$$

$$U_1(s) = H_1(s)U(s), \quad U_1(z) = \overline{H_1}U(z), \quad (87)$$

$$W(z) = V_1(z) + U_2(z), \quad W(z) = H_4(z)V(z) + H_2(z)U_1(z), \quad (88)$$

se obține următoarea relație de corelație intrare-iesire:

$$Y(z) = \overline{H_3 H_0}(z) \cdot H_4(z) \cdot V(z) + \overline{H_3 H_0}(z) \cdot H_2(z) \cdot \overline{H_1}U(z). \quad (89)$$

Din (89) rezultă că pe canalul intrare numerică v^0 – ieșire analogică y , sistemul are funcția de transfer în z

$$H_{yv}(z) = \overline{H_3 H_0}(z) \cdot H_4(z). \quad (90)$$

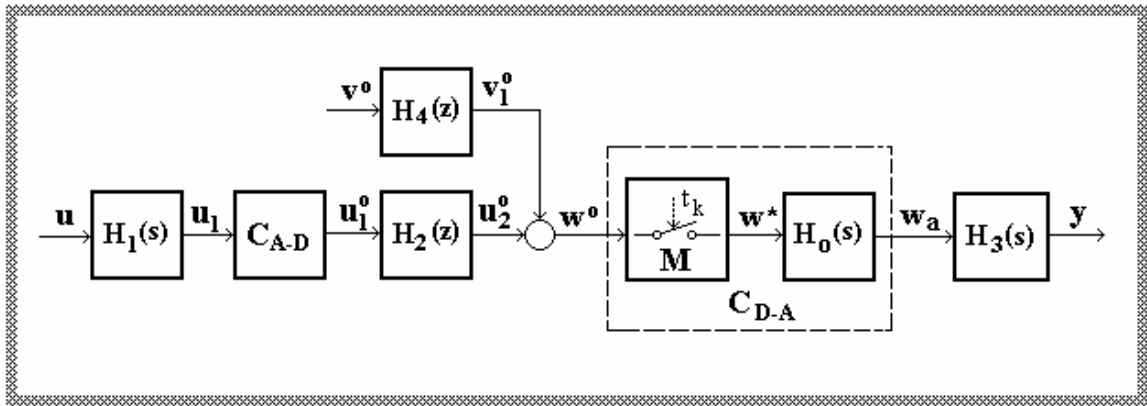


Fig. 4.8. Sistem esantionat deschis cu intrare de timp continuu

Dacă la intrarea analogică a sistemului se aplică un semnal tip impuls Dirac, adică $u(t)=\delta(t)$, atunci

$$\overline{H_1 U}(z) = \mathcal{Z}[H_1(s)U(s)] = \mathcal{Z}[H_1(s)] = H_1(z),$$

iar din (89) obținem transformata \mathcal{Z} a răspunsului pondere al sistemului, adică funcția de transfer $H_{yu}(z)$, sub forma

$$H_{yu}(z) = \overline{H_3 H_0}(z) \cdot H_2(z) \cdot H_1(z). \quad (91)$$

În general, funcția de transfer a unui sistem esantionat cu intrarea $u(t)$ analogică se obține prin înlocuirea lui U cu 1 în relația în z intrare-iesire. Operația inversă, de obținere a relației intrare-iesire a sistemului pe baza funcției de transfer în z , nu este însă posibilă.

Pentru $U(s)=\frac{1}{s}$, din (89) se obține transformata \mathcal{Z} a răspunsului indicial al sistemului, sub forma

$$Y(z) = (1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{H_3(s)}{s}\right] \cdot H_2(z) \cdot \mathcal{Z}\left[\frac{H_1(s)}{s}\right]. \quad (92)$$

Tot din (89), prin înlocuirea lui U cu H_0 , obținem funcția de transfer a discretizatului de ordinul zero al sistemului esantionat cu intrarea analogică u și ieșirea y , sub forma

$$H_{yu}^0(z) = \overline{H_3 H_0}(z) \cdot H_2(z) \cdot \overline{H_1 H_0}(z) = (1-z^{-1})^2 \cdot \mathcal{Z}\left[\frac{H_3(s)}{s}\right] \cdot H_2(z) \cdot \mathcal{Z}\left[\frac{H_1(s)}{s}\right]. \quad (93)$$

♦ **Aplicatia 4.1.** Fie sistemul esantionat din figura 4.8, caracterizat prin

$$H_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}, \quad H_2(z) = k_2, \quad H_3(s) = \frac{k_3}{T_3 s + 1}.$$

- Să se afle răspunsul indicial al sistemului pentru $u=1(t)$;
- Să se afle funcția de transfer $H_{yu}^0(z)$ a discretizatului sistemului.

Răspuns. a) În conformitate cu relația (92), calculăm

$$\mathcal{Z}\left[\frac{H_1(s)}{s}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{k_1}{s(T_1s+1)}\right] = k_1 \mathcal{Z}\left(\frac{1}{s} - \frac{T_1}{T_1s+1}\right) = k_1\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-p_1z^{-1}}\right) = \frac{k_1(1-p_1)z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-p_1z^{-1})}$$

si, similar

$$\mathcal{Z}\left[\frac{H_3(s)}{s}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{k_3}{s(T_3s+1)}\right] = \frac{k_3(1-p_3)z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-p_3z^{-1})},$$

unde $p_1 = e^{-\frac{T}{T_1}}$, $p_3 = e^{-\frac{T}{T_3}}$. Rezultă

$$Y(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{H_3(s)}{s}\right] \cdot H_2(z) \cdot \mathcal{Z}\left[\frac{H_1(s)}{s}\right] = \frac{k_1k_2k_3(1-p_1)(1-p_3)z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-p_1z^{-1})(1-p_3z^{-1})},$$

iar în urma descompunerii în fracții simple se obține

$$Y(z) = k_1k_2k_3\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1-p_3}{p_1-p_3} \cdot \frac{1}{1-p_1z^{-1}} - \frac{1-p_1}{p_3-p_1} \cdot \frac{1}{1-p_3z^{-1}}\right).$$

Prin urmare

$$y(kT) = k_1k_2k_3\left(1 - \frac{1-p_3}{p_1-p_3} \cdot p_1^k - \frac{1-p_1}{p_3-p_1} \cdot p_3^k\right).$$

b) Comparând (92) și (93), rezultă

$$H_{yu}^0(z) = (1-z^{-1})Y(z) = \frac{k_1k_2k_3(1-p_1)(1-p_3)z^{-2}}{(1-p_1z^{-1})(1-p_3z^{-1})}.$$

♦ **Aplicatia 4.2.** Pentru $v^0 = 1^0(t)$, să se afle răspunsul (indicial) al sistemului esantionat din figura 4.8, știind că

$$(\Sigma_4) \quad v_1(kT) + av_1((k-1)T) = bv((k-1)T)$$

$$(\Sigma_3) \quad T_3 \dot{y}(t) + y(t) = k_3w_a(t-mT), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Răspuns. Avem

$$H_4(z) = \frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}}$$

și

$$H_3(s) = \frac{k_3e^{-mTs}}{T_3s+1},$$

$$\overline{H_3H_0}(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{k_3e^{-mTs}}{s(T_3s+1)}\right] = k_3(1-z^{-1})z^{-m}\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(T_3s+1)}\right] = \frac{k_3(1-p_3)z^{-m-1}}{1-p_3z^{-1}},$$

unde $p_3 = e^{-\frac{T}{T_3}}$. În conformitate cu (89), obținem

$$\begin{aligned} Y(z) &= \overline{H_3H_0}(z) \cdot H_4(z) \cdot V(z) = \frac{k_3(1-p_3)z^{-m-1}}{1-p_3z^{-1}} \cdot \frac{bz^{-1}}{1+az^{-1}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = \\ &= \frac{bk_3z^{-m}}{1+a} \left(\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1-p_3}{a+p_3} \cdot \frac{1}{1+az^{-1}} - \frac{1+a}{a+p_3} \cdot \frac{1}{1-p_3z^{-1}} \right), \end{aligned}$$

deci

$$y(kT) = \frac{bk_3}{1+a} \left[1 + \frac{1-p_3}{a+p_3} \cdot (-a)^{k-m} - \frac{1+a}{a+p_3} \cdot p_3^{k-m} \right] \cdot 1(k-m) .$$

4.5. SISTEME DE REGLARE CU ESANTIONARE

Să considerăm sistemul de reglare cu **măsurare esantionată** din figura 4.1, în ipoteza că timpul mort de întârziere coincide cu perioada de esantionare, adică $\tau = T$. Avem

$$Y(s) = V(s) + H_P(s)H_E(s)H_R(s)[I(s) - H_0(s)W^*(s)] ,$$

iar prin aplicarea transformării \mathcal{Z} , obținem

$$Y(z) = V(z) + \overline{H_P H_E H_R} I(z) - \overline{H_P H_E H_R H_0}(z) \cdot W(z) .$$

Tinând seama și de relația $W(z) = z^{-1} Y(z)$, rezultată din $W(s) = e^{-Ts} Y(s)$, obținem

$$Y(z) = \frac{V(z)}{\mathcal{P}(z)} + \frac{\overline{H_P H_E H_R} I(z)}{\mathcal{P}(z)} . \quad (94)$$

unde

$$\mathcal{P}(z) = 1 + z^{-1} \overline{H_P H_E H_R H_0}(z) . \quad (95)$$

Mai departe, din (94) și din

$$E(z) = I(z) - M(z) = I(z) - H_0(z)W(z) = I(z) - W(z) = I(z) - z^{-1} Y(z) ,$$

rezultă

$$E(z) = I(z) - \frac{z^{-1} \overline{H_P H_E H_R} I(z)}{\mathcal{P}(z)} - \frac{z^{-1} V(z)}{\mathcal{P}(z)} . \quad (96)$$

Din (94) și (96), prin înlocuirea lui V cu 0 și a lui I cu 1, obținem

$$H_{yi}(z) = \frac{\overline{H_P H_E H_R}(z)}{\mathcal{P}(z)} , \quad H_{ei}(z) = 1 - \frac{z^{-1} \overline{H_P H_E H_R}(z)}{\mathcal{P}(z)} , \quad (97)$$

iar prin înlocuirea lui I cu 0 și a lui V cu 1, obținem

$$H_{yv}(z) = \frac{1}{\mathcal{P}(z)} , \quad H_{ev}(z) = \frac{-z^{-1}}{\mathcal{P}(z)} . \quad (98)$$

Pe baza relațiilor (94) și (96) putem determina funcțiile de transfer ale discretizatului sistemului de reglare. Astfel, prin înlocuirea lui V cu 0 și a lui I cu H_0 , obținem

$$H_{yi}^0(z) = \frac{\overline{H_P H_E H_R H_0}(z)}{\mathcal{P}(z)} , \quad H_{ei}^0(z) = \frac{1}{\mathcal{P}(z)} . \quad (99)$$

iar prin înlocuirea lui I cu 0 și a lui V cu H_0 , obținem

$$H_{yv}^0(z) = \frac{1}{\mathcal{P}(z)} , \quad H_{ev}^0(z) = \frac{-z^{-1}}{\mathcal{P}(z)} . \quad (100)$$

Considerăm acum **sistemul de reglare numeric** din figura 4.2. Din

$$E(z) = I(z) - Z[H_T(s)Y(s)] , \quad Y(s) = V(s) + H_p(s)H_E(s)H_0(s)C^*(s) ,$$

rezultă

$$E(z) = I(z) - \overline{H_T V(z)} - \overline{H_T H_P H_E H_0(z)} \cdot C(z) ,$$

Tinând seama de ecuația în z a regulatorului numeric,

$$C(z) = H_R(z) \cdot E(z) ,$$

obținem

$$E(z) = \frac{I(z)}{\mathcal{P}(z)} - \frac{\overline{H_T V(z)}}{\mathcal{P}(z)} , \quad (101)$$

unde

$$\mathcal{P}(z) = 1 + \overline{H_T H_P H_E H_0(z)} \cdot H_R(z) . \quad (102)$$

Mai departe, din (101) și din

$$Y(z) = V(z) + \overline{H_P H_E H_0(z)} \cdot C(z) = V(z) + \overline{H_P H_E H_0(z)} \cdot H_R(z) \cdot E(z) ,$$

rezultă

$$Y(z) = V(z) - \frac{\overline{H_P H_E H_0(z)} \cdot H_R(z) \cdot \overline{H_T V(z)}}{\mathcal{P}(z)} + \frac{\overline{H_P H_E H_0(z)} \cdot H_R(z) \cdot I(z)}{\mathcal{P}(z)} . \quad (103)$$

Din (101) și (103), prin înlocuirea lui V cu 0 și a lui I cu 1, obținem

$$H_{ei}(z) = \frac{1}{\mathcal{P}(z)} , \quad H_{yi}(z) = \frac{\overline{H_P H_E H_0(z)} \cdot H_R(z)}{\mathcal{P}(z)} , \quad (104)$$

iar prin înlocuirea lui I cu 0 și a lui V cu 1, obținem

$$H_{ev}(z) = \frac{-\overline{H_T(z)}}{\mathcal{P}(z)} , \quad H_{yv}(z) = 1 - \frac{\overline{H_P H_E H_0(z)} \cdot H_R(z) \cdot \overline{H_T(z)}}{\mathcal{P}(z)} . \quad (105)$$

Tot din (101) și (103), prin înlocuirea lui I cu 0 și a lui V cu H_0 , obținem funcțiile de transfer ale discretizatăului sistemului de reglare

$$H_{ev}^0(z) = \frac{-\overline{H_T H_0(z)}}{\mathcal{P}(z)} , \quad H_{yv}^0(z) = 1 - \frac{\overline{H_P H_E H_0(z)} \cdot H_R(z) \cdot \overline{H_T H_0(z)}}{\mathcal{P}(z)} . \quad (106)$$

■ In cele ce urmează este prezentat în **MATLAB** un program pentru calculul și reprezentarea grafică a răspunsului unui sistem de reglare numeric la referință treaptă și perturbare treaptă.

```
% function[] = stepsran(Kp,Ti,Td,T1,T,N)
```

```
% Reprezentarea grafică a funcțiilor indiciale ale unui SRA cu regulator numeric PID,
```

```
% format din regulator, proces (p), element de execuție (e) și traductor (t)
```

% T - perioada de esantionare, N – numarul perioadelor de esantionare

% Kp - factorul de proportionalitate al regulatorului, Ti - constanta de timp integrală a regulatorului

% Td - constanta de timp derivativă, T1 – constanta de timp de întârziere a componentei derivate

% Regulatorul are functia de transfer $H_I(z) = K_p \left(1 + \frac{k_i}{1-z^{-1}} + k_d \cdot \frac{1-z^{-1}}{1-p_d z^{-1}} \right)$, cu $k_i = \frac{T}{T_i}$, $k_d = \frac{T_d}{T_i}$, $p_d = e^{-\frac{T}{T_i}}$;

% este discretizatul regulatorului analogic cu functia de transfer $H_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T_i s + 1} \right)$.

```
function[]=stepsran(Kp,Ti,Td,T1,T,N)
t=0:1:N-1;
% Regulator
ki=T/Ti;
if T1==0, kd=10; pd=0;
else kd=Td/T1; pd=exp(-T/T1);
end
a1=-1-pd; a2=pd; b0=1+ki+kd; b1=-1-(ki+1)*pd-2*kd; b2=kd+pd;
nr=Kp*[b0 b1 b2]; dr=[1 a1 a2];
% Parametrii procesului: K, t1, t2 si tm (tm - timp mort)
K=1; t1=50; t2=20; tm=30;
np=K; dp=[t1*t2 t1+t2 1];
% Parametrii elementului de executie: Ke, Te
Ke=1; te=5;
ne=Ke; de=[te 1];
% Parametrii traductorului: Kt, Tt
Kt=1; tt=10;
nt=Kt; dt=[tt 1];
% Hp*He(s)
[ns,ds]=series(np,dp,ne,de);
% HpHeHo(z), inclusiv timpul mort
[n,d]=c2dm(ns,ds,T,'zoh');
zmort=zeros(1,tm/T);
n=[zmort n];
while length(d)< length(n), d=[d 0];
end;
% Ht*Hp*He(s)
[ns1,ds1]=series(nt,dt,ns,ds);
% HtHpHeHo(z), inclusiv timpul mort
[n1,d1]=c2dm(ns1,ds1,T,'zoh');
n1=[zmort n1];
while length(d1)< length(n1), d1=[d1 0];
end;
% Hr(z)*HtHpHeHo(z)
[n0,d0]=series(nr,dr,n1,d1);
% eroarea pentru referinta treapta unitara
[neror,deror]= feedback(1,1,n0,d0,-1);
[neror,deror]=minreal(neror,deror);
clg; hold on;
```

```

e=dstep(neror,deror,N); plot(t,e,'w');
% comanda pentru referinta treapta unitara
[ncom,dcom]= series(nr,dr,neror,deror);
[ncom,dcom]=minreal(ncom,dcom);
dstep(ncom,dcom,N);
% iesirea pentru referinta treapta unitara
[nies,dies]=series(n,d,ncom,dcom);
[nies,dies]=minreal(nies,dies);
m=dstep(nies,dies,N); plot(t,m,'c');
title('EROAREA-W, IESIREA-C, COMANDA-Y pentru I=1(t)');
grid; pause;

% HtHo(z)
[n2,d2]=c2dm(-nt,dt,T,'zoh');
% eroarea pentru perturbatie treapta unitara
[neror1,deror1]= series(n2,d2,neror,deror);
[neror1,deror1]=minreal(neror1,deror1);
clg; hold on;
e=dstep(neror1,deror1,N); plot(t,e,'w');
% comanda pentru perturbatie treapta unitara
[ncom1,dcom1]= series(nr,dr,neror1,deror1);
[ncom1,dcom1]=minreal(ncom1,dcom1);
dstep(ncom1,dcom1,N);
% iesirea pentru perturbatie treapta unitara
[nies1,dies1]=series(n,d,ncom1,dcom1);
[nies1,dies1]=parallel(1,1,nies1,dies1);
[nies1,dies1]=minreal(nies1,dies1);
m=dstep(nies1,dies1,N); plot(t,m,'c');
title('EROAREA-W, IESIREA-C, COMANDA-Y pentru V=1(t)');
grid;
hold off;

```

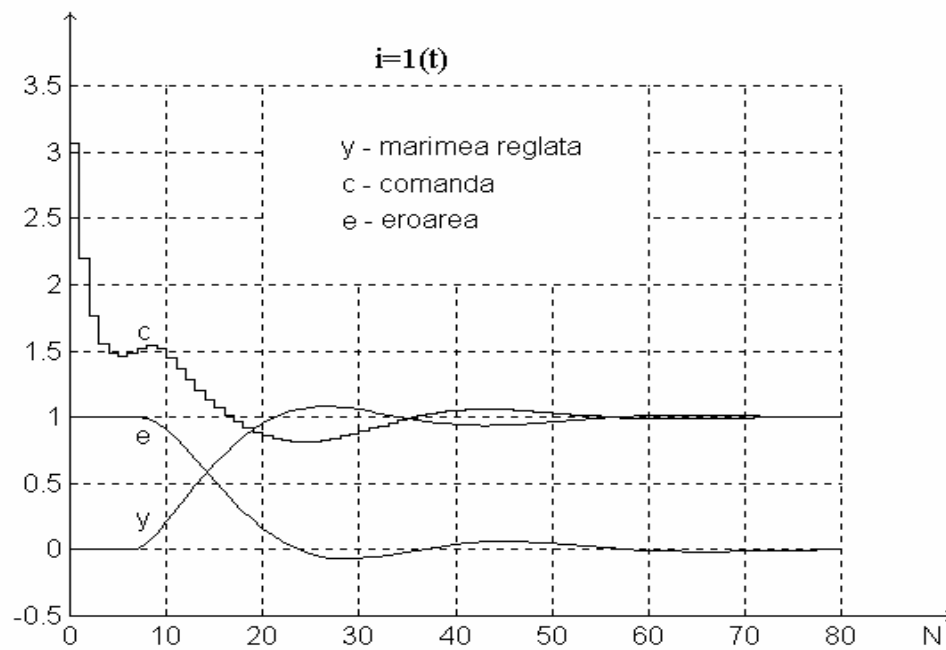


Fig. 4.9. Răspunsul la *referință treaptă* al unui SRA cu timp mort, obținut prin apelarea funcției **stepsran**(1,80,16,8,5,81)

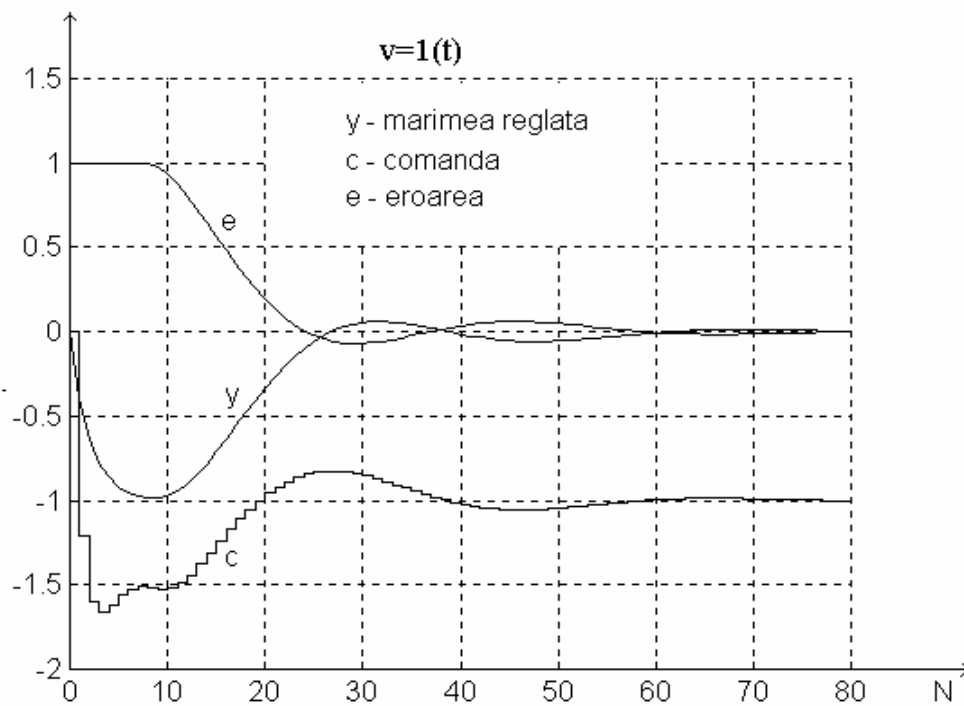


Fig. 4.10. Răspunsul la *perturbare treaptă* al unui SRA cu timp mort, obținut prin apelarea funcției **stepsran**(1,80,16,8,5,81)

4.6. STABILITATEA SISTEMELOR DISCRETE

Cunoasterea functiilor de transfer în z ale unui sistem cu esantionare este deosebit de utilă în analiza stabilității sistemului. Studiul stabilității sistemelor cu esantionare se face cu ajutorul **teoremei de stabilitate (externă) a sistemelor cu esantionare**, care are următorul enunț:

Un sistem monovariabil cu esantionare este extern strict stabil dacă și numai dacă toți polii funcției de transfer $H(z)$ a sistemului au modulul subunitar, adică sunt situați în interiorul cercului unitar (de rază 1) cu centrul în origine.

Vom demonstra această teoremă în cazul particular în care polinomul polilor sistemului are numai rădăcini simple, adică

$$p(z) = (z-p_1)(z-p_2) \dots (z-p_n). \quad (107)$$

Din forma descompusă a funcției de transfer

$$H(z) = \frac{a_1}{z-p_1} + \frac{a_2}{z-p_2} + \dots + \frac{a_n}{z-p_n} = z^{-1} \left(\frac{a_1}{1-p_1z^{-1}} + \frac{a_2}{1-p_2z^{-1}} + \dots + \frac{a_n}{1-p_nz^{-1}} \right),$$

se obține funcția pondere

$$h(kT) = a_1 p_1^{k-1} + a_2 p_2^{k-1} + \dots + a_n p_n^{k-1}, \quad k \in \mathbf{N}. \quad (108)$$

De aici reiese că sistemul este extern strict stabil, adică $\sum_{k=1}^{\infty} |h(kT)| < \infty$, dacă și numai dacă $|p_i| < 1$, $i = \overline{1, n}$, rezultat în concordanță cu teorema de stabilitate.

Reamintim că polinomul $p(z)$ are toate rădăcinile cu modulul subunitar dacă și numai dacă ecuația $p\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = 0$ are toate rădăcinile cu partea reală negativă, ceea ce poate fi studiat cu criteriul lui Hurwitz.

Reamintim că polii sistemului de reglare numerică din figura 4.2 sunt rădăcinile ecuației

$$1 + \overline{H_T H_P H_E H_0}(z) \cdot H_R(z) = 0, \quad (109)$$

iar polii sistemului de reglare cu măsurare esantionată și întârziată din figura 4.1 (cu timpul mort τ egal cu perioada de esantionare T), sunt rădăcinile ecuației

$$1 + z^{-1} \overline{H_P H_E H_R H_0}(z) = 0. \quad (110)$$

Aplicatia 4.3. Se consideră sistemul de reglare cu măsurare esantionată din figura 4.1, în care

$$\tau = T = 2,88 \text{ min.}, \quad H_R(s) = 2, \quad H_E(s) = \frac{1}{4}, \quad H_P(s) = \frac{1}{T_1 s + 1}, \quad T_1 = 10 \text{ min.}$$

- Să se afle răspunsul indicial $y(t)$ pentru $i=1(t)$;
- Să se afle răspunsul indicial $y(t)$ pentru $v=1(t)$;
- Să se determine funcțiile de transfer ale discretizatăului sistemului.

Răspuns. a) În conformitate cu (94), avem $Y(z) = \frac{\overline{H_P H_E H_R I}(z)}{\mathcal{P}(z)}$. Din

$$\begin{aligned} \overline{H_P H_E H_R I}(z) &= \mathcal{Z}[H_P(s)H_E(s)H_R(s)\frac{1}{s}] = \mathcal{Z}[\frac{1}{2s(10s+1)}] = \frac{1}{2} \mathcal{Z}[\frac{1}{s} - \frac{10}{10s+1}] = \\ &= \frac{1}{2} [\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T/10}z^{-1}}] = \frac{1}{2} [\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{4}{4-3z^{-1}}] = \frac{z^{-1}}{2(1-z^{-1})(4-3z^{-1})}, \end{aligned}$$

$$\overline{H_P H_E H_R H_0}(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s} H_P(s)H_E(s)H_R(s)] = \frac{z^{-1}}{2(4-3z^{-1})},$$

$$\mathcal{P}(z) = 1 + z^{-1} \overline{H_P H_E H_R H_0}(z) = 1 + \frac{z^{-2}}{2(4-3z^{-1})} = \frac{(2-z^{-1})(4-z^{-1})}{2(4-3z^{-1})},$$

obținem

$$Y(z) = \frac{\frac{z^{-1}}{2(1-z^{-1})(4-3z^{-1})}}{\frac{(2-z^{-1})(4-z^{-1})}{2(4-3z^{-1})}} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(2-z^{-1})(4-z^{-1})} = \frac{1}{3(1-z^{-1})} - \frac{1}{2-z^{-1}} + \frac{2}{3(4-z^{-1})}.$$

Rezultă

$$y(kT) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{6 \cdot 4^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

b) Ținând seama de (94), avem

$$Y(z) = \frac{V(z)}{\mathcal{P}(z)} = \frac{\frac{1}{1-z^{-1}}}{\frac{(2-z^{-1})(4-z^{-1})}{2(4-3z^{-1})}} = \frac{2(4-3z^{-1})}{(1-z^{-1})(2-z^{-1})(4-z^{-1})} = \frac{2}{3(1-z^{-1})} + \frac{2}{2-z^{-1}} - \frac{8}{3(4-z^{-1})},$$

deci

$$y(kT) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2^k} - \frac{2}{3 \cdot 4^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

c) În conformitate cu (99) și (100), avem:

$$H_{yi}^0(z) = \frac{\overline{H_P H_E H_R H_0}(z)}{\mathcal{P}(z)} = \frac{\frac{z^{-1}}{2(4-3z^{-1})}}{\frac{(2-z^{-1})(4-z^{-1})}{2(4-3z^{-1})}} = \frac{z^{-1}}{(2-z^{-1})(4-z^{-1})},$$

$$H_{ei}^0(z) = H_{yv}^0(z) = \frac{1}{\mathcal{P}(z)} = \frac{2(4-3z^{-1})}{(2-z^{-1})(4-z^{-1})},$$

$$H_{ev}^0(z) = \frac{-z^{-1}}{\mathcal{P}(z)} = \frac{-2(4z^{-1}-3z^{-2})}{(2-z^{-1})(4-z^{-1})}.$$

Aplicatia 4.4. Să se analizeze stabilitatea sistemului de reglare cu măsurare esantionată de la aplicatia anterioară, considerând acum $H_R(s) = K_p$, $K_p \in \mathbf{R}$.

Răspuns. Formăm ecuația polilor $\mathcal{P}(z)=0$, unde

$$\mathcal{P}(z)=1+z^{-1}\overline{H_p H_E H_R H_0}(z)=1+z^{-1}\cdot\frac{K_p z^{-1}}{4(4-3z^{-1})}.$$

Obținem polinomul polilor

$$p(z)=16z^2-12z+K_p,$$

apoi formăm ecuația $p(\frac{s+1}{s-1})=0$, care are forma

$$(4+K_p)s^2+2(16-K_p)s+K_p+28=0.$$

Rădăcinile acestei ecuații au partea reală negativă atunci când coeficienții trinomului de gradul doi în s din stânga semnelui egal sunt strict pozitivi, adică atunci când $K_p \in (-4, 16)$. În acest caz sistemul este extern strict stabil, iar pentru $K_p \in (-\infty, -4) \cup (16, \infty)$ este instabil.

Aplicatia 4.5. Se consideră sistemul de reglare numeric din figura 4.2, în care

$$T=2,77 \text{ sec.}, \quad H_R(z)=\frac{1}{2}, \quad H_E(s)=1, \quad H_P(s)=\frac{1}{4s+1}, \quad H_T(s)=1.$$

- Să se afle răspunsul indicial $e(t)$ pentru $i=1(t)$;
- Să se determine funcțiile de transfer ale discretizatăului sistemului.

Răspuns. a) Utilizăm relația $E(z)=H_{ei}(z)I(z)$, unde $H_{ei}(z)=\frac{1}{\mathcal{P}(z)}$. Avem

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(z) &= 1 + \overline{H_T H_P H_E H_0}(z) \cdot H_R(z) = 1 + (1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(4s+1)}\right] \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{1-z^{-1}}{2} \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s} - \frac{4}{4s+1}\right] = \\ &= 1 + \frac{1-z^{-1}}{2} \left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T/4}z^{-1}} \right] = 1 + \frac{1-z^{-1}}{2} \left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{2}{2-z^{-1}} \right] = \frac{4-z^{-1}}{2(2-z^{-1})}, \end{aligned}$$

deci

$$E(z) = \frac{2(2-z^{-1})}{4-z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{1-z^{-1}} + \frac{4}{4-z^{-1}} \right),$$

și

$$e(t) = \frac{1}{3} (2 + 4^{-t/T}), \quad e(kT) = \frac{1}{3} (2 + 4^{-k}).$$

- În conformitate cu (106), avem:

$$\begin{aligned} H_{ev}^0(z) &= \frac{-\overline{H_T H_0}(z)}{\mathcal{P}(z)} = \frac{-1}{\frac{4-z^{-1}}{2(2-z^{-1})}} = \frac{-2(2-z^{-1})}{4-z^{-1}}, \\ H_{yv}^0(z) &= 1 - \frac{\overline{H_P H_E H_0}(z) \cdot H_R(z) \cdot \overline{H_T H_0}(z)}{\mathcal{P}(z)} = \frac{1}{\mathcal{P}(z)} = \frac{2(2-z^{-1})}{4-z^{-1}}. \end{aligned}$$

Aplicatia 4.6. Să se studieze stabilitatea sistemului de reglare numeric precedent (de la aplicația 4.5), în condițiile mai generale $T>0$ și $H_R(z)=K_p$, $K_p>0$.

Răspuns. Formăm ecuația polilor $\mathcal{P}(z)=0$, unde $\mathcal{P}(z)=1+\overline{H_T H_p H_E H_0}(z) \cdot H_R(z)$. Avem

$$\mathcal{P}(z)=1+(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(4s+1)}\right] \cdot K_p = 1+K_p(1-z^{-1}) \cdot \left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-pz^{-1}}\right] = \frac{z-p(K_p+1)+K_p}{z-p},$$

unde $p=e^{-T/4}$. Sistemul de reglare are un singur pol, anume $z_1=p(K_p+1)-K_p$. Sistemul este extern strict stabil în cazurile: a) $K_p \leq 1$; b) $K_p > 1$ și $T < 4 \ln \frac{K_p+1}{K_p-1}$.

Aplicatia 4.7. Se consideră sistemul de reglare numeric din figura 4.2, în care

$$T=2,77 \text{ sec.}, \quad H_R(z)=K_p, \quad H_E(s)=5, \quad H_P(s)=\frac{1}{5s}, \quad H_T(s)=\frac{1}{4s+1}.$$

- a) Să se studieze stabilitatea sistemului;
b) Să se determine funcțiile de transfer ale discretizatăului sistemului.

Răspuns. a) Avem

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(z) &= 1 + \overline{H_T H_p H_E H_0}(z) \cdot H_R(z) = 1 + K_p(1-z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(4s+1)}\right] = 1 + K_p(1-z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{4}{s} + \frac{16}{4s+1}\right] = \\ &= 1 + K_p(1-z^{-1}) \cdot \left[\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{4}{1-z^{-1}} + \frac{4}{1-e^{-T/4}z^{-1}}\right] = 1 + K_p\left[\frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} - 4 + \frac{8(1-z^{-1})}{2-z^{-1}}\right] = \\ &= \frac{2 + (1,54K_p - 3)z^{-1} + (1,23K_p + 1)z^{-2}}{2 - 3z^{-1} + z^{-2}}. \end{aligned}$$

Obținem polinomul polilor

$$p(z) = 2z^2 + (1,54K_p - 3)z + 1,23K_p + 1,$$

apoi formăm ecuația $p\left(\frac{s+1}{s-1}\right)=0$, care are forma

$$2,77K_p s^2 + 2(1-1,23K_p)s + 6-0,31K_p = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuații au partea reală negativă, și deci sistemul este extern strict stabil, atunci când coeficienții trinomului de gradul doi în s sunt strict pozitivi, adică atunci când $K_p \in (0; 0,813)$.

b) Vom utiliza formulele

$$H_{ev}^0(z) = \frac{-\overline{H_T H_0}(z)}{\mathcal{P}(z)}, \quad H_{yv}^0(z) = 1 - \frac{\overline{H_p H_E H_0}(z) \cdot H_R(z) \cdot \overline{H_T H_0}(z)}{\mathcal{P}(z)}.$$

Avem

$$\overline{H_T H_0}(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(4s+1)}\right] = (1-z^{-1}) \cdot \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(2-z^{-1})} = \frac{z^{-1}}{2-z^{-1}},$$

de unde rezultă

$$H_{ev}^0(z) = \frac{-z^{-1} + z^{-2}}{2 + (1,54K_p - 3)z^{-1} + (1,23K_p + 1)z^{-2}}.$$

Mai departe, avem

$$\overline{H_p H_E H_0}(z) = (1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2}\right] = (1-z^{-1}) \cdot \frac{T z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{T z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{2,77 z^{-1}}{1-z^{-1}},$$

si deci

$$\begin{aligned} H_{yv}^0(z) &= 1 - \overline{H_p H_E H_0}(z) \cdot H_R(z) \cdot \overline{H_T H_0}(z) \cdot \frac{1}{\mathcal{P}(z)} = \\ &= 1 - \frac{2,77 z^{-1}}{1-z^{-1}} \cdot K_p \cdot \frac{z^{-1}}{2-z^{-1}} \cdot \frac{(1-z^{-1})(2-z^{-1})}{2+(1,54K_p-3)z^{-1}+(1,23K_p+1)z^{-2}} = \frac{2+(1,54K_p-3)z^{-1}+(1-1,54K_p)z^{-2}}{2+(1,54K_p-3)z^{-1}+(1,23K_p+1)z^{-2}}. \end{aligned}$$

Aplicatia 4.8. Să se calculeze răspunsul indicial $y(t)$ pentru $i=1(t)$ al unui sistem de reglare numeric cu timp mort, caracterizat prin

$$H_R(z)=1, \quad H_P(s)=\frac{e^{-s}}{4s}, \quad H_E(s)=1, \quad H_T(s)=1$$

si perioada de esantionare $T=1$ sec.

Răspuns. Avem

$$Y(z) = \frac{\overline{H_p H_E H_0}(z) \cdot H_R(z)}{\mathcal{P}(z)} \cdot I(z),$$

$$\mathcal{P}(z) = 1 + \overline{H_T H_p H_E H_0}(z) \cdot H_R(z) = 1 + \frac{1-z^{-1}}{4} \cdot \mathcal{Z}\left[\frac{e^{-s}}{s^2}\right] = 1 + \frac{1-z^{-1}}{4} \cdot \frac{T z^{-2}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{(2-z^{-1})^2}{4(1-z^{-1})},$$

$$\overline{H_p H_E H_0}(z) = \overline{H_T H_p H_E H_0}(z) = \frac{z^{-2}}{4(1-z^{-1})},$$

$$Y(z) = \frac{\frac{z^{-2}}{4(1-z^{-1})}}{\frac{(2-z^{-1})^2}{4(1-z^{-1})}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})(2-z^{-1})^2} = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{4}{(2-z^{-1})^2} = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{[1-(2z)^{-1}]^2}.$$

Tinând seama de relatia $\mathcal{Z}\left[\frac{t}{T} + 1\right] = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}$ si de proprietatea înmulțirii (cu o constantă) în complex, obținem

$$y(t) = 1 - \left(\frac{t}{T} + 1\right) 2^{-t/T} = 1 - (t+1) 2^{-t}, \quad t \in \mathbf{N}.$$

Aplicatia 4.9. Să se analizeze stabilitatea sistemului de reglare numeric cu timp mort de la aplicatia 4.8, considerând perioada de esantionare T arbitrar pozitivă si $H_R(z)=K_p$, $K_p > 0$.

Răspuns. Din

$$\mathcal{P}(z) = 1 + \overline{H_T H_p H_E H_0}(z) \cdot H_R(z) = 1 + \frac{K_p T z^{-2}}{4(1-z^{-1})},$$

obținem polinomul polilor $p(z) = 4z^2 - 4z + K_p T$ si ecuatia asociată a polilor în s

$$K_p T s^2 + 2(4-K_p T)s + 8 + K_p T = 0,$$

de unde rezultă că sistemul este strict stabil atunci când $K_p T < 4$.